B. A. KORDEMSKIS • MATEMATIKOS PASAULYJE

B. KORDEMSKIS

MATEMATIKOS PASAULYJE

B. A. KORDEMSKIS

MATEMATIKOS PASAULYJE

VALSTYBINĖ
POLITINĖS IR MOKSLINĖS LITERATŪROS LEIDYKLA
VILNIUS — 1955

Б. А. Кордемский
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕКАЛКА
На литовском языке
Перевод с русского издания 1954 г.
Госполитнаучиздат Лит. ССР

Vertė *V. Macijauskas*
Spec. redaktorius *J. Kubilius*
Viršelis dail. *V. Varankos*
Techn. redaktorius *L. Kosmauskas*
Korektoriai: *M. Lomsargienė, J. Matulevičiūtė*

Leidinys Nr. 3144. Tiražas 8 000 egz.
Pasirašyta spausdinti 1955.VIII.12. LV 42109.
Popierius 84×108/32=8,8125 pop. lapo. — 28,9 sp. l. 26,6 apsk. leid. l.
36 791 sp. ž. 1 sp. l. Kaina Rb. 9,00

Spausdino valst. spaust. «Pergalė» Vilniuje, Latako g. Nr. 6.
Užsakymo Nr. 696

PRATARMĖ

Darbe, moksle, žaidimuose, bet kokioje kūrybinėje veikloje žmogui yra būtini supratingumas, sumanumas, išradingumas, sugebėjimas samprotauti, nuovoka. Nuovoką galima lavinti ir vystyti sistemingomis bei laipsniškomis pratybomis, ypač sprendžiant tiek mokyklinio kurso matematinius uždavinius, tiek praktikoje iškilusius uždavinius, surištus su mus supančios aplinkos daiktų bei įvykių stebėjimais.

«Matematika,— pasakė M. I. Kalininas, kreipdamasis į vidurinių mokyklų mokinius,— drausmina protą, įpratina logiškai galvoti. Neveltui sakoma, kad matematika — tai proto gimnastika».

Kiekviena šeima, kurioje tėvai susirūpinę vaikų ir paauglių protinio vystymosi organizavimu, stokoja medžiagos, tinkamos laisvalaikiui užpildyti naudingais, racionaliais ir nenuobodžiais matematiniais pratimais.

Štai tokios rūšies neprograminiams užsiėmimams, pašnekesiams ir pramogoms laisvais vakarais, šeimoje ir su draugais, arba mokykloje užklasinių užsiėmimų metu ir skiriama «Matematikos pasaulyje» — rinkinys matematinių miniatiūrų: įvairiausių uždavinių, matematinių žaidimų, pokštų ir išdaigų, reikalaujančių protinio darbo, lavinančių sumanumą ir logiškumą samprotaujant.

Ikirevoliuciniais laikais buvo plačiai žinomi E. I. Ignatjevo rinkiniai («В царстве смекалки»). Dabar jie mūsų skaitytojui paseno ir todėl pakartotinai nebeišleidžiami. Vis tik ir šiuose rinkiniuose yra uždavinių, dar nepraradusių pedagoginės bei lavinamosios vertės. Vieni iš jų įėjo į «Matematikos pasaulį» be pakeitimų, kiti — su pakeistu arba visai nauju turiniu.

Knygai «Matematikos pasaulyje» aš taip pat atrinkau ir prireikus pertvarkiau tuos uždavinius, kurie išsklaidyti plačios tėvyninės ir užsienio populiariosios literatūros puslapiuose, stengdamasis tačiau nekartoti uždavinių, įtrauktų į paplitusias J. I. Perelmano įdomiosios matematikos knygas*.

Tokios rūšies «smulkios formos» matematiniai uždaviniai atsiranda kartais kaip mokslininko rimtų tyrinėjimų šalutinis produktas; daugelį uždavinių sugalvoja mėgėjai, o taip pat pedagogai, kaip priemonę specialioms «proto gimnastikos» pratyboms. Paprastai jie, panašiai kaip mįslės ar patarlės, neišsaugo autorystės ir tampa visuomenine nuosavybe.

«Matematikos pasaulyje» skiriama skaitytojams su įvairiausiu matematiniu paruošimu:

10—11 metų paaugliui, darančiam pirmuosius savarankiško galvojimo bandymus;

matematika sužavėtam vyresniųjų klasių mokiniui

ir suaugusiam, norinčiam išbandyti ir pamiklinti savo nuovoką.

Uždavinių susisteminimas atskirais skyriais yra gana reliatyvus; kiekviename skyriuje yra ir sunkiai ir lengvai sprendžiamų uždavinių.

Knygoje yra penkiolika skyrių.

P i r m a s i s s k y r i u s susideda iš įvairaus tipo įmantraus pobūdžio elementarių pratimų, paremtų sumanumu arba betarpiškais eksperimentais, kai kada nesudėtingais skaičiavimais sveikų skaičių (pirmas poskyris) bei trupmenų (antras poskyris) aritmetikos ribose.

Sprendžiant a n t r o j o s k y r i a u s uždavinius, savarankiška matematinė nuovoka bei atkaklumas turi įveikti visokias kliūtis ir nurodyti išeitį iš keblių padėčių.

---

* Žymi dalis uždavinių arba uždaviniams temų mano paimta iš šių knygų bei žurnalų: Е. И. И г н а т ь е в, В царстве смекалки, кн. I, кн. II, 1923; M. K r a i t c h i k, Mathematical recreations, 1943; S. J o n e s, Mathematical nuts, 1932; «Математика в школе»; «Затейник»; «Scripta mathematica»; «The American Mathematical Monthly» ir kt.

Trečias skyrius — «Geometrija su degtukais» — apima eilę geometrinių uždavinių — galvosūkių.

Skyrius «Septynis kartus atmatuok, aštuntą kartą kirpk» susideda iš figūrų dalijimo uždavinių.

Skyriaus «Ką žinosi — visada panaudosi» uždavinių turinys surištas su praktine veikla, technika.

Skyriuje, pavadintame «Matematika bemaž be skaičiavimų», sukaupti uždaviniai, kuriuos sprendžiant reikia sudaryti sumanių bei subtilių samprotavimų grandinėlę.

Zaidimai ir pokštai surinkti į atskirą skyrių, o taip pat išskirstyti po visą knygą. Jie turi matematinį pagrindą ir neabejotinai įeina į «nuovokos sritį».

Trys skyriai: «Kryžiasumiai ir magiški kvadratai», «Rimta ir kurioziška skaičiuose» ir «Seni, bet amžinai nauji skaičiai» pašvęsti kai kurioms įdomioms skaičių tarpusavio pareinamybėms, susikaupusioms matematikoje nuo senų senovės iki mūsų laikų.

Paskutinis skyrius — dvi nedidelės apybraižos apie mūsų Tėvynės žmonių, dirbančių laukuose ir gamyklose, nuovoką darbe.

Įvairiose knygos vietose skaitytojui pateikiamos nesudėtingos temos savarankiškam tyrinėjimui.

Knygos gale yra patalpinti uždavinių sprendimai, tačiau nepatartina iš anksto jų žiūrėti.

Kiekvienas suvokimo uždavinys slepia savyje tam tikrą «deimančiuką» ir daugeliu atvejų yra kietas riešutas, kurį perkąsti ne taip jau lengva, bet kartu ir labai masina.

Tuo atveju, jei Jums nepavyktų iš karto išspręsti uždavinio, laikinai galite jį praleisti ir pereiti prie sekančių arba prie kito poskyrio ar skyriaus uždavinių. Vėliau grįžkite prie praleistojo uždavinio.

«Matematikos pasaulyje» — knyga ne lengvam pasiskaitymui «vienu prisėdimu», bet darbui, trunkančiam gal net eilę metų, knyga nuolatinei nedidelėmis porcijomis proto gimnastikai, skaitytojo palydovas jo laipsniškame matematiniame vystymesi.

Visa knygos medžiaga paskirta auklėjimo ir lavinimo tikslams: skaitytojui paskatinti savarankiškai kūrybiškai mąstyti, toliau gilinti savo matematines žinias.

Pageidaujama gauti iš knygos skaitytojų atsiliepimų ir nurodymų knygai pagerinti, o taip pat savų originalių uždavinių bei liaudies kūrybos matematinės medžiagos.

Adresas: Москва, ул. Чернышевского, дом № 31, кв. 53, Борису Анастасьевичу Кордемскому.

B. Kordemskis

PRATARMĖ LIETUVIŠKAJAM LEIDIMUI

«Matematikos pasaulyje» lietuviškajam leidimui aš padariau knygos tekste kai kuriuos redakcinius pataisymus ir pakeitimus ryšium su skaitytojų atsiliepimais, recenzentų pastabomis ir vertėjo V. Macijausko pasiūlymais. Į visus taisymus atsižvelgta knygą verčiant.

Reikia taip pat pažymėti, kad V. Macijauskas knygą į lietuvių kalbą vertė labai sąžiningai, įprasmindamas bei apgalvodamas ir patikrindamas kiekvieną autoriaus teksto puslapį.

Labai norėčiau gauti ir iš lietuvių knygos skaitytojų originalių uždavinių ir liaudies kūrybos matematinės medžiagos, kad būtų galima visa tai įtraukti į naują «Matematikos pasaulyje» rinkinį.

B. Kordemskis

UŽDAVINIAI

PIRMASIS SKYRIUS

ĮMANTRŪS UŽDAVINIAI

I POSKYRIS

Pradžioje patikrinkite ir pamiklinkite savo nuovoką tokiais uždaviniais, kuriems išspręsti tereikia tik atkaklumo, kantrybės, suvokimo ir mokėjimo sudėti, atimti, dauginti ir dalyti sveikus skaičius.

1. Pastabūs pionieriai

Mokiniai — berniukas ir mergaitė — ką tik užbaigė meteorologinius matavimus. Šiuo metu jie ilsisi ant kalvos ir stebi pro šalį pravažiuojantį prekinį traukinį. Garvežys, kildamas šlaitu, smarkiai leidžia dūmus ir pūškuoja. Išilgai geležinkelio sankasos vienodai, be gūsių, pučia vėjas.

— Kokį vėjo greitį parodė mūsų matavimai? — paklausė berniukas.

— 7 metrus per sekundę.

— Šiandieną man to užtenka, kad galėčiau nustatyti, kokiu greičiu važiuoja traukinys.

— Na jau,— suabejojo mergaitė.

— O tu tik atidžiau pasižiūrėk į traukinio judėjimą.

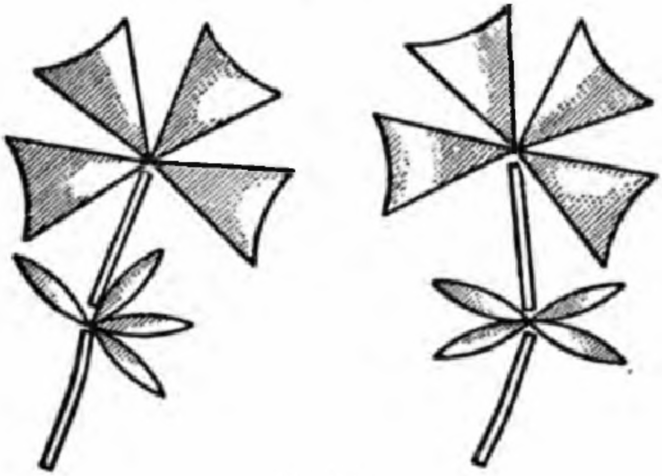
Mergaitė neilgai galvojo ir tuoj pat suvokė, kas čia yra.

O pamatė jie visiškai tą patį, ką nupiešė mūsų menininkas (žr. 1 pieš. kitame puslapyje).

Kokiu gi greičiu važiavo traukinys?



1 pieš.



2 pieš.

2. «Akmeninė gėlė»

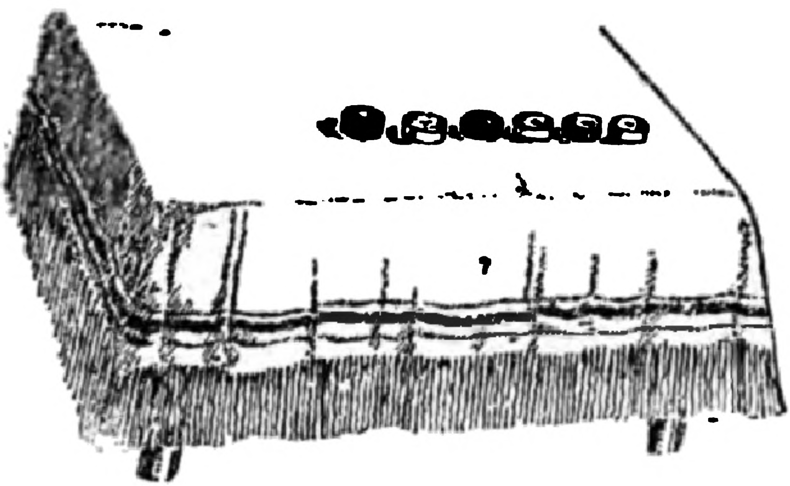
Pamenate talentingą, su «auksinėmis rankomis» meistrą Danilą iš P. Bažovo pasakos «Akmeninė gėlė»?

Urale pasakojama, kad, būdamas dar mokiniu, Danila nutekino gėles (2 pieš.), kurių lapai, vainiklapiai ir kotelis nusiimdavo, o iš tokiu būdu susidariusių gėlių dalių buvo galima sudėti skritulio formos plokštelę.

Pabandykite! Ant popieriaus ar kartono persipieškite Danilos gėlytes, išpiaukite vainiklapius, lapus ir kotelius ir sudėkite skritulį.

3. Šaškių perkėlimas

Padėkite ant stalo 6 šaškes į vieną eilę pakaitomis — juodą, baltą, vėl juodą, vėl baltą ir t. t. (3 pieš.).



3 pieš.

Iš dešinės ar iš kairės palikite laisvos vietos ne daugiau kaip keturioms šaškėms.

Reikia perkelti šaškes taip, kad kairėje atsirastų visos baltos, o dešiniau jų visos juodos. Be to, į laisvą vietą perkelti galima tik po dvi esančias greta šaškes ir nekeičiant

tos tvarkos, kurioje jos yra. Uždaviniui išspręsti pakanka atlikti tris perkėlimus (tris ėjimus)*.

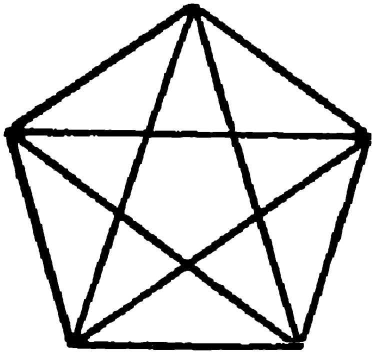
Jei neturite šaškių, pasinaudokite monetomis arba išpiautais iš popieriaus ar kartono gabalėliais.

4. Trimis ėjimais

Padėkite ant stalo 3 krūveles degtukų. Į vieną krūvelę padėkite 11 degtukų, į antrą — 7, į trečią — 6. Perdedant degtukus iš bet kurios vienos krūvelės į bet kurią kitą, reikia sulyginti visas tris krūveles taip, kad kiekvienoje jų būtų po 8 degtukus. Tai galima padaryti, nes bendras degtukų skaičius — 24 — dalijasi iš 3 be liekanos. Tačiau reikia laikytis šios sąlygos: prie kiekvienos krūvelės tegalima pridėti lygiai tiek pat degtukų, kiek joje yra. Pavyzdžiui, jeigu krūvelėje yra 6 degtukai, tai ir pridėti prie jos tegalima tik 6, jeigu krūvelėje yra 4 degtukai, tai ir pridėti prie jos tegalima tik 4.

Uždavinys išsprendžiamas trimis ėjimais.

5. Suskaičiuokite!



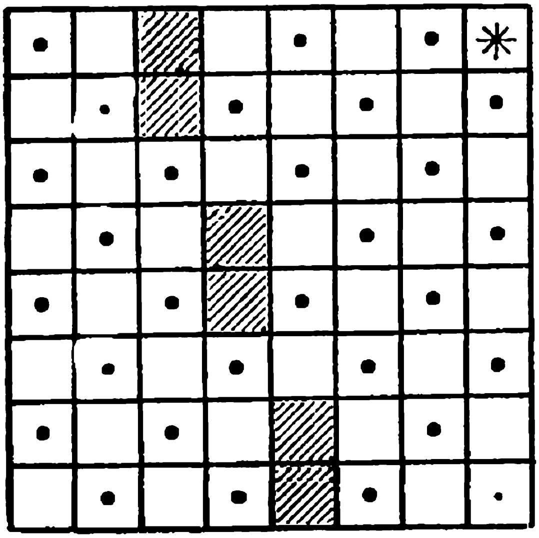
4 pieš.

Patikrinkite savo geometrinį pastabumą: suskaičiuokite, kiek 4 piešinyje atvaizduotoje figūroje yra trikampių.

* Šio uždavnio tema toliau vystoma 96 ir 97 uždaviniuose (64 psl.).

6. Sodininko kelias

Nedidelio obelų sodo planas pateiktas 5 piešinyje (taškai — obelys). Sodininkas visas obelis tvarkė paeiliui. Pradėjo jis nuo langelio, pažymėto žvaigždute, ir apėjo vieną



5 pieš.

po kito visus langelius, tiek su obelimis, tiek ir laisvus, negrįždamas į jau kartą praeitus langelius ir jų neperšokdamas. Subrūkšniuotuose langeliuose jis nebuvo, nes ten stovėjo įvairūs pastatai.

Nubrėžkite savo sąsiuvinyje sodininko kelią.

7. Reikia nutuokti

Pintinėje yra 5 obuoliai. Kaip juos paskirstyti penkioms mergaitėms, kad kiekviena gautų po 1 obuolį ir kad 1 obuolys liktų pintinėje?

8. Neilgai galvodami

Pasakykite, kiek skrido ančių, jei viena skrido priešakyje, dvi už jos, viena užpakalyje ir 2 prieš ją, viena tarp dviejų ir trys eilėje?

9. Persikėlimas per upę (senovinis uždavinys)

Nedidelis karių būrys atėjo prie upės, per kurią reikėjo persikelti. Tiltas suardytas, o upė gili. Ką daryti? Staiga karininkas pastebi prie kranto du berniukus, kurie irstosi laiveliu. Bet laivelis toks mažas, kad juo gali persikelti arba tik vienas karys, arba tik du berniukai — ne daugiau! Tačiau visi kariai persikėlė per upę kaip tik tuo laiveliu. Kokiu būdu?

Išspręskite uždavinį «mintinai» arba praktiškai,— pasinaudodami šaškėmis, degtukais arba kuo nors panašiu į juos, visa tai stumdydami ant stalo per įsivaizduojamą upę.

10. Vilkas, ožka ir kopūstas

Šis senovės uždavinys randamas VIII šimtmečio raštuose. Jo turinys primena pasakų turinį.

Kažkoks žmogus kėlė per upę laiveliu vilką, ožką ir kopūstą (6 pieš.). Tačiau mažame laivelyje galėjo tilpti tik



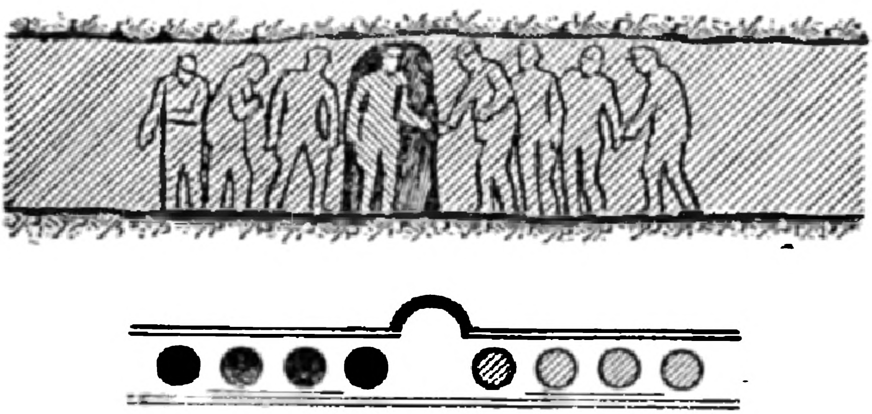
6 pieš.

vienas žmogus ir su juo arba vilkas, arba ožka, arba kopūstas. Tačiau, jeigu būtų palikti be žmogaus vilkas ir ožka, tai vilkas suėstų ožką; palikus ožką ir kopūstą, ožka su-

graužtų kopūstą, o žmogaus akivaizdoje «nieks nieko nelietė». Žmogus vis dėlto savo visą krovinį perkėlė per upę. Kaip jis tai atliko?

11. Susitikimas Odesos katakombose

Romane «Už tarybų valdžią» V. Katajevas aprašė Odesos katakombas, kurių sudėtingas labirintas Didžiojo Tėvynės karo metu saugiai slėpė drąsius ir narsius partizanus. Kai kurie katakombų koridoriai buvo taip siauri, jog partizanams teko iškalti sienose nišas, kad galėtų prasilenkti du susitikę žmonės. Dabar įsivaizduokite, kad tokiame



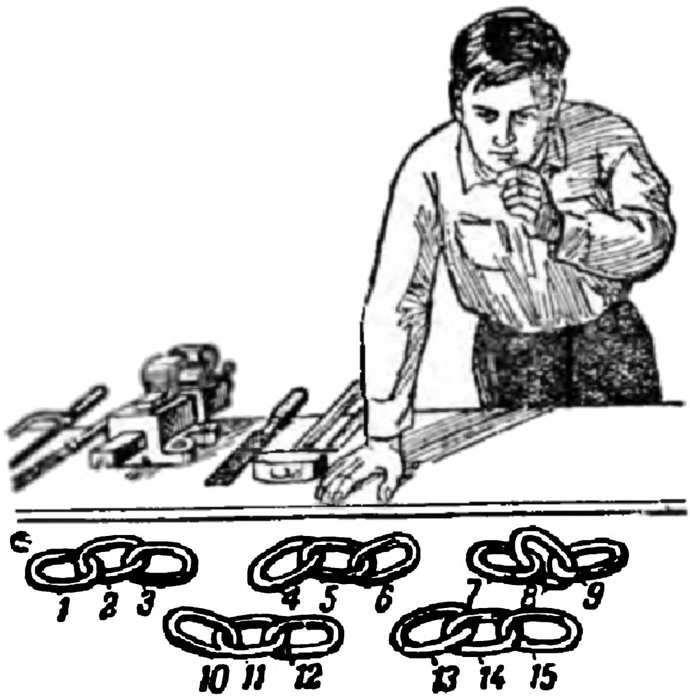
7 pieš.

siaurame koridoriuje, kurio sienoje buvo viena niša (7 pieš.), susitiko keturi žmonės, einą į vieną pusę, su keturiais draugais, einančiais į priešingą pusę. Kaip jie gali prasilenkti?

12. Grandinės remontas

Ar žinote, dėl ko susimąstė jaunasis meistras (8 pieš.)? Priešais jį penkios grandinės dalys, kurias reikia sujungti į vieną grandinę, nepavartojant papildomų grandžių. Jeigu, pavyzdžiui, perkirstume 3-ją grandį (viena operacija) ir

ją sukabintume su 4-ja (dar viena operacija), po to perkirstume 6-ją grandį ir sukabintume su 7-ja ir t. t., tai iš viso gautume aštuonias operacijas, o meistras nori gran-



8 pieš.

dinę sukabinti tik šešių operacijų pagalba. Tai jam pavyko. Kaip jis elgėsi?

13. Ištaisykite klaidą

Paimkite 12 degtukų ir sudėkite iš jų šią «lygybę»:



Lygybė, kaip matote, neteisinga, nes gauname, kad 6 — 4 = = 9. Perdėkite vieną degtuką taip, kad gautoji lygybė būtų teisinga.

14. Iš trijų — keturis

(pokštas)

Ant stalo guli 3 degtukai.

Nė vieno degtuko nepridėdami, padarykite iš trijų — keturis. Laužti degtukų negalima.

15. Trys ir du — aštuoni

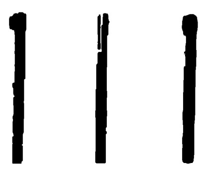
(dar vienas pokštas)

Štai dar vienas analogiškas pokštas. Jūs galite jį pasiūlyti savo draugui.

Padėkite ant stalo 3 degtukus ir paprašykite draugą pridėti prie jų dar 2 taip, kad gautų aštuonis. Suprantama, degtukų laužti negalima.

16. Suvokite!

Vėl ant stalo guli 3 degtukai:



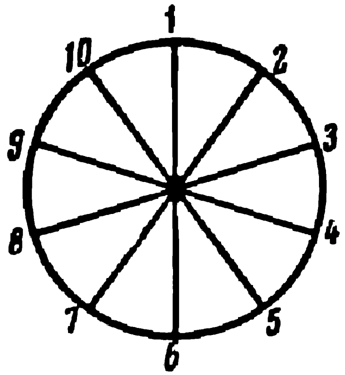
Pabandykite pašalinti vidurinį degtuką iš vidurio, jo nepajudinę.

17. Trys kvadratai

Iš 8 pagaliukų (pavyzdžiui, degtukų), kurių keturi yra perpus trumpesni už kitus keturis, reikia sudaryti 3 lygius kvadratus.

18. Pakeisti skaičių išdėstymą

Penkių skersmenų galuose (9 pieš.) išdėstyti visi sveiki skaičiai nuo 1 iki 10. Esant tokiam skaičių išdėstymui, tik



9 pieš.

vienu atveju dviejų gretimų skaičių suma yra lygi sumai dviejų priešais juos esančių skaičių, būtent:

$$10+1=5+6,$$

bet, pavyzdžiui,

$$1+2\neq 6+7, \text{ arba } 2+3\neq 7+8.$$

Perstatykite duotuosius skaičius taip, kad bet kurių gretimų skaičių suma būtų lygi atitinkamų priešais esančių skaičių sumai.

19. Kiek detalių?

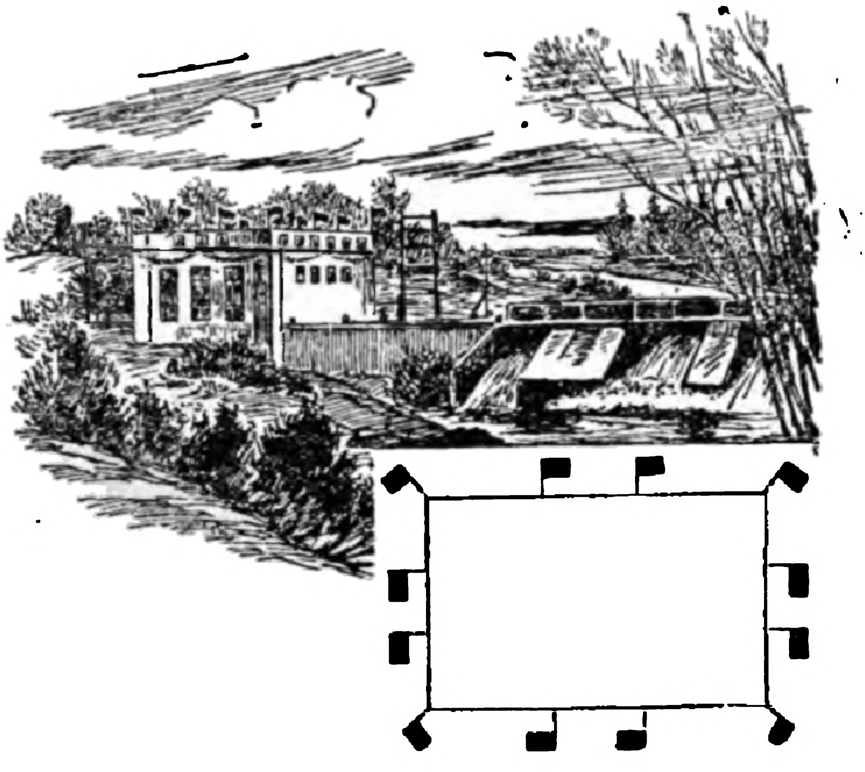
Gamyklos tekinimo ceche iš švino ruošinių tekinamos detalės. Iš vieno ruošinio — detalė. Drožles, atsiradusias padirbus šešias detales, galima sulydyti ir pagaminti dar vieną ruošinį. Kiek galima tokiu būdu pagaminti detalių iš 36 švino ruošinių?

20. Pabandykite!

Kvadratinėje šokių salėje išilgai sienų reikia 10 kėdžių sustatyti taip, kad prie kiekvienos sienos būtų po lygiai kėdžių.

21. Vėliavėlių išdėstymas

Nedidelę tarpkolūkinę hidroelektrinę (10 pieš.) pastatė komjaunuoliai. Jos paleidimo dienai pionieriai iš visų keturių pusių elektrinės išorę puošia girliandomis, lemputėmis ir vėliavėlėmis. Vėliavėlių buvo nedaug, tik 12.

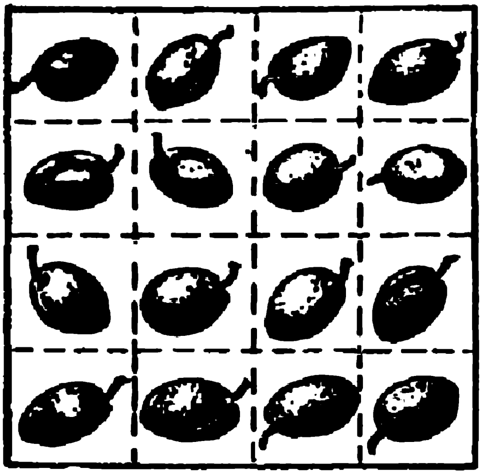


10 pieš.

Pionieriai pradžioje iškabino jas po 4 kiekvienoje pusėje, kaip parodyta schemoje (10 pieš.), po to suprato, kad šias 12 vėliavėlių jie gali išdėstyti po 5 ir net po 6 kiekvienoje pusėje. Antrasis variantas jiems labiau patiko.

Parodykite schemoje, kaip pionieriai išdėstė 12 vėliavėlių po 5 iš visų keturių pusių ir kaip jie būtų galėję išdėstyti po 6 vėliavėles.

22. Išlaikyti porą



11 pieš.

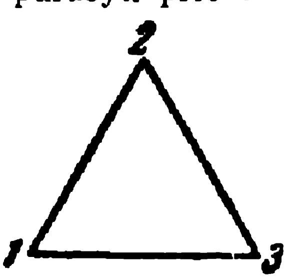
Paimkite 16 kurių nors daiktų (popierėlių, monetų, slyvų ar šaškių) ir sudėkite juos eilėmis po 4 (11 pieš.). Dabar pašalinkite 6 vienetus, bet taip, kad kiekvienoje horizontalioje ir kiekvienoje vertikalioje eilėje liktų porinis daiktų skaičius. Pašalinant vis kitus 6 vienetus, galima gauti įvairių sprendinių.

23. «Magiškas» skaičių trikampis

Aš prie trikampio viršūnių (12 pieš.) parašiau skaičius 1, 2 ir 3, o jūs parašykite prie trikampio kraštinių skaičius 4, 5, 6, 7, 8, 9 taip, kad visų skaičių išilgai kiekvienos trikampio kraštinės suma būtų lygi 17. Tai nesunku, nes aš nurodžiau, kuriuos skaičius reikia parašyti prie trikampio viršūnių.

Žymiai ilgiau jums reikės pasiknebinėti, jei aš iš anksto nenurodysiu, kokius skaičius reikia parašyti prie trikampio viršūnių, o pasiūlysiu iš naujo išdėstyti skaičius

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,



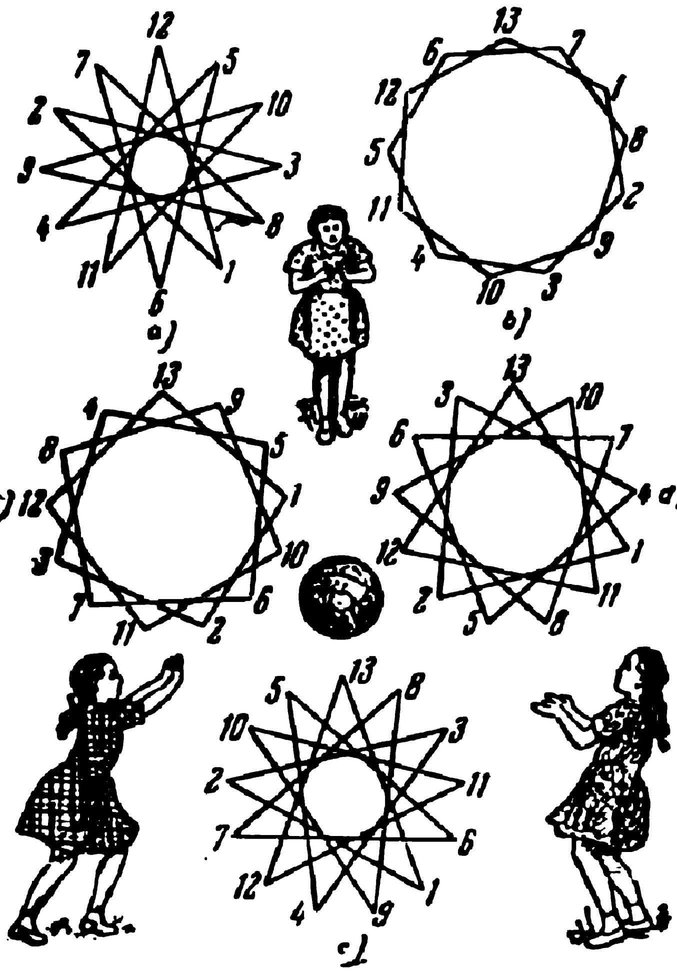
12 pieš.

kiekvieną po vieną kartą prie trikampio kraštinių ir jo viršūnių taip, kad suma išilgai kiekvienos trikampio kraštinės būtų lygi 20.

Kada rasite ieškomą skaičių išdėstymą, paieškokite dar ir dar naujų išdėstymų. Uždavinio sąlyga gali būti patenkinama įvairiausiai išdėstant šiuos skaičius.

24. Kaip 12 mergaičių žaidė sviediniu

Dvylika mergaičių sustojo ratu ir pradėjo žaisti sviediniu. Kiekviena mergaitė sviedinį mesdavo savo kaimynei



13 pieš.

iš kairės. Kai sviedinys apeidavo visą ratą, mergaitės grąžindavo sviedinį priešinga kryptimi. Po kurio laiko viena mergaitė tarė:

— Geriau meskim sviedinį kas antram žmogui.

— Bet tuomet, kadangi mūsų yra dvylika, pusė mergaičių nedalyvaus žaidime,— gyvai pasipriešino Nataša.

— Tada meskime sviedinį kas trečiai!

— Dar blogiau: žais tik keturios... Jeigu norite, kad visos mergaitės žaistų, reikia sviedinį mesti kas penktai. Kitos kombinacijos nėra.

— O jeigu mestume sviedinį kas septintam žmogui?

— Tai bus ta pati kombinacija, tik sviedinys lėks į priešingą pusę.

— O jei žaistume su kas vienuolikta? — toliau klausinėjo merginos.

— Taip mes jau žaidėme...

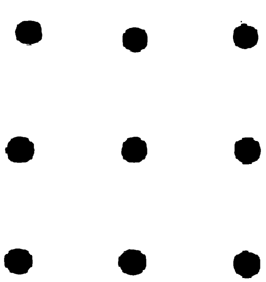
Mergaitės pradėjo braižyti siūlomų žaidimo būdų schemas ir greit įsitikino, kad Nataša teisi. Tik viena žaidimo schema (neskaitant pradinės) apimdavo visas dalyves be išimties (13 pieš., *a*).

Jei žaidžiančių mergaičių būtų buvę 13, kamuolį galima būtų buvę mesti ir kas antrai (13 pieš., *b*), ir kas trečiai (13 pieš., *c*), ir kas ketvirtai (13 pieš., *d*), ir kas penktai (13 pieš., *e*), ir kiekvieną sykį žaidimas apimtų visas dalyves.

Išaiškinkite, ar galima, žaidžiant trylikai, mesti kamuolį kas šeštam žmogui, kas septintam ir t. t., ir nubraižykite atitinkamas schemas.

25. Keturiomis tiesėmis

Ant popieriaus lapo išdėstykite kvadratu 9 taškus, kaip parodyta 14 piešinyje. Dabar, neatitraukdami pieštuko nuo popieriaus, perbraukite visus taškus keturiomis tiesėmis.



14 pieš.

26. Atskirti ožkas nuo kopūstų

Dabar išspręskite uždavinį, tam tikra prasme priešingą pirmesniajam. Ten mes tiesėmis jungėme taškus, o čia reikia nubrėžti 3 tieses taip, kad ožkos būtų atskirtos nuo kopūstų (15 pieš.)



15 pieš.

Ant knygos piešinio brėžti tieses netinka. Persipieškite ožkų ir kopūstų išdėstymo schemą į sąsiuvinį ir po to bandykite spręsti uždavinį. Galima iš viso nebrėžti tiesių, o pasinaudoti mezgimo virbalais arba plonomis vielelėmis.

27. Du traukiniai

Greitasis traukinys iš Maskvos išėjo į Leningradą ir važiavo nesustodamas 60 kilometrų per valandą greičiu. Kitas traukinys jam priešais iš Leningrado išėjo į Maskvą ir taip pat važiavo nesustodamas 40 kilometrų per valandą greičiu.

Koks atstumas tarp traukinių bus 1 val. prieš jų susitikimą?

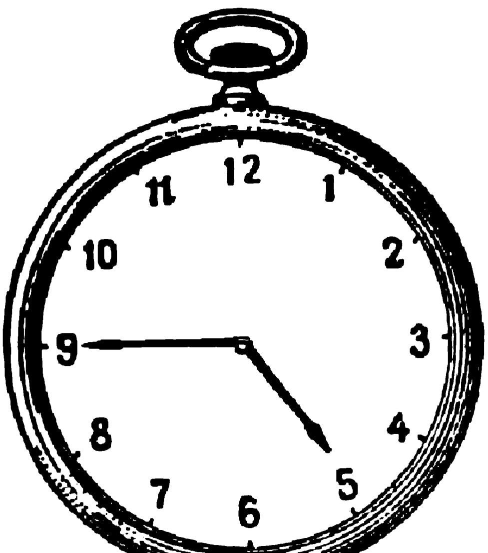
28. Potvynio metu
(pokštas)

Netoli nuo kranto stovi laivas su nuleistomis į vandenį palei bortą virvinėmis kopėčiomis. Kopėčios turi 10 pakopų; atstumas tarp pakopų 30 *cm*. Pati žemutinė pakopa liečia vandens paviršių. Šiandien vandenynas labai ramus, bet prasideda potvynis, kurio metu vanduo pakyla kas valanda po 15 *cm*.

Po kiek laiko vanduo apsems virvinių kopėčių trečiąją pakopą?

29. Ciferblatas

a) Padalyti dviem tiesėmis laikrodžio ciferblatą (16 pieš.) į tris dalis taip, kad, sudėję kiekvienoje dalyje esančius skaičius, gautume vienodas sumas.

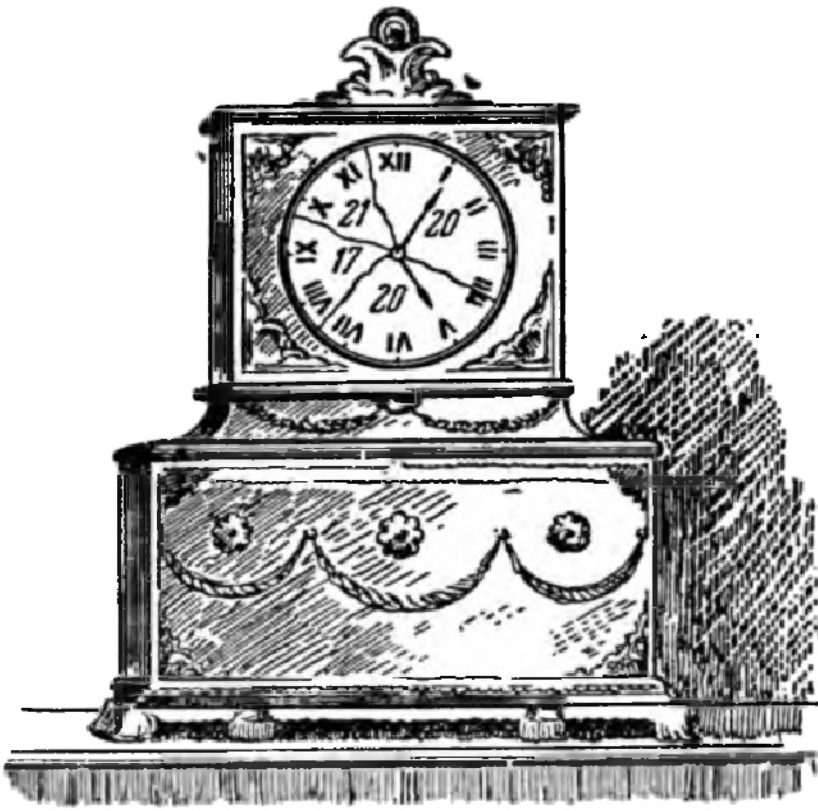


16 pieš.

b) Ar galima šį ciferblatą padalyti į 6 dalis taip, kad kiekvienoje dalyje būtų po du skaičius, be to, kad kiekvienoje iš šešių dalių tų dviejų skaičių sumos būtų tarp savęs lygios?

30. Suskilęs ciferblatas

Muziejuje aš mačiau senovinį laikrodį su romėniškais skaitmenimis ant ciferblato, be to, vietoje įprasto mums skaičiaus keturių (IV) buvo keturios lazdelės (IIII). Susidarę plyšiai dalijo ciferblatą į 4 dalis, kaip parodyta 17 piešinyje. Skaičių sumos kiekvienoje dalyje buvo nevienodos: vienoje — 21, antroje — 20, trečioje — 20, ketvirtoje — 17.



17 pieš.

Aš pastebėjau, kad, esant kitokiam suskilimui, skaičių suma kiekvienoje iš keturių ciferblato dalių būtų buvusi lygi 20. Naujieji įskilimai gali eiti ir ne per ciferblato centrą.

Persipieškite ciferblatą į sąsiuvinį ir raskite tą naują suskilimą.

31. Nuostabus laikrodis

(kinų galvosūkis)

Į vienus namus buvo pakviestas laikrodininkas.

— Aš sergu,— pasakė laikrodininkas,— ir negaliu nueiti. Bet jei taisymas nesudėtingas, aš atsiųsiu jums savo mokinį.

Paaiškėjo, kad reikėjo pakeisti sulūžusias rodykles.

— Jis tai padarys,— pasakė laikrodininkas,— patikrins laikrodžio mechanizmą ir parinks naujas rodykles.

Meistro mokinys išvyko nurodytu adresu. Kada jis baigė laikrodžio apžiūrėjimą, jau buvo sutemę. Skubėdamas jis uždėjo rodykles ir nustatė jas pagal savo laikrodį: didžiąją rodyklę ant skaičiaus 12, o mažąją — ant skaičiaus 6. Buvo 6 valanda vakaro. Neužilgo po to, kai jis grįžo į dirbtuvę, suskambėjo telefonas. Berniukas pakėlė ragelį ir išgirdo piktą užsakovo balsą:

— Jūs blogai sutaisėte laikrodį, jis neteisingai rodo.

Meistro mokinys, nustebintas tokio pranešimo, išvyko pas užsakovą. Laikrodis rodė devintos pradžią. Išsiėmęs savo kišeninį laikrodį, jis pratiesė jį namų šeimininkui:

— Prašau sulyginti. Jūsų laikrodis nė sekundės nevėluoja.

Užsakovui teko sutikti, kad tuo metu laikrodis iš tiesų rodė teisingą laiką.

Kitos dienos rytą užsakovas vėl paskambino ir pranešė, kad laikrodžio rodyklės greičiausiai iš proto išėjo, nes juda ciferblatu be tvarkos, kaip joms patinka. Meistro mokinys nuskubėjo pas užsakovą. Laikrodis rodė aštuntos pradžią. Patikrinęs laiką ant savo laikrodžio, jis ne juokais supyko:

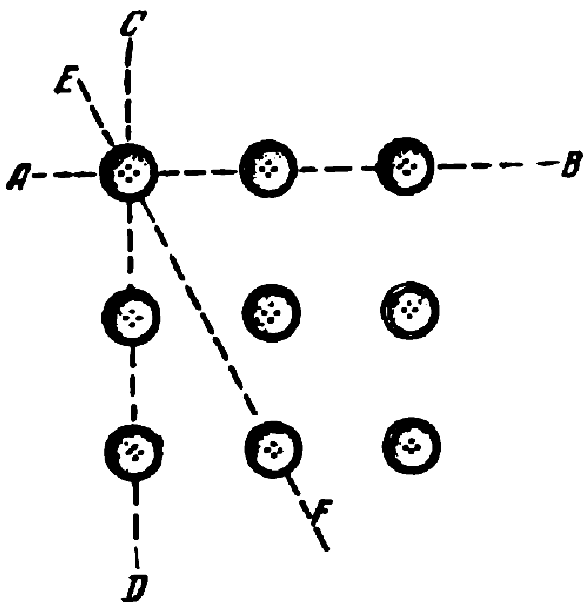
— Jūs juokiatės iš manęs! Jūsų laikrodis rodo tikslų laiką.

Laikrodis iš tikrųjų rodė tikslų laiką. Pasipiktinęs meistro mokinys ruošėsi jau išeiti, bet šeimininkas jį sulaikė. O po keleto minučių jie atrado tų neįtikimų nutikimų priežastį.

Ar nenumanote jūs tos priežasties?

32. Trys eilėje

Ant stalo sudėkite kvadratu 9 sagas: kiekvienoje kraštinėje po 3 ir vieną centre (18 pieš.). Įsidėmėkite, kad jei išilgai kurios nors tiesės yra dvi ar daugiau sagų, tai tokį išdėstymą mes visada vadinsime «eile». Antai, *AB* ir



18 pieš.

CD — eilės, kurių kiekvienoje yra po 3 sagas, o *EF* — eilė, turinti dvi sagas.

Suskaičiuokite, kiek piešinyje yra eilių po 3 sagas kiekvienoje ir kiek tokių eilių, kurių kiekvienoje yra tik po 2 sagas.

Dabar pašalinkite bet kurias 3 sagas, o likusias 6 išdėstykite į 3 eiles taip, kad kiekvienoje eilėje būtų po 3 sagas.

33. Dešimt eilių

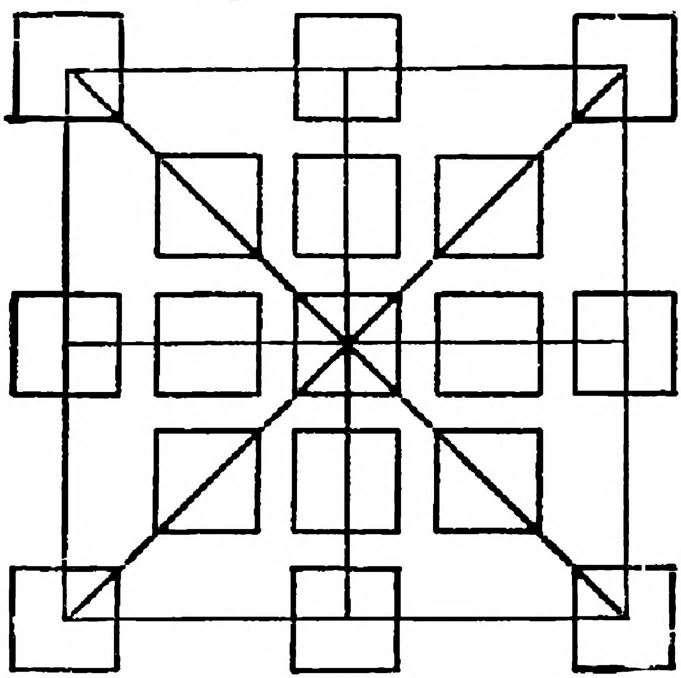
Nesunku numatyti, kaip 16 šaškių sustatyti į 10 eilių, po 4 šaškes kiekvienoje eilėje. Sunkiau sustatyti 9 šaškes į 10 eilių, po 3 šaškes kiekvienoje eilėje.

Išspręskite abu uždavinius.

34. Monetų išdėstymas

Paruoškite 17 šios vertės monetų:
po 20 kapeikų — 5 monetas,
po 15 kapeikų — 3 monetas,
po 10 kapeikų — 3 monetas,
po 5 kapeikas — 6 monetas.



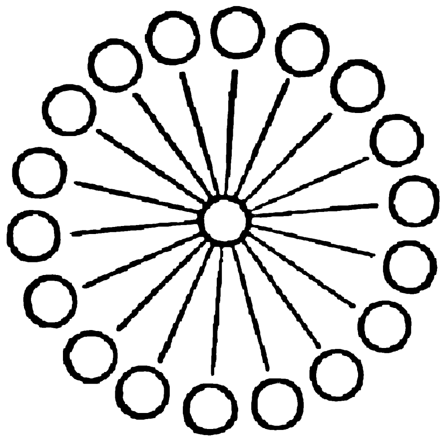


19 pieš.

Šias monetas sudėkite ant išbraižytos figūros kvadratėlių (19 pieš.) taip, kad kiekvienos piešinyje nubrėžtos tiesės kryptimi kapeikų suma būtų lygi 55.

35. Nuo 1 iki 19

Į devyniolika apskritimėlių, atvaizduotų 20 piešinyje, reikia surašyti visus sveikus skaičius nuo 1 iki 19 taip, kad



20 pieš.

skaičių suma bet kuriuose trijuose apskritimėliuose, esančiuose vienoje tiesėje, būtų lygi 30.

36. Greitai, bet atsargiai

Sprendžiant toliau nurodytus 5 uždavinius, reikia lenktyniauti — kas greičiau ras teisingą atsakymą:

a) Ant rankų 10 pirštų. Kiek pirštų ant 10 rankų?

b) Vidurdienį iš Maskvos į Tulą išvyksta autobusas su keleiviais. Valandą vėliau iš Tulos į Maskvą išvažiuoja dviratininkas ir važiuoja tuo pačiu keliu, bet, aišku, žymiai lėčiau už autobusą.

Kai autobuso keleiviai ir dviratininkas susitiks, kurie iš jų bus toliau nuo Maskvos?

c) Kas brangiau: kilogramas grivinų ar puskilogramis dvigubų grivinų?

d) 6 valandą sieninis laikrodis išmušė 6 kartus. Pažiūrėjęs į kišeninį laikrodį, aš pastebėjau, kad laikas, praėjęs nuo pirmo išmušimo iki paskutiniojo, buvo lygus 30 sekundžių.

Jeigu išmušti 6 kartus laikrodžiui prireikė 30 sekundžių, tai kiek laiko truks valandų išmušimas vidurdienį arba vidurnaktį, kai laikrodis išmuša 12 kartų?

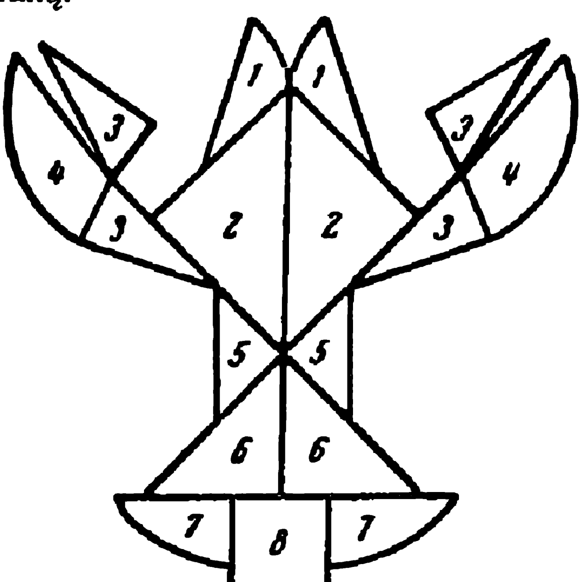
e) Iš vienos vietos išskrido 3 kregždutės. Kada jos bus vienoje plokštumoje?

O dabar, lėtai samprotaudami, patikrinkite savo sprendimus ir pažvelkite į «Atsakymus».

— Na, kaip? Ar nepakliuvote ir jūs į tas nedideles pinkles, kurios slepiasi šiuose nesudėtinguose uždaviniuose? Tokie uždaviniai tuo ir patrauklūs, kad jie paaštrina dėmesį ir pratina prie atsargumo įprastoje galvojimo eigoje.

37. Geometrinis vėžys

Geometrinis vėžys, atvaizduotas 21 piešinyje, sudėtas iš 17 gabaliukų.



21 pieš.

Iš šio vėžio gabaliukų sudėkite dvi figūras: skritulį ir greta jo kvadratą.

38. Knygos kaina

Už knygą užmokėta 1 rublis ir dar pusė knygos kainos. Kiek kainuoja knyga?

39. Nerami musė

Automagistrale Maskva—Simferopolis du sportininkai vienu metu pradėjo treniruočių žygį dviračiais, važiuodami vienas prieš kitą.

Tuo momentu, kada tarp dviratininkų buvo likę 300 *km*, šiuo žygiu labai susidomėjo musė. Pakilusi nuo vieno dviratininko peties ir jį pralenkusi, musė nuskubėjo prie antrojo. Sutikusi antrąjį dviratininką ir įsitikinusi, kad viskas tvarkoje, ji skubiai pasuko atgal. Musė atlėkė prie pirmojo sportininko ir vėl pasuko atgal pas antrąjį.

Taip ji skraidė tarp abiejų dviratininkų tol, kol jie susitiko. Tada musė nusiramino ir nutūpė vienam iš dviratininkų ant nosies.

Musė tarp dviratininkų skraidė 100 *km* per valandą greičiu, o dviratininkai visą tą laiką važiavo 50 *km* per valandą greičiu.

Kiek kilometrų nuskrido musė?

40. Anksčiau, negu po 50 metų

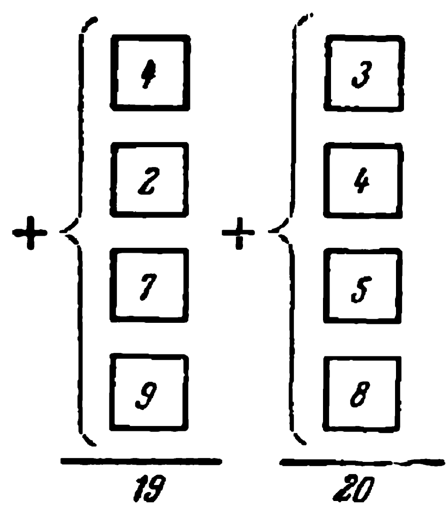
Ar bus šiame šimtmetyje tokie metai, kad, užrašę juos ant popieriaus skaitmenimis ir popierių apsukę viršutiniu kraštu žemyn, gautume skaičių, reiškiantį tuos pačius metus?

41. Du pokštai

a) Tėtis, paskambinęs dukrai, paprašė nupirkti kai ką iš daiktų, reikalingų jam kelionėje, ir pasakė, kad pinigai yra ant rašomojo stalo voke. Mergaitė prabėgom žvilgterėjo į voką ir, pamačiusi ant jo užrašytą skaičių 98, išėmė pinigus nesuskaičiavusi jų, įsidėjo į rankinuką, o voką su-

Krautuvėje ji pirko prekių už 90 rublių, o kada norėjo atsiskaityti, tai paaiškėjo, kad jai ne tik nelieka aštuonių rublių, kaip ji buvo maniusi, bet net trūksta keturių rublių. Namuose ji papasakojo apie tai tėčiui ir paklausė, ar kartais jis neapsirikęs, skaičiuodamas pinigus. Tėvas atsakė, kad jis pinigus suskaičiavęs teisingai, o apsirikusi ji pati, ir, linksmai juokdamasis, nurodė jos klaidą. Kokia buvo mergaitės klaida?

b) Paruoškite 8 popierėlius su surašytais skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 ir 9 ir sudėkite juos į du stulpelius (22 pieš.).



22 pieš.

Perdėdami iš viso tik du popierėlius, gaukite tai, kad abiejuose stulpeliuose skaičių suma būtų vienoda.

42. Kiek jų?

Berniukas turi tiek pat seserų, kiek ir brolių, o jo sesuo turi seserų du kartus mažiau kaip brolių.

Kiek toje šeimoje yra brolių ir seserų?

43. Kiek aš turiu metų?

Kada mano tėvas buvo 31 metų, aš buvau 8 metų, o dabar tėvas už mane vyresnis du kartus. Kiek dabar aš turiu metų?

44. Įvertinkite «iš pažiūros»

Prieš jus du skaičių stulpeliai:

123456789	1
12345678	21
1234567	321
123456	4321
12345	54321
1234	654321
123	7654321
12	87654321
1	987654321

Įsižiūrėkite: antrojo stulpelio skaičiai sudaryti iš tų pačių skaitmenų, kaip ir pirmojo stulpelio skaičiai, tik priešingai surašytų. (Kad būtų vaizdingiau, nuliai kairiame stulpelyje praleisti.)

Kuris stulpelis sudedant duos didesnį rezultatą?

Iš pradžių palyginkite tas sumas «iš pažiūros», tai yra, dar neatlikę sudėties, pabandykite nustatyti, ar turi būti jos vienodos, ar viena suma turi būti didesnė už antrą, o po to patikrinkite sudėdami.

45. Greitoji sudėtis

Aštuoni šešiaženkliai dėmenys

$$
+\begin{array}{r}
328\,645\\
491\,221\\
816\,304\\
117\,586\\
671\,355\\
508\,779\\
183\,696\\
882\,414\\
\hline
\end{array}
$$

parinkti taip, kad, išmaningai juos grupuojant, galima mintinai rasti sumą per 8 sekundes. Sugebėsite jūs tokiu greičiu?

«Atsakymuose» yra nurodymai, tačiau... jūs jų ilgiau ieškosite.

O savo draugams parodykite du pokštus, kuriuos juokais taip pat galite pavadinti «greitąja sudėtimi».

Pirmasis pokštas. Pasakykite: «Man nerodydami, parašykite stulpeliu tiek daugiaženklių skaičių, kiek jums patinka. Po to aš prieisiu, labai greit parašysiu dar tiek pat skaičių ir bematant visus juos sudėsiu».

Sakykim, draugai parašė:

7621
3057
2794
4518

O jūs prirašykite tokius skaičius, kurių kiekvienas atitinkamai papildo kiekvieną parašytą skaičių iki 9999. Tokie skaičiai bus:

5481
7205
6942
2378

Iš tikrųjų:

$$\begin{array}{r} 4518 \\ +\,5481 \\ \hline 9999 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2794 \\ +\,7205 \\ \hline 9999 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3057 \\ +\,6942 \\ \hline 9999 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7621 \\ +\,2378 \\ \hline 9999 \end{array}$$

Dabar nesunku suprasti, kaip galima greitai apskaičiuoti visą sumą:

$$+\left|\begin{array}{r} 7621 \\ 3057 \\ 2794 \\ 4518 \\ 5481 \\ 7205 \\ 6942 \\ 2378 \\ \hline \end{array}\right.$$

Reikia 9999 paimti 4 kartus, t. y. 9999 × 4, o tokia daugyba greitai atliekama mintinai. Padauginame 10 000 iš 4 ir atmetame atliekamus 4 vienetus. Gauname:

$$10\,000 \times 4 - 4 = 40\,000 - 4 = 39\,996.$$

Štai ir visa pokšto paslaptis!

Antrasis pokštas. Parašykite vieną po kitu kokius nors 2 bet kokio didumo skaičius. Aš prirašysiu trečią ir akimirksniu parašysiu iš kairės į dešinę visų trijų skaičių sumą.

Sakysim, jūs parašėte:

72 603 294
51 273 081

Aš prirašysiu, pavyzdžiui, tokį skaičių: 48 726 918 ir iš karto pasakysiu jums sumą.

Kokį skaičių reikia prirašyti ir kaip šiuo atveju greit rasti sumą, suvokite patys!

46. Kurioje rankoje? (matematinis pokštas)

Duokite savo draugui dvi monetas: vieną su lyginiu skaičiumi kapeikų, antrą — su nelyginiu (pavyzdžiui, dvikapeikę ir trikapeikę). Tegul jis, jums nerodydamas, vieną iš šių monetų (bet kurią) paims į dešinę ranką, o antrąją — į kairę. Jūs galite lengvai atspėti, kurioje jo rankoje kokia moneta yra.

Paprašykite jo p a t r i g u b i n t i kapeikų skaičių monetos, suspaustos d e š i n ė j e rankoje, ir p a d v i g u b i n t i kapeikų skaičių monetos, suspaustos k a i r ė j e rankoje. Gautus rezultatus tegul jis sudeda ir jums tepasako galutinę sumą.

Jeigu galutinė suma lyginė, tai 2 kapeikos dešinėje rankoje, jei — nelyginė, tai 2 kapeikos kairėje rankoje.

Paaiškinkite, kodėl visada taip atsitinka, ir sugalvokite, kaip šį pokštą galima paįvairinti.

47. Vienodais skaitmenimis

Naudodamiesi tik sudėties veiksmu, parašykite skaičių 28, panaudodami penkias dvejukes, o skaičių 1 000 — panaudodami aštuonias aštuoniukes.

48. Šimtas

Bet kokių aritmetinių veiksmų pagalba sudarykite skaičių 100 arba iš p e n k i ų v i e n e t ų, arba iš p e n k i ų p e n k i u k i ų. Tarp kita ko, iš penkių penkiukių 100 galima sudaryti dviem būdais.

49. Aritmetinė dvikova

Vienu metu mūsų mokyklos matematikos būrelyje buvo toks paprotys. Būrelio pirmininkas kiekvienam naujai įstojančiam į būrelį užduodavo nesudėtingą uždavinį — šiokį tokį matematinį riešutėlį. Išspręsi uždavinį — iš karto tapsi būrelio nariu, o neperkąsi riešutėlio, tai galėsi būrelyje dalyvauti laisvu klausytoju.

Pamenu, vienam naujokui Vitiai mūsų pirmininkas uždavė tokį uždavinį:

«Parašyta:
1 1 1
3 3 3
5 5 5
7 7 7
9 9 9

Pakeisti 12 skaitmenų nuliais taip, kad sudėjus būtų gauta 20». Vitia trumpai pagalvojo ir tuoj pat parašė:

$$+\begin{array}{r} 0\,1\,1 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,9 \\ \hline 20 \end{array} \quad \text{arba} \quad +\begin{array}{r} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,3 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,7 \\ 0\,0\,0 \\ \hline 20 \end{array}$$

Po to jis nusišypsojo ir tarė:

«Jeigu šiuose penkiuose triženkliuose skaičiuose pakeistume nuliais tik 9 tam tikrus skaitmenis, tai sudėjus gautume 1111. Pabandykite!»

Būrelio pirmininkas neilgam sumišo, tačiau tuoj drąsiai ėmėsi skaičiavimo. Jis skolingas neliko. Ne tik išsprendė Vitios uždavinį, bet net atrado dar vieną jo variantą:

«Šiuose penkiuose triženkliuose skaičiuose,— tarė jis,— galima pakeisti nuliais ne 9, o tik 8 skaitmenis, suma liks ta pati, t. y. 1111».

Atėjo eilė susimąstyti Vitiai. Būrelio nariai susidomėję stebėjo staiga iškilusią aritmetinę «dvikovą». Vitia perkando

ir šį riešutą ir, visų dalyvaujančių pasitenkinimui, atrado naują uždavinio tęsinį:

«Galima duotuose penkiuose triženkliuose skaičiuose pakeisti nuliais ne 9 ir ne 8, bet tik 6 skaitmenis, o suma pasiliks vis ta pati — 1111». Matematikos mokytojas pagyrė abu dvikovos dalyvius ir pasakė, kad galima išsaugoti sumą 1111, pakeičiant nuliais ne 9, ne 8 ir netgi ne 6 skaitmenis, o tik 5.

Atraskite visų keturių šio uždavinio variantų sprendimus. Sugalvokite analogišką uždavinį su skaičiais, susidedančiais ne iš trijų, o iš penkių vienetų, trejukių, penkiukių, septyniukių ir devyniukių.

50. Dvidešimt

Iš keturių nelyginių skaičių lengva sudaryti sumą, lygią 10, būtent:

$$1+1+3+5=10,$$

arba taip:

$$1+1+1+7=10.$$

Galimas ir trečias sprendinys:

$$1+3+3+3=10.$$

Kitų sprendinių nėra (dėmenų eilės pakeitimas, aišku, nesudaro naujų sprendinių).

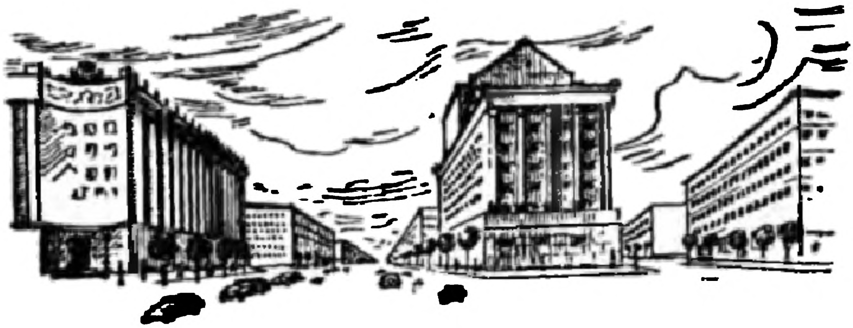
Žymiai daugiau skirtingų sprendinių turi toks uždavinys:

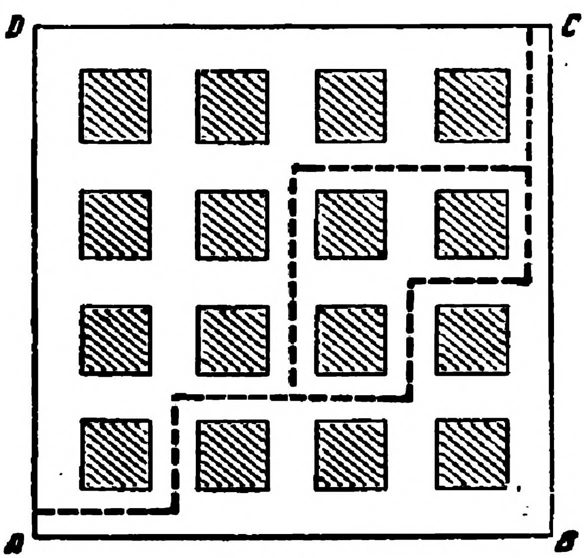
Sudaryti skaičių 20, sudedant lygiai aštuonis nelyginius skaičius, kurių tarpe gali būti ir vienodi dėmenys. Atraskite visus galimus šio uždavinio sprendinius ir nustatykite, kiek jų tarpe bus tokių sumų, kurios apims didžiausią nevienodų dėmenų skaičių?

Mažas patarimas. Jei jūs skaičius rinksite atsitiktinai, tai ir šiuo atveju susidursite su keletu sprendinių, tačiau nesistemingi mėginimai neleis įsitikinti, ar jūs suradote visus sprendinius. Jeigu «mėginimų metode» jūs įvesite tam tikrą tvarką, sistemą, tai nė vienas iš galimų sprendinių neliks jūsų nepastebėtas.

51. Kiek maršrutų?

Iš mokinių laiško: «Užsiiminėdami matematikos būrelyje, mes nubraižėme savo miesto šešiolikos kvartalų planą. Pridedamoje plano schemoje (23 pieš.) visi kvartalai sutartinai pažymėti vienodais kvadratais. Mus sudomino toks klausimas:





23 pieš.

Kiek galima numatyti iš punkto *A* į punktą *C* s k i r t i n g ų maršrutų, jeigu mūsų miesto gatvėmis judėtume tiktai pirmyn ir dešinėn, dešinėn ir pirmyn? Atskiromis savo dalimis maršrutai gali sutapti (žr. punktyrines linijas plano schemoje).

Pas mus susidarė nuomonė, kad tai nelengvas uždavinys.

Ar teisingai mes jį išsprendėme, jei suskaičiavome 70 skirtingų maršrutų?»

52. Įvairūs veiksmai, vienas rezultatas

Jei tarp dviejų dvejukių sudėties ženklą pakeistume daugybos ženklu, tai rezultatas nepasikeistų. Iš tikrųjų: $2+2=2\times2$. Nesunku parinkti ir 3 skaičius, turinčius tą pačią savybę, būtent: $1+2+3=1\times2\times3$. Yra ir 4 vienaženkliai skaičiai, kuriuos sudėdami arba sudaugindami, gauname tą patį rezultatą.

Kas greičiau parinks tuos skaičius? Baigta? Tęskite varžybas! Raskite 5, o po to 6, paskui 7 ir t. t. vienaženklius skaičius, turinčius tą pačią savybę. Be to, turėkite galvoje tai, kad, pradedant grupe iš 5 skaičių, gali būti keli skirtingi atsakymai.

53. Devyniasdešimt devyni ir šimtas

Persirašykite į savo sąsiuvinį skaičių 987 654 321 ir sugalvokite, kiek reikia padėti tarp šio skaičiaus skaitmenų ženklų «plius» (+), kad suma būtų lygi 99.

Galimi du sprendiniai. Teks, aišku, pavargti, kol surasite nors vieną iš jų, bet užtat, kada surasite sprendinį, įgytas patyrimas jums padės žymiai greičiau sudėlioti ženklus «plius» tarp septynių sveikų skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, kad suma būtų 100.

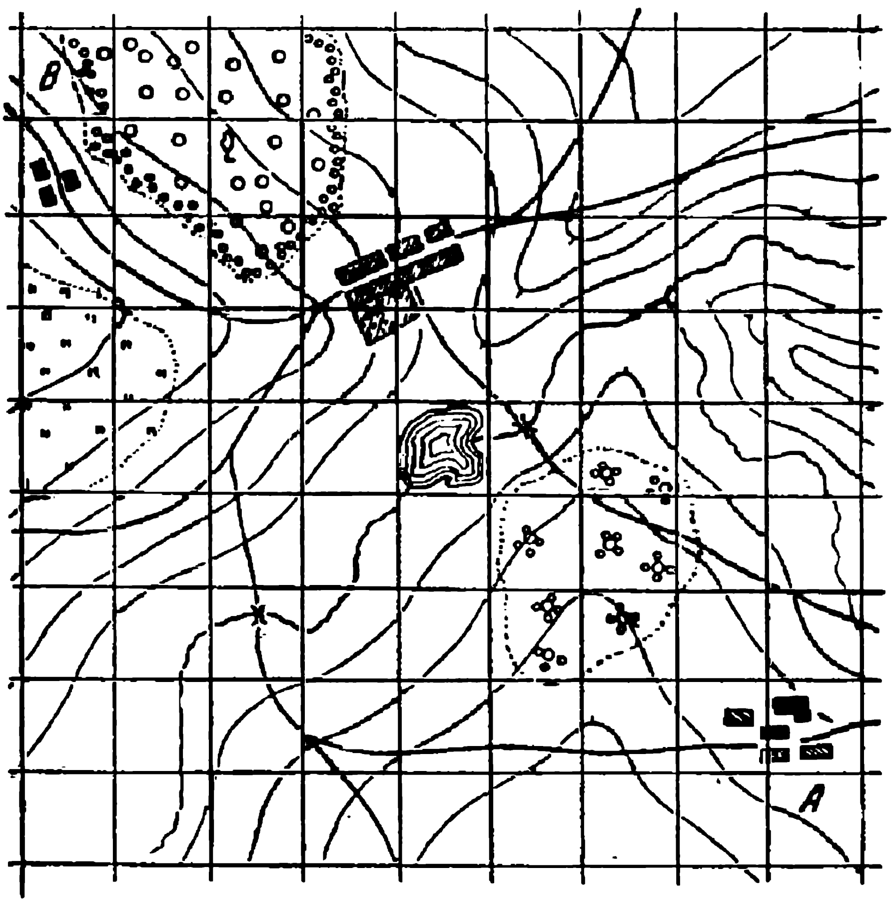
Skaitmenų išdėstymo keisti negalima.

54. Minų ieškojimas

Baigęs lauko užsiėmimus su suvoroviečių grupe, pulkininkas nusprendė savo auklėtiniams pasiūlyti uždavinį buklumui lavinti. Jis išėmė žemėlapį, nubraižytą ant kvadratų (24 pieš.), ir tarė:

«Du pionieriai su minų ieškojimo aparatais turi ištirti šitą lauką ir priešo minas padaryti nekenksmingomis. Dėl to būtina apeiti visus lauko kvadratėlius, išskyrus centrinį,

kurį užima nedidelė kūdra. Į tą laukelį, kuriame vienas iš pionierių buvo užsukęs, antram eiti nereikia. Judėti galima tik horizontaliai arba vertikaliai, judėti diagonalėmis negalima. Vienas pionierius savo maršrutą pradeda nuo



24 pieš.

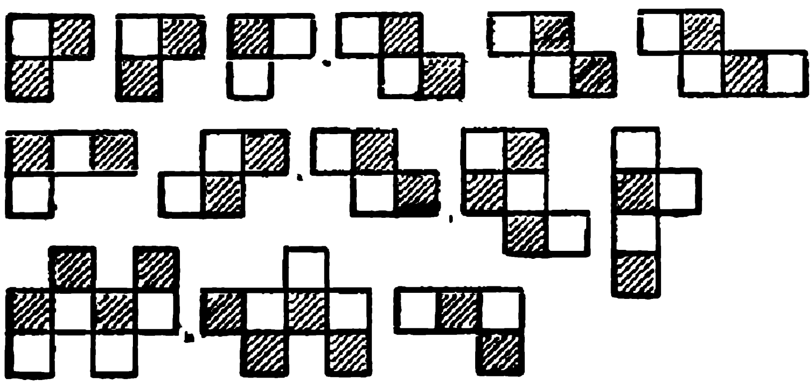
laukelio *A* ir išeina į laukelį *B*, antras — pradeda nuo laukelio *B* ir išeina į laukelį *A*. Siūlau taip numatyti pionierių galimus maršrutus, kad kiekvienas pionierius praeitų vienodą skaičių laukelių».

Suvoroviečiai persibraižė planą į sąsiuvinius ir per trumpą laiką sėkmingai įvykdė duotą uždavinį. Pulkininkas juos pagyrė už jų buklumą.

Išspręskite ir jūs pulkininko uždavinį.

55. Išardoma šachmatų lenta

Vienas linksmas šachmatininkas supiaustė savo kartoninę šachmatų lentą į 14 dalių, kaip parodyta 25 piešinyje. Gavo išardomą šachmatų lentą. Atėjusiems pas jį draugams sulošti šachmatais jis pradžioje pasiūlydavo galvosūkį: iš duotų 14 dalių sudėti šachmatų lentą.



25 pieš.

Iškirpkite iš languoto popieriaus tokias pačias figūrėles ir įsitikinkite patys — sunku ar lengva iš jų sudėti šachmatų lentą.

56. Sustojo laikrodis

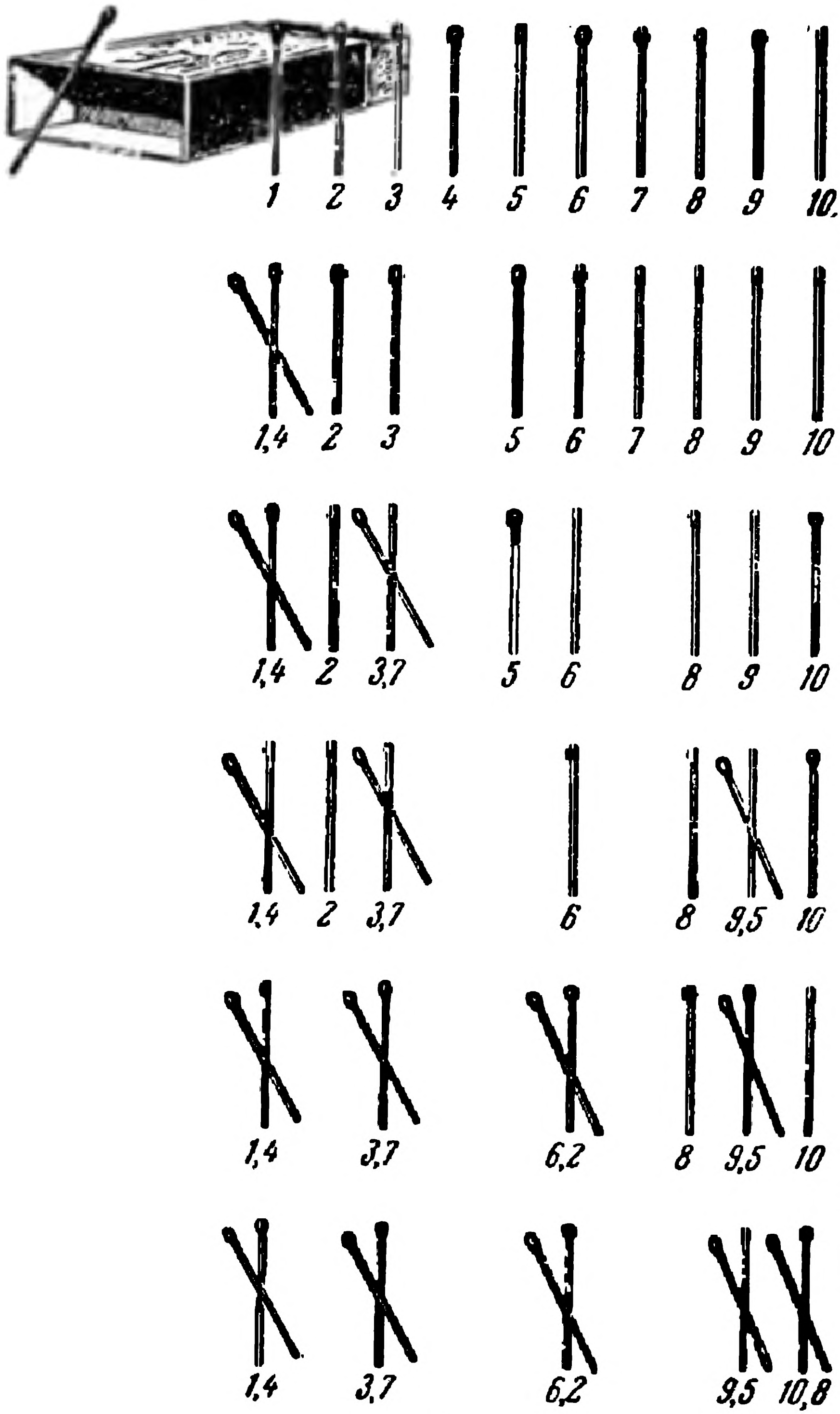
Kišeninio laikrodžio aš neturiu, o turiu tik sieninį, kuris sustojo. Nuvykstu pas savo pažįstamą, kurio laikrodis rodo teisingą laiką, pasėdžiu pas jį kurį laiką ir, grįžęs namo, tiksliai nustatau savo laikrodį.

Kokiu būdu man pavyko tai padaryti, jei iš anksto man nebuvo žinoma, kiek laiko reikia užtrukti kelyje?

57. Sugrupuoti po 2

Dešimt degtukų guli eilėje. Aš galiu juos surinkti į 5 poras, kiekvieną kartą peršokdamas vienu degtuku per 2, pavyzdžiui, taip, kaip parodyta 26 piešinyje.

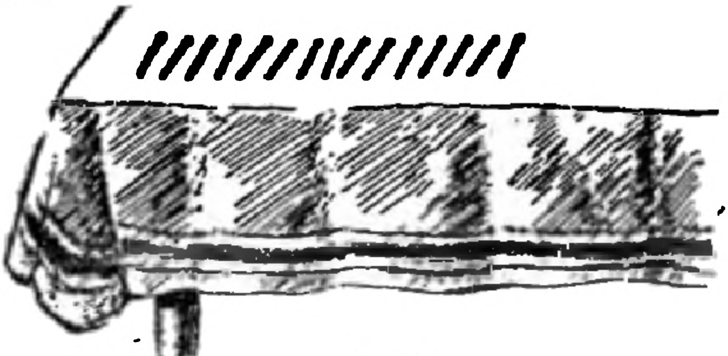
Prisilaikydami tų pačių sąlygų, raskite visai kitą duotų degtukų sugrupavimo į 5 poras būdą.


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10.
1,4 2 3 5 6 7 8 9 10
1,4 2 3,7 5 6 8 9 10
1,4 2 3,7 6 8 9,5 10
1,4 3,7 6,2 8 9,5 10
1,4 3,7 6,2 9,5 10,8

26 pieš.

58. Sugrupuoti po 3

Penkiolika degtukų guli eilėje (27 pieš.). Reikia surinkti juos į 5 grupes po 3 degtukus kiekvienoje. Degtukus perkelti po vieną, kiekvieną kartą peršokant per gretimus 3 degtukus.



27 pieš.

Šis uždavinys sunkesnis už buvusį; išspręskite jį dešimčia perdėjimų. Kad galėtumėte palyginti savo sprendimą su atsakymu, užrašykite degtukų perdėjimo tvarką.

59. Keturi aritmetikos veiksmai

Prieš jus 7 eilutės iš eilės einančių skaitmenų:

1 2 3 = 1

1 2 3 4 = 1

1 2 3 4 5 = 1

1 2 3 4 5 6 = 1

1 2 3 4 5 6 7 = 1

1 2 3 4 5 6 7 8 = 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

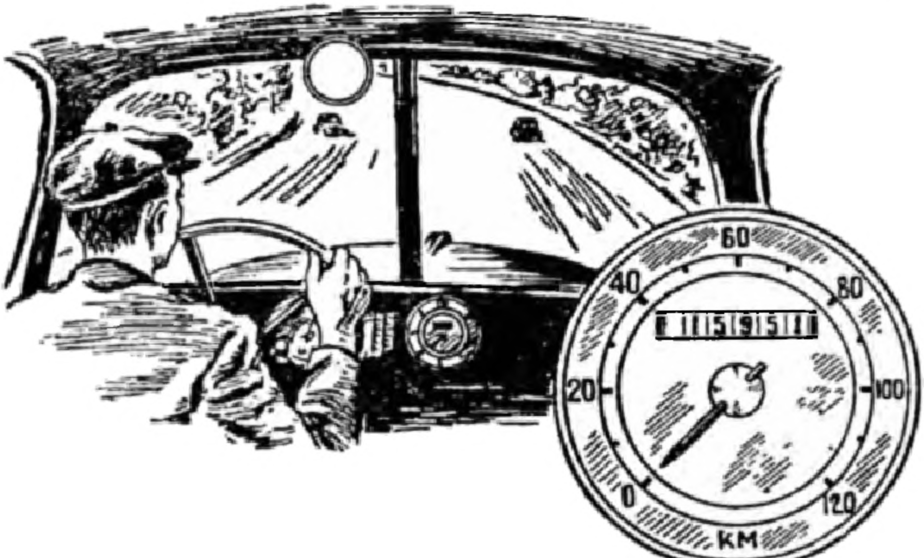
Nekeisdami skaitmenų išdėstymo tvarkos, sužymėkite tarp jų aritmetikos veiksmų ženklus su tokiu išskaičiavimu,

kad, atlikę tuos veiksmus, kiekvienoje eilutėje gautumėte po 1. Veiksmai turi būti atliekami eilės tvarka — iš kairės į dešinę; tuo būdu, sudėtis, pavyzdžiui, gali eiti pirma daugybos. Šiuo atveju, kaip jūs žinote, užrašant reikia naudoti skliaustus.

Jei prireiks, tai du greta stovinčius skaitmenis galite laikyti dviženkliu skaičiumi.

60. Nustebintas šoferis

Apie ką galvojo šoferis, kai jis pažiūrėjo į savo mašinos skaitiklį (28 pieš.)? Skaitiklis rodė skaičių 15 951. Jis pa-



28 pieš.

stebėjo, kad mašinos pravažiuotų kilometrų skaičius buvo išreikštas simetriniu skaičiumi, t. y. tokiu, kuris buvo toks pat, skaitant iš kairės į dešinę, kaip ir iš dešinės į kairę:

15 951.

— Įdomu! .. — sumurmėjo šoferis. — Dabar, tikriausiai, negreit skaitiklyje pasirodys kitas skaičius, turįs tokią pat savybę.

Tačiau lygiai po 2 valandų skaitiklis parodė naują skaičių, kuris taip pat, skaitant iš abiejų pusių, reiškė tą patį. Raskite, kokiu greičiu šias dvi valandas važiavo šoferis?

61. Cimlianskos hidromazgui

Atliekant skubų užsakymą, gaminant Cimlianskos hidromazgui matavimo prietaisus, dalyvavo puikios kokybės brigada, kuri susidėjo iš brigadininko — seno, patyrusio darbininko — ir 9 jaunų, ką tik baigusių amatų mokyklą, darbininkų.

Per dieną kiekvienas iš jaunųjų darbininkų sumontuodavo po 15 prietaisų, o brigadininkas — 9 prietaisais daugiau, negu vidutiniškai kiekvienas iš dešimties brigados narių. Kiek iš viso matavimo prietaisų brigada sumontuodavo per vieną darbo dieną?

62. Laiku pristatyti grūdus

Pradėjus grūdų pristatymą valstybei, kolūkio valdyba nusprendė ešeloną su grūdais į miestą pristatyti tiksliai 11 valandą ryto. Jei mašinos važiuos 30 *km/val* greičiu, tai kolona į miestą atvyks 10 val. ryto, o jei 20 *km/val* greičiu, tai 12 val. dienos.

Kaip toli kolūkis nuo miesto ir kokiu greičiu reikia važiuoti, norint atvykti laiku?

63. Vasarotojai traukinyje

Elektrinio traukinio vagone iš miesto važiavo vasaroti dvi draugės-mokinės.

— Aš pastebiu,— tarė viena iš draugių,— kad su grįžtančiais vasarvietės traukiniais mes prasilenkiame kas 5 minutės. Kaip tu manai, kiek vasarvietės traukinių atvyksta į miestą per vieną valandą, jei traukinių greičiai abiem kryptimis vienodi?

— Aišku, 12, nes $60:5=12$,— atsakė antroji draugė.

Bet mokinė, uždavusi klausimą, nesutiko su draugės sprendimu ir išdėstė jai savo samprotavimus.

O kaip jūs galvojate šiuo klausimu?

64. Nuo 1 iki 1 000 000 000

Pasakojama, kad kai 9-mečiui Gausui* mokytojas pasiūlė rasti visų sveikų skaičių nuo 1 iki 100 sumą, 1 + 2 + + 3 + . . . + 98 + 99 + 100, tai mažasis Gausas pats sugalvojo, kuriuo būdu per trumpą laiką galima atlikti šią sudėtį.

Reikia sudėti pirmąjį skaičių su paskutiniuoju, antrąjį su priešpaskutiniuoju ir t. t. Kiekvienos tokios skaičių poros suma lygi 101, ir ji pasikartoja 50 kartų.

Vadinasi, visų sveikų skaičių nuo 1 iki 100 suma bus lygi 101 × 50 = 5 050.

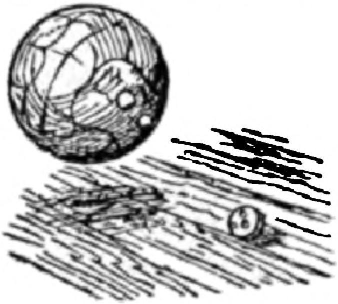
Tą patį būdą panaudokite spręsti daug sunkesniam uždaviniui.

Rasti visų sveikų skaičių nuo 1 iki 1 000 000 000 visų s k a i t m e n ų sumą.

Atkreipkite dėmesį: čia kalbama ne apie s k a i č i ų sumą, o apie visų skaičių s k a i t m e n ų sumą!

65. Baisus futbolo mėgėjo sapnas

Futbolo mėgėjas, sujaudintas «savo» komandos pralaimėjimo, neramiai miegojo. Jis sapnavo didžiulį, be baldų, kvadratinį kambarį. Kambary treniravosi vartininkas. Jis spirdavo futbolo kamuolį į sieną ir atšokusį gaudydavo.



29 pieš.

Staiga vartininkas pradėjo mažėti, mažėti ir pagaliau pavirto į mažą celiulioidinį stalo teniso sviedinuką, o futbolo kamuolys pasidarė špižiniu rutuliu. Rutulys pašėlusiai ritinėjosi lygiomis kambario grindimis, stengdamasis sumaigyti mažąjį celiulioidinį sviedinuką (29 pieš.). Vargšas sviedinukas lakstė nuo vieno krašto prie kito, nebetekdamas jėgų ir nebeįstengdamas pašokti.

Ar jis gali, neatsiplėšdamas nuo grindų, vis dėlto kur nors pasislėpti nuo špižinio kamuolio persekiojimų?

---

* K. F. Gausas (1777—1855) — žymus vokiečių matematikas.

II POSKYRIS

Antrojo poskyrio uždaviniams spręsti reikia būti susipažinusiam su paprastųjų ir dešimtainių trupmenų veiksmais.

Skaitytojas, dar nesimokęs trupmenų, šio poskyrio uždavinius laikinai gali praleisti ir pereiti prie tolesnio skyriaus.

66. Laikrodis

Bekeliaudamas po mūsų didžiąją ir nuostabiąją Tėvynę, aš pakliūdavau į tokias vietas, kur oro temperatūrų skirtumas dieną ir naktį buvo toks didelis, kad, kai aš dieną ar naktį būdavau atvirame ore, mano laikrodžio ėjimas keisdavosi. Aš pastebėdavau, kad nuo temperatūrų pokyčio dieną laikrodis užbėgdavo $\frac{1}{2}$ minutės pirmyn, o naktį $\frac{1}{3}$ minutės atsilikdavo.

Gegužės 1 dienos rytą laikrodis dar rodė tikslų laiką. Kurią dieną laikrodis skubės 5 minutėmis?

67. Laiptai

Namas turi 6 vienodo aukščio aukštus. Pasakykite, kiek kartų laiptai į šeštą aukštą ilgesni už laiptus į trečią aukštą?

68. Galvosūkis

Kokį ženklą reikia parašyti tarp greta parašytų skaitmenų 2 ir 3, kad būtų gautas skaičius, didesnis už du, bet mažesnis už tris?

69. Įdomios trupmenos

Jei prie trupmenos $\frac{1}{3}$ skaitiklio ir vardiklio pridėtume vardiklį, tai trupmena padidėtų dvigubai.

Raskite tokią trupmeną, kuri, skaitiklį ir vardiklį padidinus jos vardikliu, padidėtų: a) trigubai, b) keturgubai.

(Susipažinusieji su algebra gali uždavinį apibendrinti ir išspręsti jį lygčių pagalba.)

70. Koks skaičius?

Pusė — jo trečdalis. Koks tai skaičius?

71. Mokinio kelias

Kiekvieną rytą Boria nueina gan ilgą kelią į mokyklą. Nuo namų iki mokyklos kelio ketvirtadalyje yra MTS rūmai su elektriniu laikrodžiu fasade, o trečdalyje kelio — geležinkelio stotis. Kada jis praeidavo pro MTS, tai laikrodis rodydavo 7 val. 30 min., o kai jis ateidavo prie stoties, tai laikrodis rodydavo be 25 minučių aštuonias.

Kurią valandą Boria ateidavo į mokyklą?

72. Stadione

Šalia bėgimo tako susmaigstyta viena nuo kitos vienodais tarpais 12 vėliavėlių. Startas prie pirmosios vėliavėlės. Prie aštuntosios vėliavėlės sportininkas buvo po 8 sekundžių nuo bėgimo pradžios. Per kiek sekundžių, bėgdamas vienodu greičiu, jis atsiras prie dvyliktosios vėliavėlės?

Neapsirikite!

73. Namo!

Ostapas iš Kijevo keliavo namo. Pirmąją kelio pusę jis važiavo traukiniu 15 kartų greičiau, negu būtų ėjęs pėsčias. Tačiau antrąją kelio pusę jam teko keliauti jaučiais — 2 kartus lėčiau, negu jis būtų ėjęs pėsčiomis.

Ar Ostapas laimėjo nors kiek laiko palyginus su tuo, jei būtų ėjęs pėsčias?

74. Žadintuvas

Žadintuvas pavėluoja kas valanda po 4 min. Prieš $3\frac{1}{2}$ valandos jis buvo tiksliai nustatytas. Šiuo metu tikslus laikrodis rodo lygiai 12.

Po kelių minučių žadintuvas taip pat rodys 12?

75. Stambios dalys vietoje smulkių

Mašinų gamyklose yra labai įdomi profesija; vadinasi ji — nužymėtojo profesija. Nužymėtojas ant ruošinio pažymi tas linijas, pagal kurias tą ruošinį reikia apdirbti, norint suteikti jam reikiamą formą.

Nužymėtojui tenka spręsti įdomius ir kartais sunkokus geometrinius uždavinius, atlikti aritmetinius skaičiavimus ir t. t.

Kartą prireikė 7 vienodas stačiakampes plokšteles paskirstyti lygiomis dalimis dvylikai detalių. Atnešė tas 7 plokšteles nužymėtojui ir paprašė jo, jeigu galima, nužymėti plokšteles taip, kad neprireiktų nė vienos iš jų piaustyti į labai smulkias dalis. Vadinasi, paprasčiausias sprendimas — kiekvieną plokštelę suraižyti į 12 lygių dalių — netiko, nes tada būtų daug smulkių dalių.

Ką daryti?

Ar įmanoma duotąsias plokšteles padalyti į didesnes dalis? Nužymėtojas pagalvojo, atliko kai kuriuos aritmetinius skaičiavimus su trupmenomis ir vis tik surado patį ekonomiškiausią tų plokštelių padalijimo būdą.

Vėliau jis lengvai smulkino 5 plokšteles, paskirstydamas jas lygiomis dalimis šešioms detalėms, 13 plokštelių — dvylikai detalių, 13 plokštelių — trisdešimt šešioms detalėms, 26 — dvidešimt vienai ir t. t.

Kaip nužymėtojas pasielgė?

76. Muilo gabalas

Ant vienos svarstyklių lėkštelės padėtas muilo gabalas, ant antros — $\frac{3}{4}$ tokio pat gabalo ir dar $\frac{3}{4}$ *kg*. Svarstyklės pusiausvyroje.

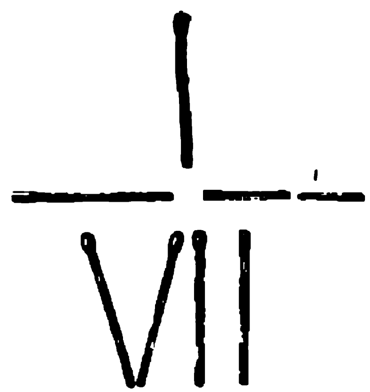
Kiek sveria muilo gabalas?

77. Aritmetiniai riešutėliai

1) Parašyti dviem skaitmenimis mažiausią sveiką teigiamą skaičių.

2) Parašyti 100 šešiais vienodais skaitmenimis.

3) Parašyti 55, panaudojant tik penkias ketveriukes.
4) Parašyti 20 keturių devyniukių pagalba.
5) Iš septynių degtukų sudėtas toks skaičius:



t. y. $\frac{1}{7}$.

Paversti šią trupmeną į skaičių $\frac{1}{3}$, nepridedant ir neatimant degtukų.

6) Parašyti 20, panaudojant tik skaitmenis 1, 3, 5 ir 7, be to, kiekvieną iš jų būtinai po 3 kartus.

7) Dviejų skaičių, sudarytų iš skaitmenų 1, 3, 5, 7 ir 9, suma lygi dviejų skaičių, sudarytų iš skaitmenų 2, 4, 6 ir 8, sumai.

Parašykite tuos skaičius, panaudodami kiekvieną skaitmenį po vieną kartą.

P a s t a b a. Čia nėra jokio reikalo panaudoti netikrąsias trupmenas.

8) Kokie 2 skaičiai, padauginus vieną iš kito ir atėmus vieną iš kito, duoda tą patį rezultatą?

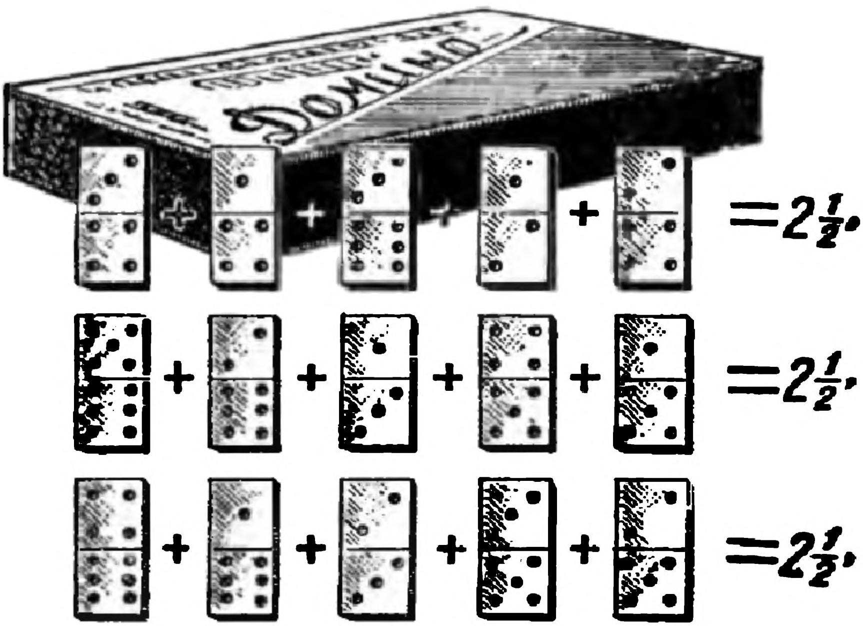
Tokių skaičių porų nesuskaitomai daug.

9) Iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 reikia sudaryti dvi lygias trupmenas, kurių suma būtų lygi 1. Panaudoti reikia būtinai visus skaitmenis ir, be to, kiekvieną iš jų tik po vieną kartą.

10) Panaudojant kiekvieną iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 po vieną kartą, sudaryti tokius mišriuosius skaičius, kurių suma būtų 100. (Galimi keli sprendiniai.)

78. Trupmenos — dominas

Iš domino dėžutės išimkite visas plyteles, kurių abi dalys turi po vienodą skaičių akių (dubliai), ir plyteles, neturinčias akių bent vienoje kurioje dalyje (blanšai). Likusias 15 plytelių galima laikyti trupmenomis ir sustatyti jas į šias 3 eilutes (30 pieš.):



30 pieš.

Įdomu, kad, perstatinėjant šias 15 domino plytelių, galima sudaryti tokias trupmenų eilutes, kurių suma bus sveikas skaičius.

Panaudodami kai kurias plyteles kaip netikrąsias trupmenas, pavyzdžiui, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{1}$ ir t. t., sustatykite visas 15 plytelių į tris eilutes, po 5 plyteles kiekvienoje, bet taip, kad trupmenų suma kiekvienoje eilutėje būtų lygi skaičiui 10. Teks, aišku, pagalvoti bei pasipraktikuoti.

Kokius skaičius, be nurodytųjų šiame uždavinyje, jums pavyktų gauti, domino plyteles sustatant į tris eilutes ir atitinkamas trupmenas sudedant?

79. Mišos kačiukai

Pamatys Miša kur nors pamestą kačiuką, būtinai pakels ir parneš namo. Jis visuomet augina keletą kačiukų, o kiek būtent, jis nemėgsta sakyti, kad iš jo nepasijuoktų.

Būdavo paklausia jo:

— Kiek dabar pas tave tų kačiukų?

— Nedaug,— atsako jis.— Trys ketvirtadaliai jų skaičiaus, prie to dar trys ketvirtadaliai vieno kačiuko, štai ir visi mano kačiukai.

Draugai galvojo, kad jis tik juokauja. O iš tikrųjų Miša jiems uždavė uždavinį, kurį išspręsti nesunku.

Pabandykite!

80. Vidutinis greitis

Arklys pusę kelio ėjo be krovinio, 12 *km/val* greičiu. Likusį kelią jis traukė krovinį, eidamas 4 *km/val.*

Koks vidutinis greitis, t. y. kokiu nesikeičiančiu greičiu reikėjo judėti arkliui, kad visam keliui būtų sugaišta tiek pat laiko?

81. Miegantis keleivis

Kai keleivis pravažiavo pusę viso kelio, tada užmigo ir tol miegojo, kol beliko važiuoti pusę to kelio, kurį jis pravažiavo miegodamas. Kokią dalį viso kelio jis pravažiavo miegodamas?

82. Koks traukinio ilgis?

Du traukiniai važiuoja vienas prieš kitą lygiagrečiais keliais; vienas 36 *km/val* greičiu, antras 45 *km/val* greičiu. Keleivis, sėdintis antrajame traukinyje, pastebėjo, kad pirmasis traukinys pro jį pravažiavo per 6 sekundes.

Koks pirmojo traukinio ilgis?

83. Dviratininkas

Kai dviratininkas pravažiavo $^2/_3$ kelio, sprogo padanga. Likusią kelio dalį eidamas pėsčias, jis sugaišo dukart daugiau laiko, negu važiuodamas dviračiu.

Kiek kartų greičiau dviratininkas važiavo, negu ėjo?

84. Lenktynės

Tekintojai Volodia A. ir Kostia B.— metalistų amatų mokyklos mokiniai, gavę iš meistro po vienodą paskyrą detalių partijai paruošti, įsipareigojo užduotį įvykdyti vienu metu ir prieš laiką, dirbdami kiekvieną dieną po lygiai.

Po kurio laiko paaiškėjo, kad Kostia padarė pusę to, kas liko padaryti Volodiai, o Volodiai liko padaryti pusę to, ką jis jau padarė.

Kiek kartų dabar turėtų padidinti savo dienos išdirbį Kostia, palyginus su Volodia, kad vienu metu su juo suspėtų įvykdyti savo paskyrą?

85. Kuri teisi?

Maša sprendė aritmetikos uždavinį. Paskutiniuoju veiksmu reikėjo nustatyti žemės darbų kiekį, o tam reikėjo rasti trijų skaičių sandaugą.

Maša sėkmingai sudaugino pirmuosius du skaičius ir jau buvo besirengianti gautąjį rezultatą dauginti iš trečiojo skaičiaus, kai staiga pastebėjo, kad antrąjį dauginamąjį ji buvo neteisingai užrašiusi; jis pasirodė didesnis už tą skaičių, kuriuo turėtų būti pagal sąlygą, $\frac{1}{3}$ jo dydžio. Tada Maša, kad iš naujo nereikėtų perdirbti jau atlikto veiksmo, nusprendė, jog visvien gaus teisingą rezultatą, jei dabar trečiąjį dauginamąjį, juo labiau kad jis buvo lygus antrajam dauginamajam, prieš sudaugindama sumažins $\frac{1}{3}$ jo paties dydžio.

— Taip elgtis negalima,— tarė jai draugė,— tuo tu apsiriksi 20-čia kubinių metrų.

— Koks čia gali būti apsirikimas? — prieštaravo Maša. — Jei vieną skaičių aš padidinau, o antrą, jam lygų, tiek pat sumažinau, tai aš manau, kad jų sandauga nepasikeitė.

Kuri teisi?

Ir ar jūs negalėsite, pasinaudodami duotaisiais duomenimis, rasti uždavinio sprendimą?

86. Vakarienei — 3 apkeptos riekutės

Mama labai skaniai apkepa duonos riekutes, naudodamasi specialia maža keptuvėle. Apkepusi kiekvienos riekutės vieną šoną, ji apverčia riekutę ant kito šono. Riekutės kiekvienas šonas apkepa per 30 sekundžių, o be to, keptuvėlėje kartu telpa tik dvi riekutės.

Suvokite, kokiu būdu, esant toms sąlygoms, mama apkepa abu trijų riekučių šonus tik per $1^1/_2$ minutės, o ne per 2, ir jūs gausite vakarienei 3 skanias apkeptas riekutes.

ANTRASIS SKYRIUS

KEBLIOS PADĖTYS

87. Kalvio Chečo buklumas

Praeitą vasarą keliaudami po Gruziją, mes retkarčiais pramogai sugalvodavome įvairiausių nepaprastų istorijų, kurioms mintį duodavo koks nors senų laikų paminklas.

Štai kartą mes atėjome prie vienišo senovinio bokšto. Apžiūrėjome jį, susėdome pasilsėti. O mūsų tarpe buvo studentas matematikas; jis tuoj pat sugalvojo įdomų uždavinį:

«Prieš 300 metų čia gyveno piktas ir išdidus kunigaikštis. Jis turėjo dukterį nuotaką, vardu Daridžana. Kunigaikštis pažadėjo išleisti savo Daridžaną už turtingo kaimyno, o ji pamilo paprastą vaikiną, kalvį Chečo. Bandė Daridžana ir Chečo nuo vergovės pabėgti į kalnus, bet kunigaikščio tarnai sugavo juos.

Įtūžo kunigaikštis ir nusprendė kitą rytą juos abu nužudyti, o nakčiai įsakė juos uždaryti štai į tą aukštą, niūrų bokštą (31 pieš.), kartu su jais ir Daridžanos tarnaitę, mergaitę-paauglę, padėjusią jiems bėgti.

Nesumišo bokšte Chečo, apsidairė, palypėjo laiptukais į viršutinę bokšto dalį, pro langą pažvelgė — nušokti neįmanoma — užsimuši. Čia Chečo pastebėjo prie lango virvę, permestą per surūdijusį skridinį, įtvirtintą aukščiau lango. Prie virvės galų buvo pririštos tuščios pintinės, po vieną prie kiekvieno galo. Chečo prisiminė, kad su šių pintinių pagalba mūrininkai keldavo į viršų plytas, o į apačią leisdavo skaldą ir, jei krūvio, esančio vienoje pintinėje, svoris viršydavo maždaug 5—6 *kg* (pervedus į šiuolaikinius

matus) krūvio svorį kitoje, tai pintinė gana sklandžiai nusileisdavo ant žemės; tuo laiku antroji pintinė pakildavo



31 pieš.

iki lango. Rūstaudamas kunigaikštis, matyt, užmiršo, kad bokštas nebaigtas statyti.

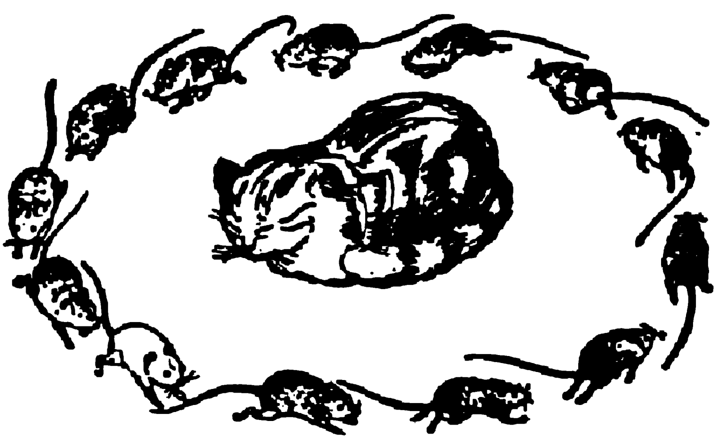
Chečo «iš akies» nustatė, kad Daridžana sveria apie 50 *kg*, tarnaitė ne daugiau kaip 40 *kg*. Savo svorį Chečo žinojo — apie 90 *kg*. Be to, bokšte jis surado 30 kg svorio

grandinę. Kadangi kiekvienoje pintinėje galėjo tilpti žmogus ir grandinė, arba netgi 2 žmonės, tai jiems visiems trims pavyko nusileisti ant žemės. Ir leidosi jie taip, kad su žmogumi nusileidžiančios pintinės svoris nė karto neviršijo kylančios pintinės svorio daugiau kaip 10 *kg*.

Kaip jie nusileido žemyn?»

88. Katinas ir pelės

Šis katinas (32 pieš.) ką tik «padėjo» savo jaunajai šeimininkei spręsti uždavinius. Dabar jis saldžiai snaudžia, o sapne mato save, apsuptą trylikos pelių. Dvylika pelių



32 pieš.

pilkų, o viena — balta. Ir girdi katinas: kažkas pažįstamu balsu kalba:

«Murkiau, tu turi suėsti kiekvieną tryliktą pelę, skaičiuodamas jas visą laiką ratu viena kryptimi taip, kad paskutinioji suėsta būtų baltoji pelė».

Susimąstė katinas, nuo kurios pelės pradėti skaičiavimą, kad uždavinys būtų teisingai išspręstas.

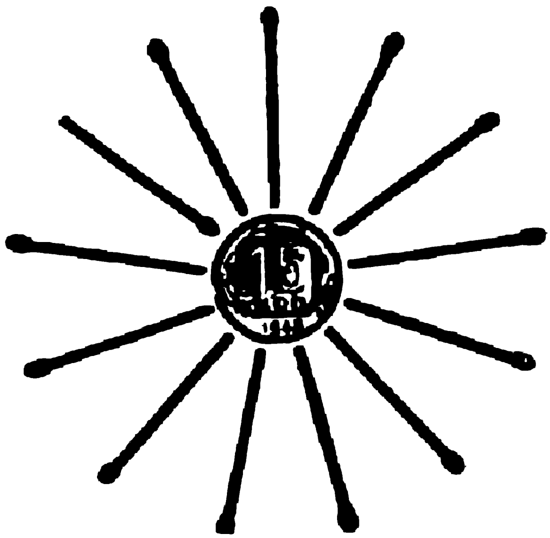
Padėkite jam.

89. Degtukai aplink monetą

Pakeiskime katiną moneta, o peles — degtukais (33 pieš.). Reikia nurinkti visus degtukus, išskyrus tą, kuris nukreiptas galvute į monetą, prisilaikant tokios sąlygos: iš pra-

d ž i ų p a i m t i v i e n ą d e g t u k ą, o po to, judant į dešinę ratu, paimti kiekvieną tryliktą degtuką.

Suvokite, kurį iš degtukų reikia paimti pirmiausia.



33 pieš.

90. Burtas krito alksniniam dagilėliui ir liepsnelei

Pionieriai vasaros stovyklavimo pabaigoje nusprendė paleisti laisvėn jaunųjų paukštininkų sugaudytus sparnuotus laukų ir gojų gyventojus. Viso buvo 20 atskiruose narveliuose uždarytų paukščių. Vadovas pasiūlė tokią tvarką:

— Reikia sustatyti visus narvelius su paukščiais į vieną eilę ir, pradedant iš kairės į dešinę, atidaryti kiekvieną penktąjį narvelį. Priėjus eilės galą, skaičiavimą tęsti nuo eilės pradžios ir taip iki tol, kol nebus atidaryti visi, išskyrus kažkuriuos du paskutinius narvelius. Paukščius, esančius tuose narveliuose, galima pasiimti su savim į miestą.

Pasiūlymas buvo priimtas.

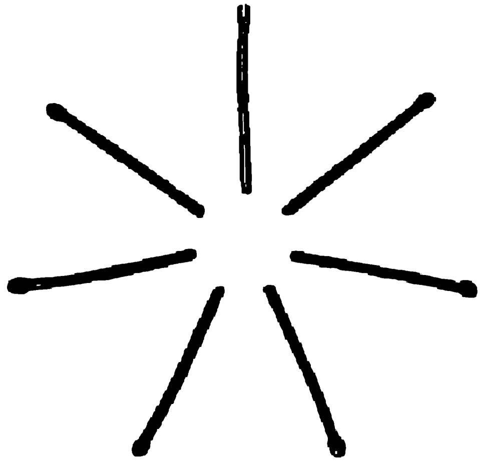
Daugumai berniukų, iš tikrųjų, buvo vis tiek, kuriuos du paukščius su savim išsivežti (jeigu jau negalima visų paimti), tačiau Tanė ir Alikas norėjo, kad burtas kristų

būtinai alksniniam dagilėliui ir liepsnelei. Jie, padėdami sustatyti narvelius į eilę, prisiminė uždavinį apie katiną ir peles. Jie greit apskaičiavo, kuriose vietose reikia pastatyti narvelius su alksniniu dagilėliu ir liepsnele, kad kaip tik tie narveliai liktų neatidaryti, ir pastatė juos...

Beje, jūs patys be ypatingo vargo galite nustatyti, kuriose vietose Tania ir Alikas pastatė narvelius su alksniniu dagilėliu ir liepsnele.

91. Išdėlioti monetas

Paruoškite 7 degtukus ir 6 monetas. Degtukus ant stalo išdėliokite žvaigždute, kaip parodyta 34 piešinyje. Pradėdami nuo bet kurio degtuko, pagal laikrodžio rodyklę atskaičiuokite trečiąjį ir prie jo galvutės padėkite monetą. Po to vėl atskaičiuokite ta pačia kryptimi, pradėdami nuo bet kurio degtuko, p r i e k u r i o d a r n e g u l i m o n e t a,



34 pieš.

ir taip pat prie galvutės padėkite monetą. Taip elgdamiesi, pasistenkite prie šešių degtukų galvučių išdėlioti visas 6 monetas. Atskaičiuojant degtukus, nereikia praleisti ir tų, prie kurių jau padėta moneta; atskaičiavimą reikia pradėti būtinai nuo degtuko, neturinčio prie savęs monetos; nedėti dviejų monetų į vieną vietą.

Kokia taisykle reikia vadovautis, norint neabejotinai sėkmingai išspręsti uždavinį?

92. Praleisti keleivinį traukinį!

Nedidelėje vienvėžio geležinkelio pusstotėje sustojo traukinys, susidedąs iš garvežio ir penkių vagonų, kuriuose važiavo geležinkelio atšakai tiesti darbininkų brigada. Kol kas čia yra tik nedidelis atsparinis keliukas (35 pieš.),



35 pieš.

kuriame telpa vos garvežys ir du vagonai. Įkandin netrukus prie šios pusstotės prisiartino keleivinis traukinys. Kaip jį praleisti?

93. Uždavinys, kilęs dėl trijų mergaičių užgaidos

Šio uždavinio tema turi gerbtiną amžių*.

Vaikštinėjo trys mergaitės, kiekviena su savo tėčiu. Jie šešiese atėjo prie nedidelės upės ir panoro persikelti į kitą krantą. Naudotis jie tegalėjo tiktai vienu laiveliu be irkluotojo, pakeliančiu vos du žmones. Mergaitės buvo mažos, bet ne per mažiausios, taigi kiekviena iš jų galėjo savarankiškai irtis laiveliu. Suprantama, persikelti būtų buvę nesunku, jei mergaitės nebūtų pareiškusios, ar tai dėl užgaidos, ar išdykaudamos, kad nė viena iš jų nesutinkanti keltis laiveliu arba būti ant kranto su vienu ar dviem svetimais tėčiais be savo tėčio.

* Kiek kitaip suredaguotas jis randamas viename iš XIII šimtmečio raštų.

Tokiu būdu, nelauktai iškilo papildomos persikėlimo sąlygos, tačiau dėl pramogos keliautojai nusprendė pabandyti jas įvykdyti. Kaip jie pasielgė?

94. Tolesnis uždavinio vystymas

Linksmoji kompanija sėkmingai persikėlė į priešingą upės krantą ir susėdo pailsėti. Iškilo klausimas: ar būtų buvę galima, esant toms pačioms sąlygoms, organizuoti keturių porų perkėlimą. Labai greit paaiškėjo, kad, norint prisilaikyti mergaičių iškeltų sąlygų (žr. pirmesnį uždavinį), keturių porų perkėlimą galima buvo atlikti tik turint laivelį, pakeliantį t r i s žmones, ir persikelti būtų galima per 5 kartus.

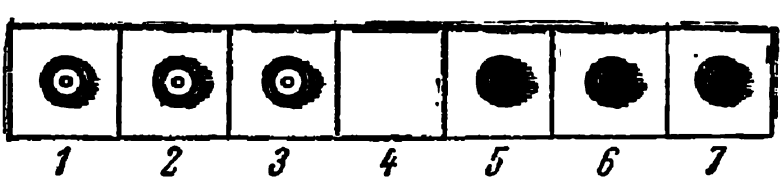
Kokiu būdu?

Vystydami uždavinio temą toliau, mūsų keliautojai atrado, kad ir laiveliu, kuriame telpa ne daugiau kaip du žmonės, galima atlikti keturių mergaičių ir jų tėčių perkėlimą iš vieno kranto į kitą, jeigu tik upės vidury būtų sala, prie kurios galima būtų daryti tarpinį sustojimą ir išlipti. Šiuo atveju visam persikėlimui reikia perplaukti ne mažiau kaip 12 kartų, prisilaikant tos pačios sąlygos, tai yra, kad nė viena mergaitė nesutinka būti nei laivelyje, nei saloje, nei ant kranto su svetimu tėčiu be savo tėčio.

Raskite ir šį sprendimą.

95. Šokinėjančios šaškės

Padėkite ant kvadratų 1, 2, 3 (36 pieš.) tris baltas šaškes, o ant kvadratų 5, 6, 7 — tris juodas. Naudodamiesi



36 pieš.

laisvuoju kvadratu 4, perkelkite baltas šaškes į juodųjų vietą, o juodąsias į baltųjų vietą; be to, prisilaikykite tokios

taisyklės: šaškes galima perkeldinėti į kaimyninį tuščią kvadratą; leidžiama taip pat ir peršokti per kaimyninę šaškę, jeigu už jos yra laisvas kvadratas. Baltos šaškės gali judėti tik į dešinę, o juodosios — tik į kairę. Ėjimai priešinga kryptimi neleidžiami.

Uždavinys išsprendžiamas 15 ėjimų.

96. Balta ir juoda

Paimkite keturias baltas ir keturias juodas šaškes (arba 4 varines ir 4 sidabrines monetas) ir sudėkite jas ant stalo į eilę, kaitydami spalvas: baltą, juodą, baltą, juodą ir taip toliau. Iš kairės ar iš dešinės palikite tiek laisvos vietos, kad galėtų sutilpti ne daugiau kaip 2 šaškės (monetos). Naudojantis laisva vieta, galima perkelti kiekvieną kartą tik po dvi greta gulinčias šaškes (monetas), tačiau nekeičiant jų tarpusavio išsidėstymo.

Pakanka padaryti 4 tokius šaškių porų perkėlimus, kad atsirastų paeiliui visos juodos, o už jų visos baltos šaškės.

Įsitikinkite tuo!

97. Uždavinio pasunkinimas

Padidinus pradžioje paimtų šaškių (monetų) skaičių, uždavinys pasunkėja.

Antai, jeigu jūs į eilę sudėsite, kaitydami spalvas, 5 baltas ir 5 juodas šaškes, tai prireiks 5 perkėlimų, norint juodas šaškes sudėti su juodomis, o baltas su baltomis.

Šaškių šešių porų atveju prireiks 6 perkėlimų; septynių porų atveju — 7 perkėlimų ir t. t. Raskite uždavinio sprendimus penkioms, šešioms ir septynioms šaškių poroms.

Prisiminkite, kad pradiniame šaškių išdėstyme reikia iš kairės (ar iš dešinės) palikti laisvos vietos ne daugiau kaip dviem šaškėm, o perkelti kiekvieną kartą galima po 2 šaškes, nekeičiant jų tarpusavio išsidėstymo.

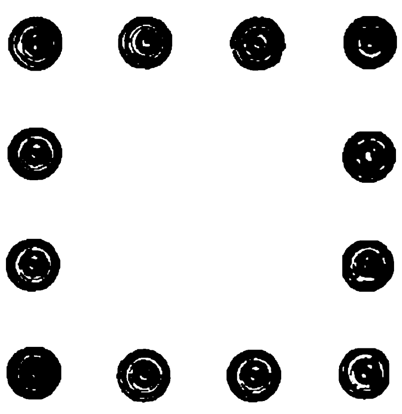
98. Kortelės sudedamos pagal numerius

Iškirpkite iš kartono dešimt 4 × 6 *cm* dydžio kortelių ir sunumeruokite jas skaičiais nuo 1 iki 10. Sudėję korteles krūvele, paimkite jas į ranką. Pradėdami nuo viršutinės kortelės, pirmą kortelę padėkite ant stalo, antrą po krūvelės apačia, trečią kortelę vėl ant stalo, ketvirtą — po krūvelės apačia. Taip elkitės visą laiką, kol nesudėsite ant stalo visų kortelių. Galima užtikrinti, kad jos susidėstys ne pagal numerius.

Pagalvokite, kokia tvarka pradžioje reikia sudėti korteles į krūvelę, kad, išdėliojant kaip nurodyta, jos susidėstytų pagal numerius nuo 1 iki 10.

99. Du išdėstymo galvosūkiai

Pirmas galvosūkis. Dvylika šaškių (monetų, popieriaus gabalėlių ir t. t.) nesunku ant stalo sudėlioti kvadratinio rėmo pavidalu, po 4 šaškes išilgai kiekvienos kraštinės (37 pieš.).



37 pieš.

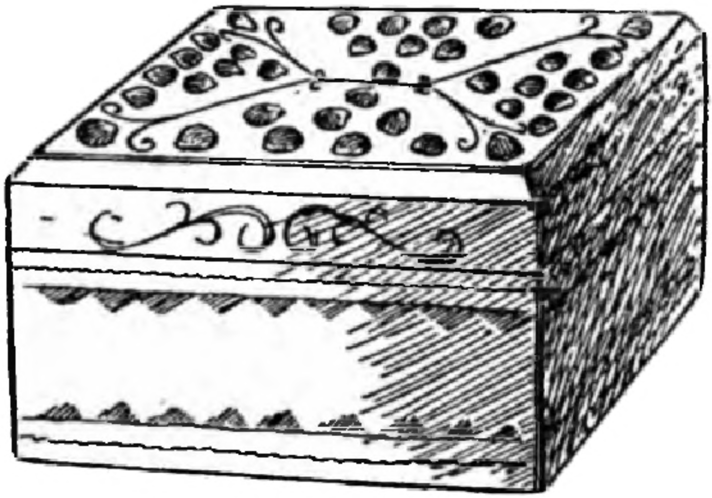
Sudėkite dabar tas šaškes taip, kad išilgai kiekvienos kvadrato kraštinės jų būtų po 5.

Antras galvosūkis. Sudėkite ant stalo 12 šaškių taip, kad susidarytų 3 eilės horizontaliai ir 3 eilės vertikaliai ir kad kiekvienoje iš šių eilių gulėtų po 4 šaškes.

100. Mįslinga dėžutė

Vasarą Miša poilsiavo Arteke ir iš ten savo jaunesniajai seseriai Irutei atvežė dovanų gražią dėžutę, papuoštą 36 kiaukutais. Irutė mokyklos dar nelanko, bet jau moka suskaičiuoti iki 10. Labiausiai Mišos dovanoje jai patiko tai, kad išilgai kiekvieno dėžutės dangtelio krašto buvo lygiai po 10 kiaukutų (38 pieš.).

Kartą mama, valydama dėžutę skudurėliu, netyčia sutraiškė 4 kiaukutus. Dabar išilgai kiekvieno dangtelio



38 pieš.

krašto nebuvo jau po 10 kiaukutų. Kokia nelaimė! Grįš iš vaikų darželio Irutė ir labai nuliūs.

— Menkniekis,— nuramino mamą Miša.

Jis atsargiai nuklijavo dalį iš 32 likusių kiaukutų ir taip sumaniai iš naujo juos užklijavo ant dėžutės dangtelio, kad vėl išilgai kiekvieno jo krašto buvo po 10 kiaukutų.

Praėjo keletas dienų. Vėl nelaimė. Dėžutė nukrito, sudužo dar 6 kiaukutai; liko jų tik 26. Bet ir šį kartą Miša suvokė, kaip reikia išdėstyti ant dangtelio likusius 26 kiaukutus, kad išilgai kiekvieno jo krašto Irutė, kaip ir anksčiau, priskaičiuotų po 10 kiaukutų. Tiesa, pastaruoju atveju nebuvo įmanoma likusius kiaukutus išdėstyti ant dėžutės dang-

telio taip pat simetriškai, kaip jie buvo išdėstyti iki šiol, tačiau Irutė į tai neatkreipė dėmesio.

Suraskite abu Mišos sprendinius.

101. Drąsi «įgula»

Sniego tvirtovę (39 pieš.) gina drąsi «įgula».

Vaikai 5 šturmavimus atmušė, bet nepasidavė. Žaidimo pradžioje «įgula» susidėjo iš 40 žmonių. Sniego tvirtovės



39 pieš.

«komendantas» iš pradžių jėgas išdėstė pagal schemą, parodytą kvadratiniame rėmelyje dešinėje (centriniame kvadrate — bendras «įgulos» skaičius).

1	9	1
9	40	9
1	9	1

«Priešininkas» matė, kad kiekvieną iš 4-rių tvirtovės kraštų gina 11 žmonių. Pagal žaidimo sąlygą per pirmąjį, antrąjį, trečiąjį ir ketvirtąjį šturmavimus «įgula»

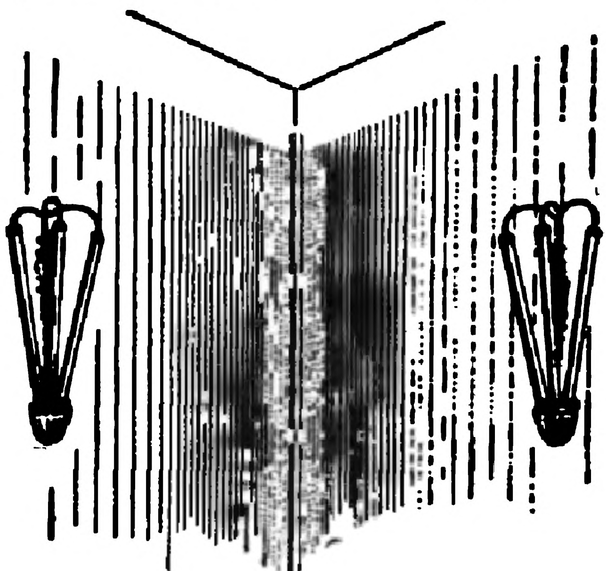
kiekvieną kartą «netekdavo» po 4 žmones. Per paskutinį, penktąjį, šturmavimą «priešas» sniego gniūžtėmis išvedė iš rikiuotės dar du žmones. Ir vis dėlto, nežiūrint nuostolių, po kiekvieno šturmavimo bet kurį sniego tvirtovės kraštą ir toliau gynė po 11 žmonių.

Kaip po kiekvieno šturmavimo sniego tvirtovės «komendantas» išdėstydavo savo «įgulos» jėgas?

102. Dieninės šviesos lempos televizijos transliacijos kambary

Apšvietimo technikas, ruošdamas televizijos transliacijai kambarį, bandė įvairius jo apšvietimo dieninės šviesos vamzdeliais* (lempomis) variantus (40 pieš.). Pradžioje apšvietimo technikas pritvirtino po 3 lempas kiekviename kampe ir po 3 lempas prie keturių kambario sienų, viso 24 lempas:→

```
3 — 3 — 3
|       |
3       3
|       |
3 — 3 — 3
```



40 pieš.

Po to technikas pridėjo 4 lempas ir dar kartą 4 lempas. Vėliau jis bandė sumažinti lempų skaičių iki 20 ir netgi

* Šiuose vamzdeliuose nėra kaitinimo siūlelių. Jie pripildyti praretintų dujų, o vamzdelių paviršiai padengti tokiu mišiniu, kuris, praleidžiant pro vamzdeliuose esančias dujas elektros srovę, švyti. Šviesa gaunama balta, artima dienos šviesai.

iki 18. Kiekvienu atveju jam pavykdavo kambario kampuose ir prie sienų išdėstyti lempas taip, kad išilgai kiekvienos sienos būtų po 9 lempas.

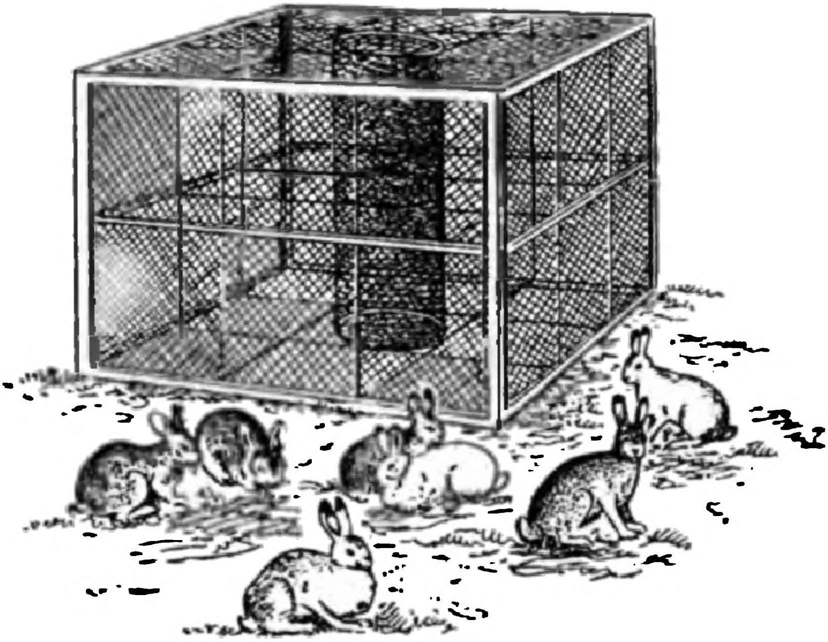
Raskite lempų išdėstymą, esant 28 ir 32 lempoms, o taip pat esant 20 ir 18 lempų.

Nustatykite, iki kokių ribų galėjo šviesos technikas didinti ir mažinti lempų skaičių, išlaikydamas jų išdėstymo po 9 išilgai kiekvienos kambario sienos principą.

Kaip jūs galvojate, ar galėjo apšvietimo technikas pridėti ar atimti ne po 4, o po vieną, po dvi arba po tris lempas, išdėstydamas jas vis taip pat po 9 išilgai kiekvienos sienos?

103. Bandomųjų triušių išskirstymas

Viename institute specialiems bandymams su triušiais ir stebėjimams buvo padirbtas specialus dviaukštis, su 9 sek-



41 pieš.

cijomis kiekviename aukšte narvelis (41 pieš.). Triušiams buvo paskirta 16 sekcijų (8 viršutiniame aukšte ir 8 žemu-

tiniame), o dviejose centrinėse sekcijose buvo sudėti prietaisai.

Atsižvelgiant į bandymo sąlygas, triušius reikėjo narvelyje išskirstyti taip, kad:

1) būtų užimtos visos 16 sekcijų;

2) kiekvienoje sekcijoje būtų patalpinta ne daugiau kaip trys triušiai;

3) prie kiekvieno iš keturių narvelio šonų būtų lygiai po 11 triušių;

4) viršutiniame aukšte būtų patalpinta dvigubai daugiau triušių, negu žemutiniame.

Institutas gavo 3 triušiais daugiau, nei buvo numatyta. Nežiūrint to, visi triušiai buvo išskirstyti sutinkamai su visomis sąlygomis.

Nustatykite, kiek triušių iš pradžių buvo numatyta patalpinti narvelyje ir kaip juos reikėtų išskirstyti? Kaip išskirstė visus gautus triušius?

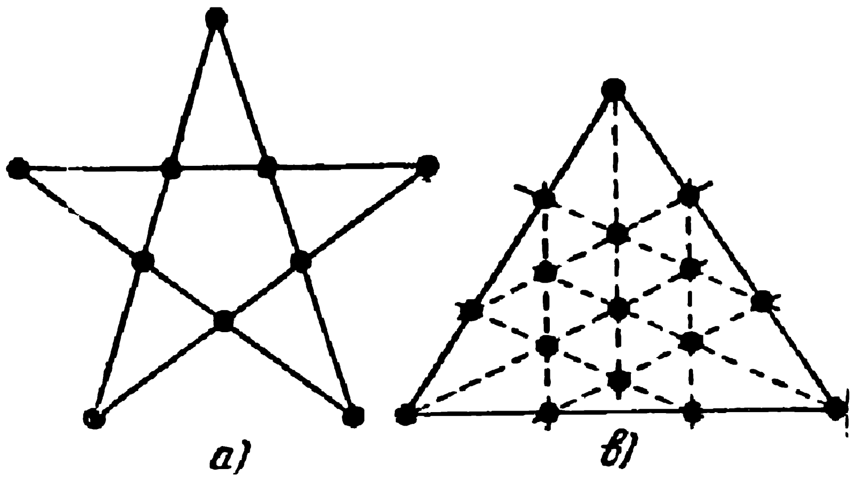
104. Pasirengimas šventei

Geometrinė ligšiolinių penkių uždavinių prasmė ta, kad reikia taip išdėstyti daiktus išilgai k e t u r i ų tiesiųjų linijų (stačiakampio ar kvadrato kraštinių), kad išilgai kiekvienos tiesės išliktų, keičiant bendrą daiktų kiekį, vienas ir tas pats daiktų skaičius. Be to, visi išdėstyti kampuose daiktai buvo laikomi tartum sukoncentruotais viename taške (kampų viršūnėse).

Dabar atsisakykime nuo daiktų susikaupimo, net ir įsivaizduojamo, viename geometriniame taške galimybės. Laikykime, kad kiekvienas iš išdėliotų ant tam tikros plokštumos daiktų (akmenėlis, lemputė, medis ir pan.) užima tos plokštumos atskirą tašką, ir nevaržykime savęs reikalavimu išdėstyti tuos daiktus tik pagal keturias tieses. Jeigu dar papildysime šias sąlygas reikalavimu, kad sprendinys kuria nors prasme būtų simetrinis, tai uždaviniai apie daiktų išdėstymą išilgai tiesiųjų linijų bus dar įdomesni geometriniu požiūriu. Tokius uždavinius sprendžiant, paprastai tenka braižyti tam tikras geometrines figūras.

Kaip, pavyzdžiui, ruošiant švenčių iliuminaciją, galima būtų gražiai išdėstyti 10 lempučių į 5 eiles, po 4 lemputes kiekvienoje eilėje?

Į šį klausimą atsakymą duoda penkiakampė žvaigždė, atvaizduota 42 piešinyje, *a*.



42 pieš.

Pasimiklinkite spręsdami analogiškus uždavinius:

a) Kaip išdėstyti į 6 eiles 12 lempučių, po 4 lemputes kiekvienoje eilėje (raskite 2 sprendinius)?

b) Pasodinkite į 12 eilių 13 dekoratyvinių krūmų, po 3 krūmus kiekvienoje eilėje.

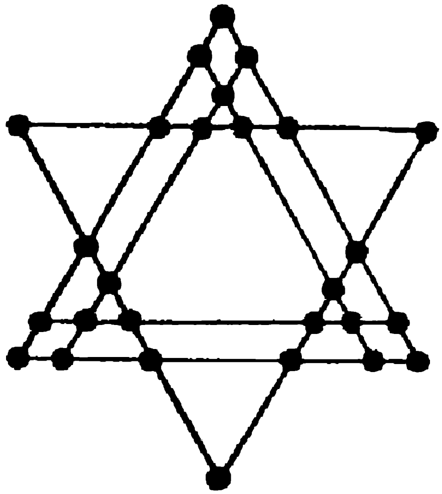
c) Sodininkas išaugino trikampėje aikštelėje (42 pieš., *b*) 16 rožių, išdėstytų 12-je tiesių eilių, po 4 rožes kiekvienoje eilėje. Po to jis paruošė gėlių lysvę ir persodino ten visas 16 rožių į 15 eilių, po 4 rožes kiekvienoje. Kaip jis tai padarė?

d) Pasodinkite 25 medžius į 12 eilių, po 5 medžius kiekvienoje eilėje.

105. Susodinti ąžuolėlius kitaip

27 ąžuolėliai, atvaizduoti 43 piešinyje, gražiai pasodinti į 9 eiles, po 6 ąžuolėlius kiekvienoje eilėje, bet miškininkas, be abejo, išpeiktų tokį išplanavimą. Ąžuolui reikalinga

saulė tik iš viršaus, o iš šonų jam reikia žalumos. Jis mėgsta, kaip sakoma, augti kailiniuose, bet be kepurės, o ten, štai, atsiskyrė 3 ąžuolėliai kažkur į šalį ir styro vieniši!

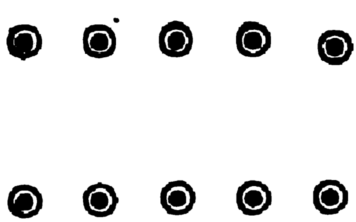


43 pieš.

Pabandykite susodinti šiuos 27 ąžuolėlius kitaip, taip pat į 9 eiles ir taip pat po 6 ąžuolėlius kiekvienoje eilėje, bet kad visi medžiai išsidėstytų į tris grupes ir kad nė vienas iš jų neatitrūktų nuo savo grupės.

106. Geometriniai žaidimai

Pirmas žaidimas. Išdėstykite ant stalo 10 šaškių (arba monetų, sagų ir pan.) į 2 eiles po 5 vienetus, kaip parodyta 44 piešinyje.

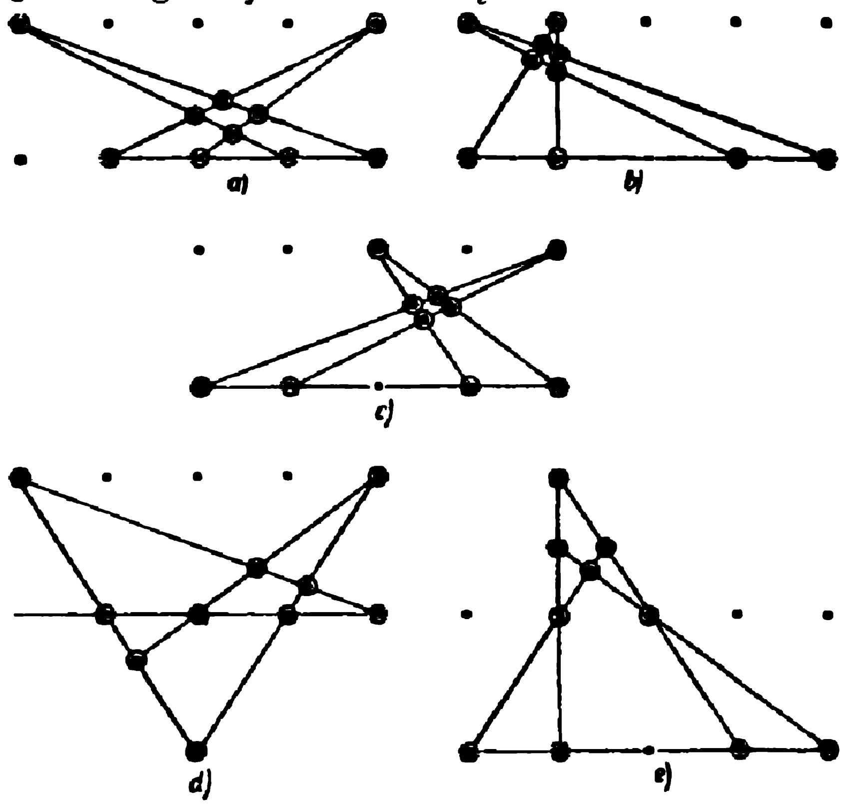


44 pieš.

Paimkite į ranką iš vienos eilės kurias nors 3 šaškes, o iš kitos — 1 šaškę. Išdėstykite jas ant stalo plokštumos (nejudindami iš vietos likusių šaškių ir neuždėdami vienos

šaškės ant kitos) taip, kad susidarytų penkios tiesios eilės, po 5 šaškes kiekvienoje eilėje.

Čia, skirtingai nuo ligšiolinių uždavinių, nereikalaujama simetrinio šaškių išdėstymo. Štai, pavyzdžiui, 5 skirtingi sprendiniai (45 pieš.). Sprendiniai laikomi skirtingais, jei jie, pavyzdžiui, kaip 45 piešinyje, duoda vis skirtingas konfigūracijas iš 10 šaškių.

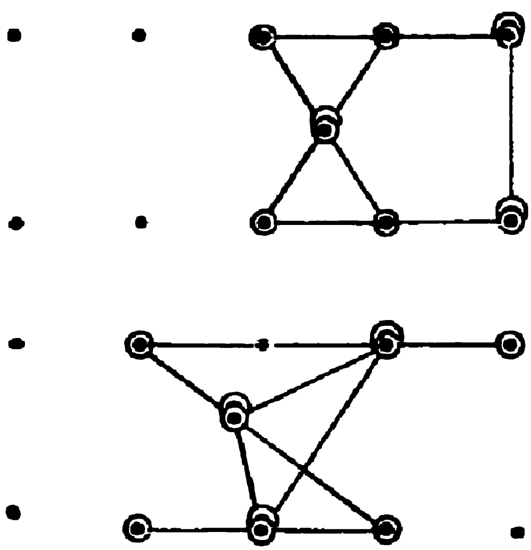


45 pieš.

P a s t a b a. Jūs, gal būt, pagalvosite, kad, pateikęs šiuos 5 sprendinius, aš jau panaudojau visus galimus šio uždavinio sprendinius. Aišku, ne! Juk uždavinio sprendimui galima atrinkti įvairias šaškių, skirtų perkėlimui, kombinacijas (žr. 45 pieš., *a, b, c, e*) ir taip pat skirtingai išdėstyti tą pačią atrinktą šaškių grupę (žr. 45 pieš., *a* ir *d*). Sakysime, jūs perkelti imate iš viršutinės eilės 3 šaškes, o iš apatinės — 1. Visi galimi šaškių deriniai po 3 (iš penkių)

jau duoda 10 skirtingų kombinacijų. Įsitikinkite! Pridėdami prie bet kurios iš šių kombinacijų dar po bet kurią vieną šaškę iš apatinės eilės, kiekvieną kartą gauname po 5 grupes. Taip galima gauti $10 \cdot 5 = 50$ skirtingų grupuočių po 4 šaškes, numatytas perkelti.

P a p i l d y m a s p i r m a m ž a i d i m u i. Suorganizuokite tokį žaidimą — varžybas. Dviem eilėmis prieš kiekvieną žaidimo dalyvį padėkite po 10 šaškių (galima iškarpyti iš kartono) ir tegul kiekvienas (nerodydamas kitiems) perdės savo 4 šaškes (3 iš vienos eilės ir 1 iš antros) taip, kad susidarytų 5 eilės, po 4 šaškes kiekvienoje eilėje. Po to sulyginkite sprendinius. Tie žaidėjai, pas kuriuos bus vienodos šaškių konfigūracijos, gauna po vieną tašką; skirtinga nuo visų kitų šaškių konfigūracija įvertinama 2 taškais. Neišsprendusieji per paskirtą laiką uždavinio, negauna



46 pieš.

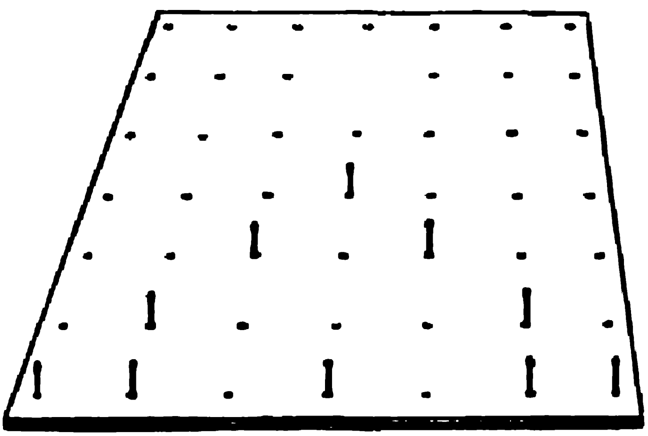
nė vieno taško. Pakartoję žaidimą keletą kartų, apskaičiuojate kiekvieno žaidimo dalyvio taškų sumą ir nustatote laimėtojus.

Žaidimą galima pravesti ir visai be šaškių. Kiekvienam žaidimo dalyviui išdalijama po popieriaus lapą ir po braižymo liniuotę. Šaškės pakeičiamos ant popieriaus taškais,

kurie pradžioje išdėstomi taip pat 2 eilėmis po 5 taškus. Žaidimo esmė: perbraukti kuriuos nors 3 taškus vienoje eilėje ir 1 kitoje ir vietoje jų atžymėti 4 naujus taip, kad jie kartu su likusiais, suprantama be išbrauktųjų, sudarytų 5 eiles, po 4 taškus kiekvienoje eilėje.

D a r v i e n a s p a p i l d y m a s p i r m a m ž a i d i m u i. Galima leisti paimti 4 šaškes po 2 iš kiekvienos eilės ir uždėti vieną šaškę ant kitos. Tada bus galimi, pavyzdžiui, ir tokie sprendiniai, kaip 46 piešinyje. Ryšium su šiuo papildomu susitarimu galimų uždavinio sprendinių skaičius žymiai padidėja.

Antras žaidimas. Kartono lape išdurkite 49 nedideles skylutes, kad gautųsi kvadratinis tinklelis. Įstatykite, kaip nurodyta 47 piešinyje, į 10 skylučių po degtuką. Žaidimo turinys tas, kad reikia išspręsti, pavyzdžiui, uždavinį, panašų į tokį:



47 pieš.

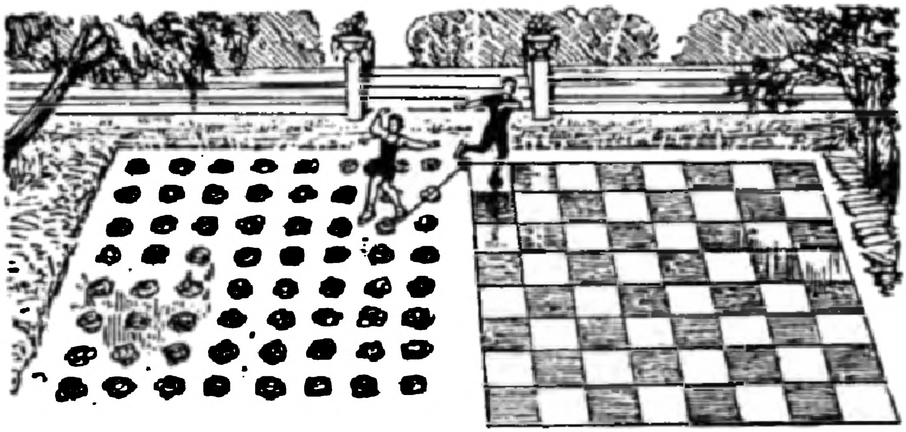
Ištraukti kuriuos nors 3 degtukus ir įstatyti juos į kitas kartono lapo skylutes taip, kad susidarytų 5 eilės, po 4 degtukus kiekvienoje eilėje.

Iš pradžių šį uždavinį išspręskite atvejui, nurodytam 47 piešinyje, o po to galite jį paįvairinti, keisdami pradinį degtukų išdėstymą ir tų eilių, kurios turi būti naujai sudarytos, skaičių.

P a s t a b a. Šio uždavinio sprendimo «lauką» galima pasidaryti iš plastelino.

107. Figūrininkai dirbtinio ledo čiuožykloje

Maskvos dirbtinio ledo čiuožykloje repetuojamas «baleto ant ledo mokyklos» mokinių jėgomis paruoštas spektaklis. Dailininkas, apipavidalindamas spektaklio pastatymą, vienoje ledo aikštelės pusėje išpiešė raštuotą kilimą su 64 gėlelėmis (48 pieš., *a*), o kitoje parketines grindis su 64 baltais — juodais langeliais (kaip šachmatų lentą, 48 pieš., *b*).



a) *b)*

48 pieš.

Šiuo metu repeticijos pertrauka. Petraukos metu mergaitė ir berniukas — du nenuilstą figūrininkai — tęsia ant puikios, lygios kaip veidrodis ledo aikštelės «kreivių brėžimą».

Mergaitę sudomino ledinio kilimo gėlelės ir ji panoro vienu judesiu, aišku, su posūkiais tam tikruose aikštelės taškuose, pervažiuoti per v i s a s 64 gėleles. Ji nusprendė judėti tik tiesiomis linijomis, be to, taip, kad paskutinis tiesusis kelias atvestų ją į tą pačią vietą, iš kurios ji pradėjo čiuožimą (piešiny pažymėtą juodu tašku).

Tai jai visiškai pavyko, be to, visas jos kelias susidėjo tik iš 14 tiesių atkarpų. (Per kai kurias gėles mergaitė pervažiavo keletą kartų.)

Nubrėžkite ant popieriaus lapo mergaitės maršruto schemą.

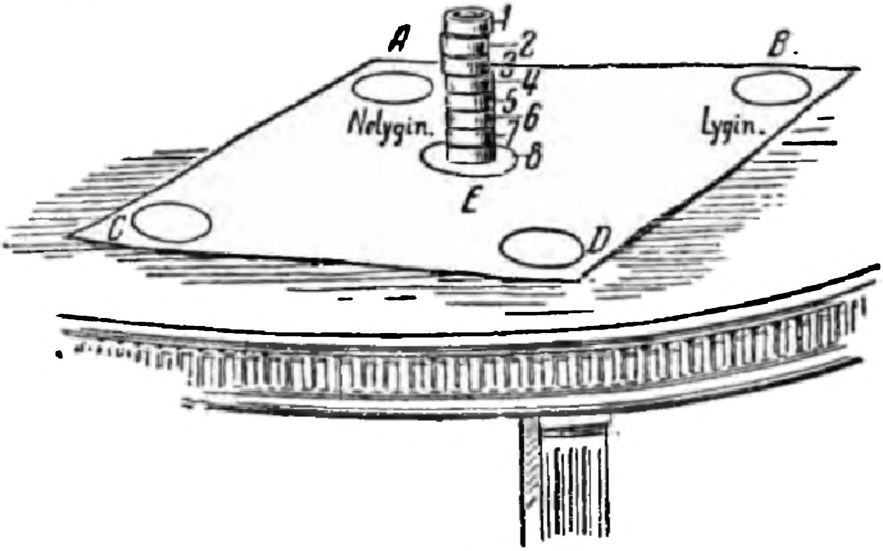
Berniukas treniravosi antroje ledo aikštelės dalyje. Sužinojęs apie savo dailiojo čiuožimo draugės «geometrinius» pasiekimus, jis nenorėjo jai užsileisti ir užsibrėžė atlikti dar sudėtingesnį geometrinį uždavinį:

Judėdamas tik baltais parketo langeliais ir perkirsdamas langelių viršūnes ne daugiau kaip po vieną kartą, nučiuožti iš kairiojo tolimesniojo kampo, apsilankant kiekviename baltame langelyje, į priešingą pagal įstrižainę dešinįjį kampą.

Nupieškite figūrininko judėjimo schemą, jei žinoma, kad jo kelias susideda iš 17 tiesių atkarpų.

108. Lyginis ir nelyginis (galvosūkis)

Centriniame apskritime sukraukite į stulpelį pagal numerius 8 sunumeruotas šaškes (49 pieš.) taip, kad šaškė su skaitmeniu 8 būtų apačioje, o su skaitmeniu 1 — viršuje.



49 pieš.

Uždavinys: mažiausiu ėjimų skaičiumi perkelti iš centrinio stulpelio šaškes su skaitmenimis 1, 3, 5 ir 7 į apskritimą su užrašu «nelyginis», o šaškes su skaitmenimis 2, 4, 6 ir 8 į apskritimą su užrašu «lyginis». Ėjimu laikomas bet kuris šaškių perkėlimas iš vienos vietos į kitą. Vienu

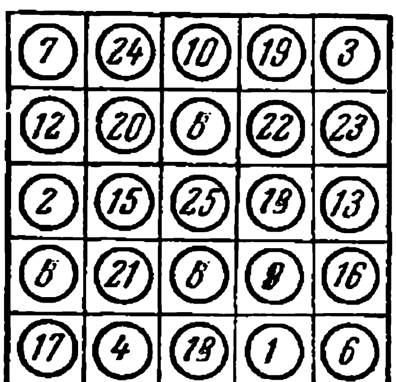
ėjimu galima perkelti iš vieno apskritimo į kitą tik vieną šaškę, tačiau negalima dėti šaškės, pažymėtos didesniu numeriu, ant šaškės, pažymėtos mažesniu numeriu; taip pat negalima į vieną, nesvarbu kurį apskritimą (tame tarpe ir atgal — į centrinį), sudėti kartu šaškes su lyginiais ir nelyginiais numeriais.

Galima, sakysim, šaškę su skaitmeniu 1 uždėti ant šaškės su skaitmeniu 3 arba šaškę su skaitmeniu 3 — ant šaškės su skaitmeniu 7, šaškę su skaitmeniu 2 — ant šaškės su skaitmeniu 6, bet ne atvirkščiai, ir negalima uždėti šaškės su skaitmeniu 1 ant šaškės su saitmeniu 2 arba šaškės su skaitmeniu 4 ant šaškės su skaitmeniu 7, nes tada atsirastų kartu šaškės su lyginiu ir nelyginiu numeriais.

Kiek jums prireikė ėjimų uždaviniui išspręsti?

109. Sutvarkyti šaškių išdėstymą

Išdėstykite 25 sunumeruotas šaškes ant 25 kvadratinių langelių, kaip parodyta 50 piešinyje. Sukeisdami šaškes vietomis, sutvarkykite jas, tai yra sudėkite numerius 1, 2, 3,



50 pieš.

4, 5 į pirmą eilę iš kairės į dešinę, numerius 6, 7, 8, 9, 10 į antrą eilę iš kairės į dešinę ir t. t. iki galo. Pavyzdžiui, galite sukeisti vietomis numerius 7 ir 1, 24 ir 2 ir t. t.

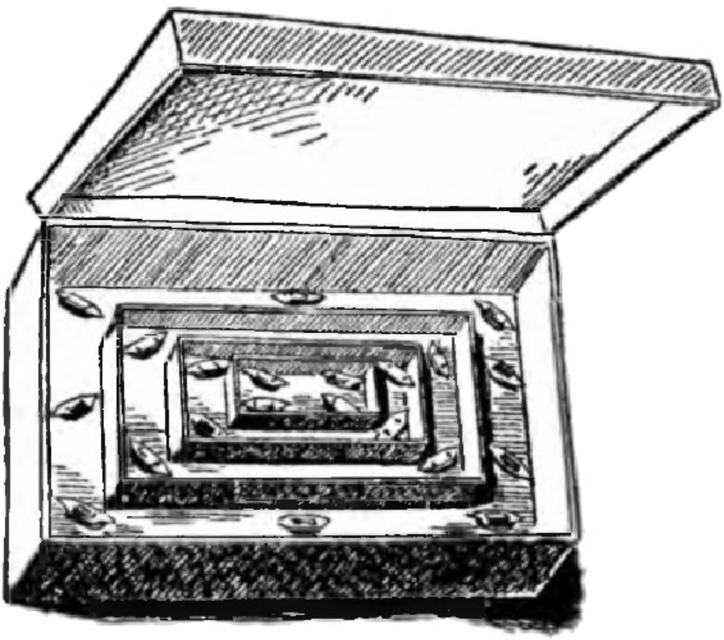
Nustatykite mažiausią reikalingų sukeitimų skaičių.

Norint išvengti nenaudingų perkėlimų, reikia sudaryti kokią nors perkėlimų sistemą. Pagalvokite apie tai.

110. Dovana — galvosūkis

Yra toks žaisliukas — dėžutė; ją atidarai, o viduje dar dėžutė; šią atidarai — viduje vėl dėžutė.

Padarykite panašų žaisliuką iš keturių dėžučių. Į pačią mažiausią, vidinę dėžutę įdėkite 4 saldainius; įdėkite po 4 saldainius į kiekvieną iš dviejų sekančių dėžučių ir 9 saldai-



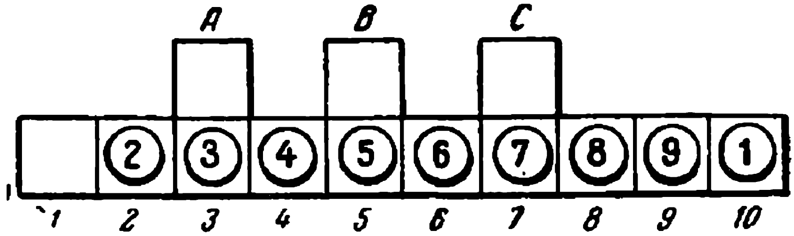
51 pieš.

nius — į pačią didžiausiąją. Tokiu būdu keturiose dėžutėse bus patalpintas 21 saldainis (51 pieš.). Šią dėžutę su saldainiais padovanokite gimimo dienos proga savo draugui su sąlyga: nevalgyti saldainių tol, kol «jubiliatas» neperskirstys 21 saldainį taip, kad kiekvienoje dėžutėje saldainių būtų po lyginį porų skaičių ir dar vieną.

Suprantama, prieš darant šią dovaną, reikia pačiam šį galvosūkį «išgvildenti». Turėkite galvoje tai, kad jokios aritmetinės taisyklės čia nepadės, reikia būti tik nuovokiam.

111. Šaškių perkėlimas (2 galvosūkiai)

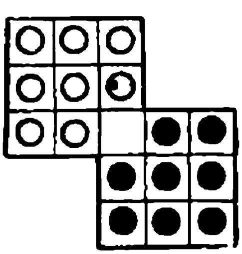
Pirmas galvosūkis. Sunumeruokite 9 šaškes skaičiais nuo 1 iki 9. Sustatykite šaškes ant specialaus lauko, pavaizduoto 52 piešinyje, taip, kad langelių ir šaškių numeriai sutaptų; tik šaškę su skaitmeniu 1 patalpinkite į langelį Nr. 10, o langelį Nr. 1 palikite laisvą.



52 pieš.

Šaškių iš langelių neišimdami, o tik jas perstumdami, nukelkite šaškę su skaitmeniu 1 į langelį Nr. 1. Galima laikinai po vieną šaškę statyti į langelius *A*, *B* ir *C*; negalima su viena šaške šokti per kitą. Kada šaškė su skaitmeniu 1 pereis į savo vietą — į langelį Nr. 1, tada ir visos kitos šaškės turi būti pirmykštėse vietose, t. y. šaškių ir langelių numeriai turi sutapti.

Antras galvosūkis. Antram uždaviniui paimkite 8 juodas ir 8 baltas šaškes ir sustatykite jas taip, kaip parodyta 53 piešinyje. Reikia, nenuimant nuo lauko šaškių, 46 ėjimais nuvaryti visas juodąsias šaškes į baltųjų vietas, o baltąsias — į juodųjų vietas.



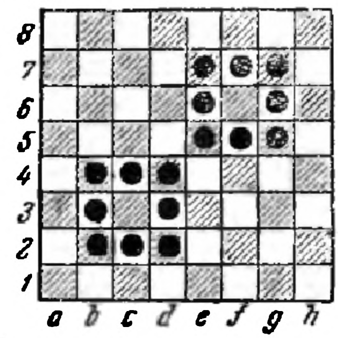
53 pieš.

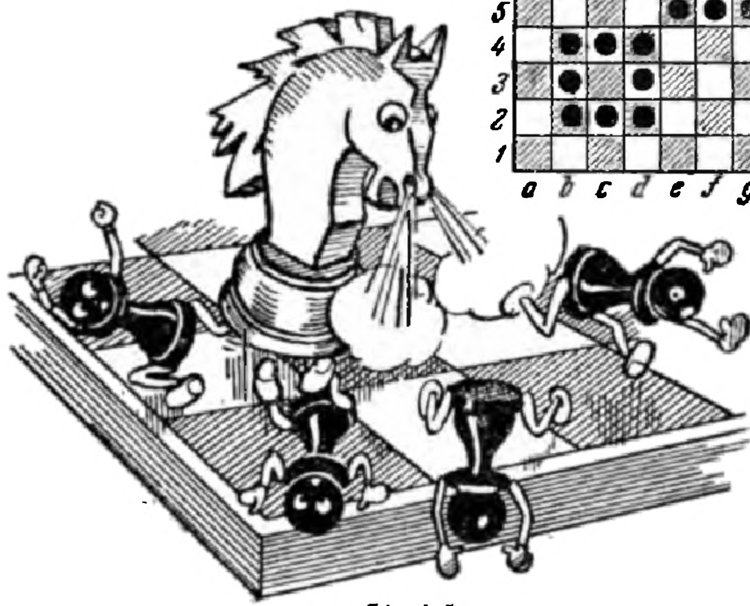
Šaškes galima stumdyti pirmyn ir atgal, dešinėn ir kairėn, bet ne įstrižai. Tomis pačiomis kryptimis leidžiama peršokti per vieną šaškę į laisvą langelį. Dviejų šaškių į vieną langelį patalpinti negalima. Perkeliant baltas ar juodas šaškes, eilės laikytis nebūtina; jei reikia, galima keletą kartų perkeldinėti vienos spalvos šaškes.

Atraskite sprendimą.

112. Žirgo ėjimu

Norint išspręsti šį įdomų šachmatų uždavinį, nereikia mokėti lošti šachmatais. Pakanka žinoti, kaip lentoje perkeliama žirgo figūra. Ant šachmatų lentos sustatyti juodieji pėstininkai (54 pieš.). Pastatykite ant šachmatų lentos





54 pieš.

bet kurio, pagal jūsų pageidavimą, laisvo langelio baltąjį žirgą taip, kad su juo būtų galima nuimti mažiausiu ėjimų skaičiumi visus juoduosius pėstininkus.

113. Originali sveikų skaičių nuo 1 iki 15 grupuotė

Pažiūrėkite, kaip puikiai galima išdėstyti visus sveikus skaičius nuo 1 iki 15 į 5 grupes, po 3 skaičius kiekvienoje grupėje:

$$\left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\}d=7;\quad \left.\begin{matrix}4\\9\\14\end{matrix}\right\}d=5;\quad \left.\begin{matrix}2\\6\\10\end{matrix}\right\}d=4;\quad \left.\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right\}d=2;\quad \left.\begin{matrix}11\\12\\13\end{matrix}\right\}d=1.$$

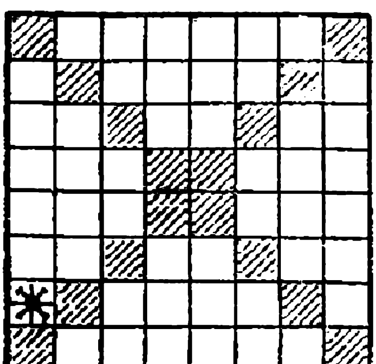
Skaičiai išskirstyti grupėse taip, kad kiekvienoje grupėje skirtumas d tas pats: koks tarp antro ir pirmo, toks ir tarp trečio ir antro skaičių. Pavyzdžiui, $8 - 1 = 7$ ir $15 - 8 = 7$ arba $9 - 4 = 5$ ir $14 - 9 = 5$ (kiekviena skaičių grupė su pastoviu gretimų skaičių skirtumu sudaro seką, kuri algebroje vadinama *aritmetinė progresija*). Šis įdomus penkiolikos natūrinių skaičių išskirstymas į 5 grupes su nurodytais skirtumais nėra vienintelis. Palikus nepakeistą pirmąją skaičių grupę (1, 8, 15), likusius 12 skaičių (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14) galima sugrupuoti į naujus skaičių trejetus, tačiau su buvusiais skirtumais: $d = 5$; $d = 4$; $d = 2$ ir $d = 1$.

Raskite šią naują duotų skaičių grupuotę.

Norintieji gali pabandyti išdėstyti tuos pačius skaičius nuo 1 iki 15 į aritmetinių progresijų grupes su kitomis d reikšmėmis.

114. Aštuonetas žvaigždučių

Viename iš 55 piešinio baltų langelių aš pažymėjau žvaigždutę, o jūs išdėliokite, taip pat tik baltuose langeliuose, dar 7 žvaigždutes taip, kad bet kurios dvi žvaigždutės (iš aštuonių) nebūtų vienoje horizontalėje arba vertikalėje, arba kurioje nors įstrižainėje.



55 pieš.

Spręsti uždavinį, aišku, reikia mėginimų keliu, todėl uždavinys įdomus dar ir tuo, kaip mėginimų procese panaudoti tam tikrą sistemą.

115. Du raidžių išdėstymo uždaviniai

Pirmas uždavinys. Kvadrate, padalytame į 16 lygių kvadratų, išdėstykite 4 raides taip, kad kiekvienoje horizontalioje eilutėje, kiekvienoje vertikalioje eilutėje ir kiekvienoje iš dviejų didžiojo kvadrato įstrižainių butų tik po vieną raidę.

Kiek yra šio uždavinio sprendinių tuo atveju, kai išdėstomos raidės yra vienodos, ir tuo atveju, kai jos skirtingos?

Antras uždavinys. Kvadrate, padalytame į 16 lygių kvadratų, surašykite po 4 kartus kiekvieną iš keturių raidžių *a, b, c* ir *d* tokiu būdu, kad kiekvienoje horizontalioje eilutėje, kiekvienoje vertikalioje eilutėje ir kiekvienoje iš dviejų didžiojo kvadrato įstrižainių nebūtų vienodų raidžių. Kiek yra šio uždavinio sprendinių?

116. Įvairiaspalvių kvadratų išdėstymas

Paruoškite 16 kvadratų vienodo dydžio, tačiau skirtingų spalvų, sakysim, baltos, juodos, raudonos, žalios — po 4 kvadratus kiekvienos spalvos. Jūs turėsite keturis įvairiaspalvių kvadratų komplektus. Kiekvieną pirmojo komplekto kvadratą pažymėkite skaitmeniu 1, kiekvieną antrojo komplekto kvadratą — 2, trečiojo komplekto kvadratus — 3 ir ketvirtojo kvadratus — 4.

Reikia tuos 16 įvairiaspalvių kvadratų išdėstyti taip pat kvadrato pavidalu ir taip, kad kiekvienoje horizontalioje eilėje, kiekvienoje vertikalioje eilėje ir kiekvienoje iš abiejų įstrižainių būtų išdėstyti bet kuria tvarka kvadratai su skaitmenimis 1, 2, 3 ir 4 ir, be to, butinai skirtingų spalvų.

Uždavinys turi labai daug sprendinių. Pagalvokite, kaip gauti reikalingų išdėstymų sistemą.

117. Paskutinysis gabaliukas*

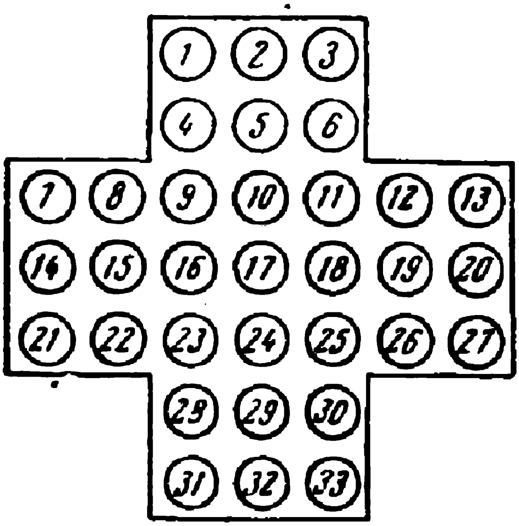
Iškirpkite iš kartono 32 vienodus gabaliukus (bet kokios formos) ir visus juos sudėliokite ant skrituliukų (56 pieš.),

---

* Senovinis žaidimas-galvosūkis — «soliteras», arba «atsiskyrėlis», žinomas dar iš XVIII šimtm. pradžios.

po vieną ant kiekvieno skrituliuko. Kadangi skrituliukų yra 33, tai vienas jų (nesvarbu kuris) liks laisvas.

Uždavinys: reikia nuimti visus, išskyrus vieną, gabaliukus. Paskutinis gabaliukas turi likti tame pačiame skritu-



56 pieš.

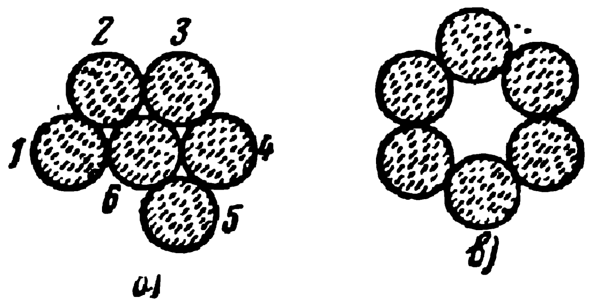
liuke, kuris iš pradžių buvo paliktas tuščias. Gabaliukus nuimti galima ėjimais atgal, pirmyn ir į šonus, peršokant į laisvą skrituliuką bet kuriuo gabaliuku per kitą. Kiekvienu ėjimu nuimamas vienas (peršoktas) gabaliukas, vadinasi, uždavinį reikia išspręsti 31 ėjimu.

118. Žiedas iš diskų

Paimkite šešis lygius diskus ir sudėkite juos, kaip parodyta 57 piešinyje, *a*, glaudžiai, bet nesimetriškai. Reikia 4 ėjimais juos sudėstyti žiedo pavidalu (57 pieš., *b*). «Ėjimas» yra toks: prispaudus kuriuos nors 5 diskus prie stalo, šeštąjį reikia perritinti, neatitraukiant jo nuo visų kitų diskų, į naują padėtį. Naujoje padėtyje jis turi liestis ne mažiau kaip su dviem diskais. Išspręsti šį uždavinį tik 4 ėjimais ne taip jau paprasta, kaip gali iš pirmo žvilgsnio atrodyti.

Vietoje diskų galite paimti, pavyzdžiui, 6 vienodas monetas arba iškirpti iš kartono 6 vienodus skrituliukus.

P a p i l d o m a   u ž d u o t i s. Pateiktas galvosūkis sprendžiamas iš eilės perritinant diskus. Keičiant šių perritinimų t v a r k ą, galima gauti s k i r t i n g u s uždavinio sprendinius. Reikia rasti visus skirtingus galvosūkio



57 pieš.

sprendinius. Kad nesusipainiotumėte, diskus sunumeruokite ir kiekvieną ėjimą užrašykite pagal tokią sistemą:

1—2, 3, tai reiškia: diską Nr. 1 perritinti iki susilietimo su diskais Nr. 2 ir Nr. 3;

2—6, 5, tai reiškia: diską Nr. 2 perritinti iki susilietimo su diskais Nr. 6 ir Nr. 5 ir t. t.

Štai pavyzdinis galvosūkio sprendimas:

1—2, 3; 2—6, 5, 6—1, 3; 1—6, 2.

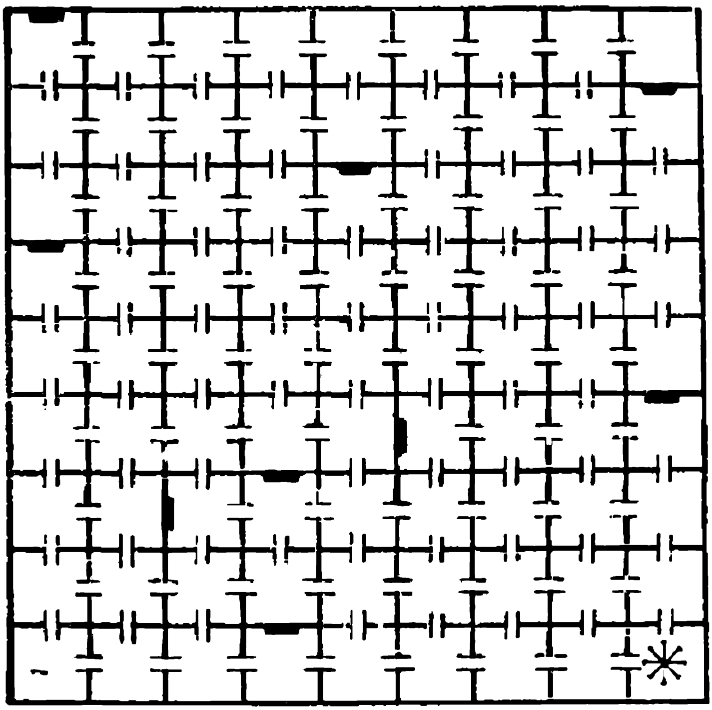
Raskite dar 23 sprendinius.

119. Šimtas keturiasdešimt penkios durys (galvosūkis)

Viduramžių feodalai dažnai savo pilių rūsius paversdavo kalėjimais — labirintais, kurie buvo pilni visokių paslapčių ir išdaigų: prasiskiriančių kamerų sienų, slaptų įėjimų, įvairių spąstų.

Atverskime praeities puslapį. Įsivaizduokime, kad į vieną iš tokių rūsių, kurio planas atvaizduotas 58 piešinyje, įmestas sukilęs prieš feodalą žmogus. Vaizduokimės šio rūsio įrengime tokią paslaptį: iš 145 durų tiktai 9 užrakintos (jos atvaizduotos 58 piešinyje storais brūkšniais), o visos kitos plačiai atvertos. Atrodo, kad yra nepaprastai lengva prieiti prie durų, vedančių laukan, ir pamėginti jas atidaryti. Ė, apsirikai! Niekuo neįmanoma užrakintų

durų atidaryti, tačiau jos atsidaro pačios, jei tik bus pagal eilę lygiai devintos, tai yra jei prieš tai bus praeita pro 8 atviras duris. Be to, turi būti atidarytos ir praeitos visos užrakintosios požemio durys; kiekvienos jų taip pat atsidaro pačios, jeigu prieš tai praeitos lygiai aštuonios atviros durys. Ištaisyti klaidą ir praeiti papildomai pro 2—3 gretimas duris, norint praeitų durų skaičių padidinti iki aštuonių, taip pat nepavyks: vos tik kuri nors kamera yra praeita, visos anksčiau į ją atidarytos durys aklinai užsidaro ir užsirakina — antrą kartą pro kamerą nepraeisi. Feodalai tyčia taip įrengė. Kalinys apie tą požemio paslaptį žinojo, o ant savo kameros (pažymėtos plane žvaigždute) sienos rado vinim išbrėžtą tikslų požemio planą. Ilgai jis suko galvą, kaip numatyti teisingą maršrutą, kad kiekvienos užrakintos durys iš tikrųjų būtų devintos. Galiausiai jis šį uždavinį išsprendė ir išėjo į laisvę.



58 pieš.

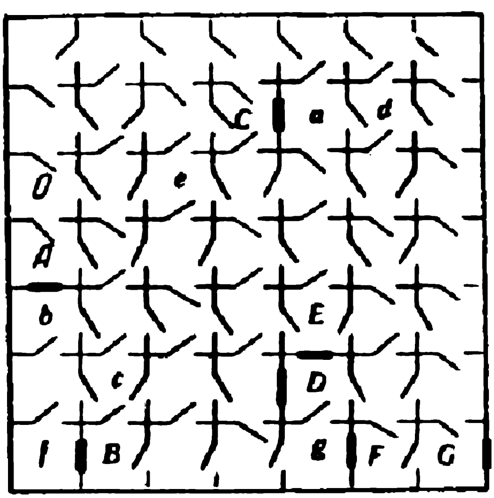
Kokį sprendimą surado kalinys?

120. Kaip kalinys išėjo į laisvę?

Norintieji gali pagalvoti dar apie tokį praeito uždavinio variantą.

Vaizduokitės, kad kazematas, kuriame kankinasi kalinys, susideda iš 49 kamerų.

Visų kamerų durys atidaromos, paprastai paspaudžiant rankeną, tačiau rankenos yra tik iš vienos kiekvienų durų pusės, o durys po to, kai pro jas praeinama, automatiškai užsitrenkia. Kitoje durų pusėje rankenų nėra.



59 pieš.

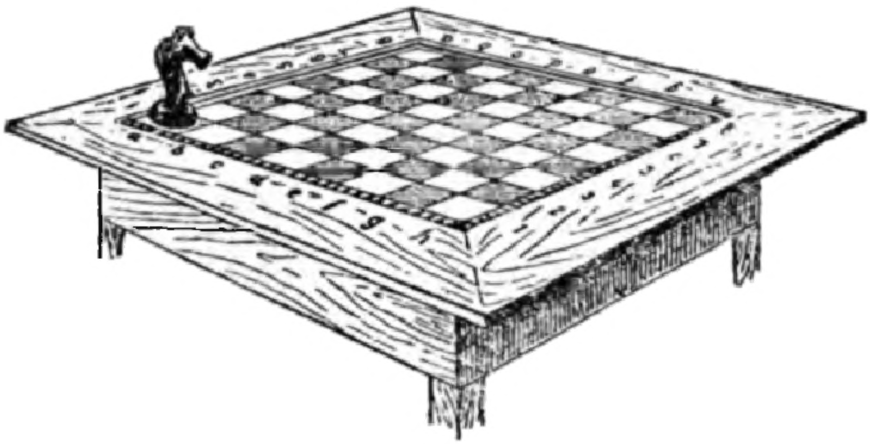
Septyniose kamerose, pažymėtose požemio plane (59 pieš.) raidėmis *A, B, C, D, E, F* ir *G*, yra po vienas duris, atidaromas tiktai raktu; be to, raktas nuo kameros *A* durų yra kameroje *a*, raktas nuo kameros *B* durų yra kameroje *b*, raktai nuo kamerų *C, D, E, F* ir *G* durų yra atitinkamai *c, d, e, f* ir *g* kamerose.

Požemio plane parodyta, į kurią pusę galima pro kiekvienas duris praeiti, bet kokia tvarka reikia užrakintas duris atidaryti — nežinoma.

Kalinys yra kameroje *O*. Nurodykite jam kelią, vedantį prie išėjimo į laisvę.

121. Uždavinys — pokštas

Vidurinės mokyklos 4-os klasės mokinys Kolia Siničkinas uoliai stengiasi perkelti šachmatų žirgą (60 pieš.) iš šachmatų lentos kairiojo apatinio kampo (iš langelio a1)



60 pieš.

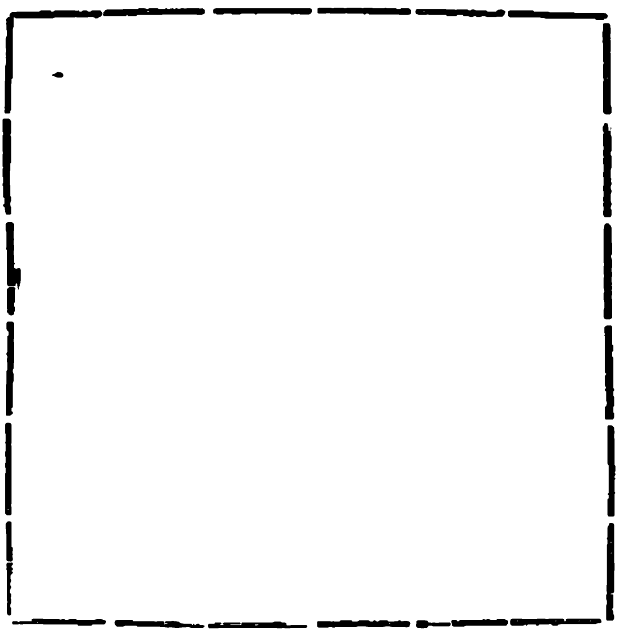
į dešinįjį viršutinį kampą (langelį h8) taip, kad žirgas apsilankytų po vieną kartą kiekviename lentos langelyje. Kol kas tai jam nevyksta. Ar tik jis nesistengia išspręsti neišsprendžiamą uždavinį?

Išsiaiškinkite teoriškai patys ir paaiškinkite Koliai Siničkinui, kaip čia yra.

TRECIASIS SKYRIUS

GEOMETRIJA SU DEGTUKAIS

Dėžutė degtukų arba vienodo ilgio pagaliukų ryšulėlis — puiki priemonė geometrinėms pramogoms, reikalaujančioms išradingumo ir lavinančioms supratingumą.



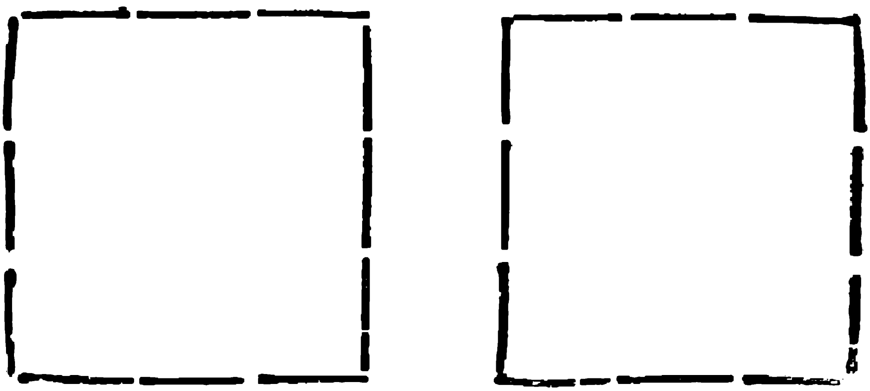
61 pieš.

Iš degtukų galima sudaryti visokiausias tiesialinijines figūras; degtukų perdėjimo keliu vieną figūrą paversti kita; net teoremas su degtukais galima įrodinėti.

Kaip pavyzdį, išnagrinėkime tokį u ž d a v i n į.

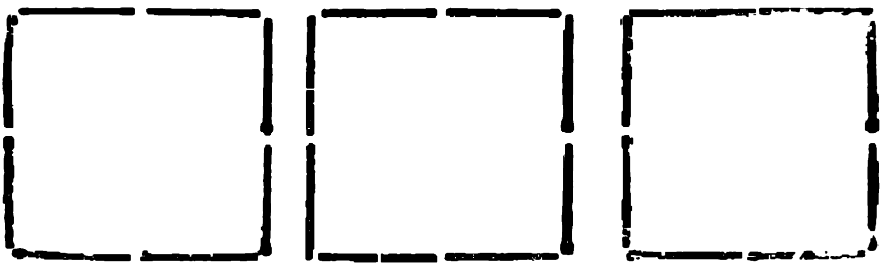
Kiek galima sudaryti vienodų kvadratų iš 24 degtukų, jų nelaužant ir, be to, panaudojant visus degtukus?

Aišku, jeigu kiekvienai kvadrato kraštinei pavartotume po 6 degtukus (daugiau negalima), tai gautume v i e n ą kvadratą (61 pieš.).



62 pieš.

Kai kvadrato kraštinė iš 5 arba iš 4 degtukų, iš tų 24 degtukų negausime vienodų kvadratų. Kai kvadrato kraštinė iš 3 degtukų, galima sudėti d u kvadratus (62 pieš.).

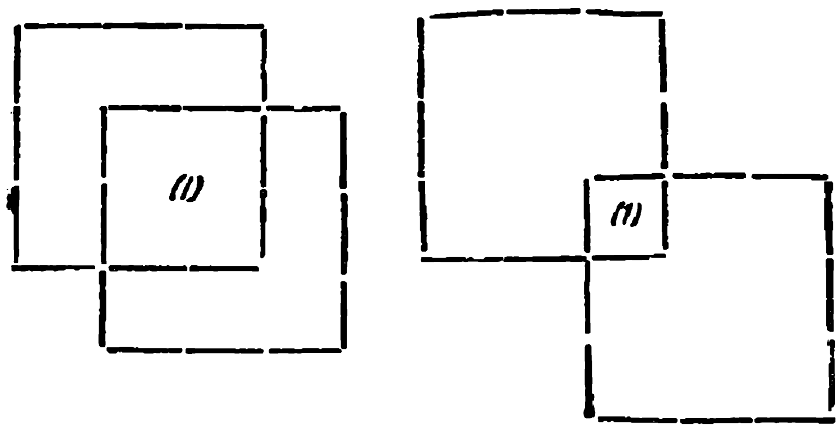


63 pieš.

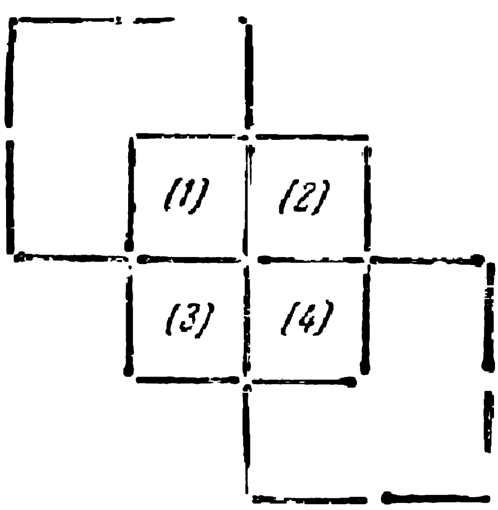
Kai kvadrato kraštinė iš 2 degtukų — t r i s kvadratus (63 pieš.).

Iš kvadratų, kurie turi kraštines iš 3 ir 2 degtukų, galima sudaryti dar k i t o k i ų dydžių papildomus kvadra-

tus: vieną papildomą kvadratą (1) iš kvadratų su kraštinėmis iš 3 degtukų (64 pieš.), keturis papildomus kvadratus (1–4) iš kvadratų su kraštinėmis iš 2 degtukų (65 pieš.).

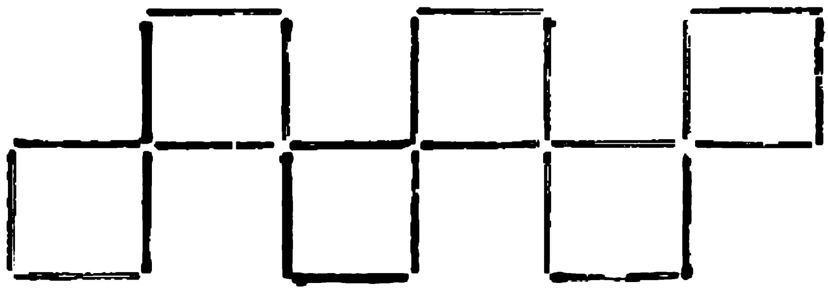


64 pieš.

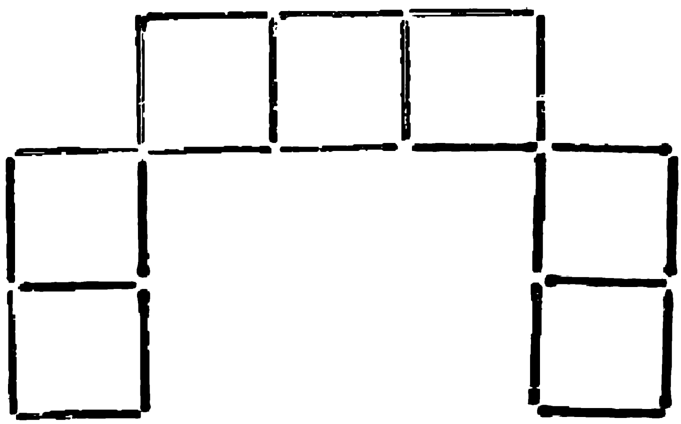


65 pieš.

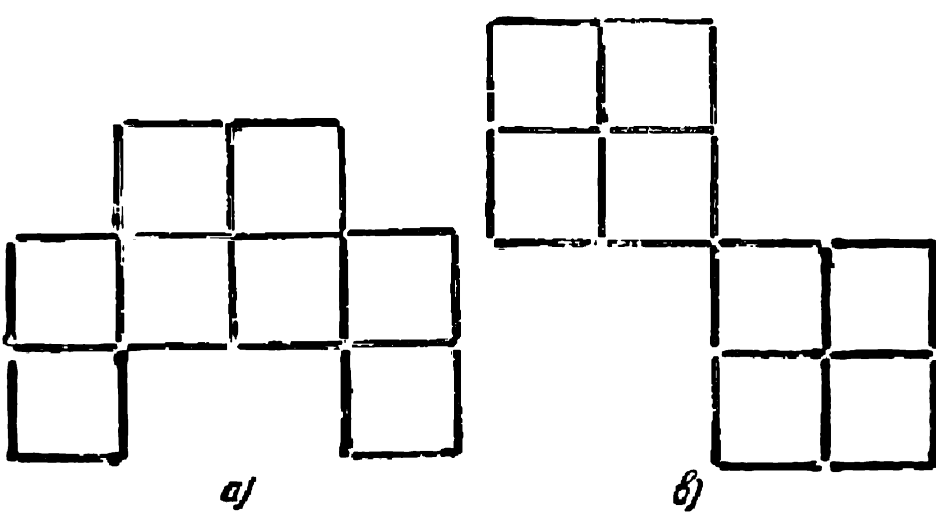
Jeigu iš kiekvienų keturių degtukų sudarytume vieną kvadratą, tai iš 24 degtukų galėtume gauti 6 vienodus kvadratus (66 pieš.). Jeigu kai kuriuos degtukus palaikytume



66 pieš.



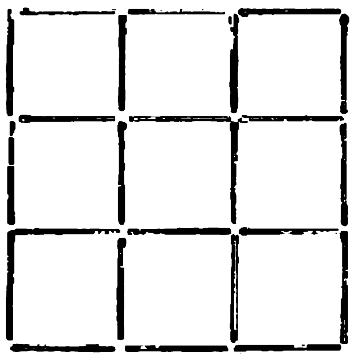
67 pieš.



68 pieš.

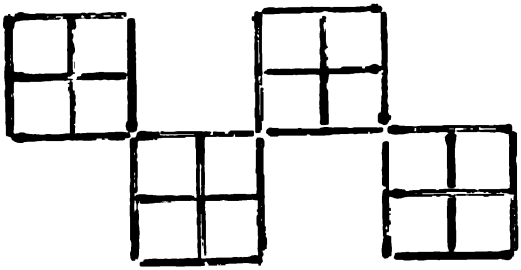
dukart kvadrato kraštinėmis, tai galėtume sudaryti 7 vienodus kvadratus (67 pieš.), arba 8 (68 pieš.), arba netgi 9 (69 pieš.).

Sudarant tris pastarąsias figūras, susidarė dar kitokių dydžių papildomi kvadratai: vienas — 68 piešinyje, *a*, du — 68 piešinyje, *b*, ir penki — 69 piešinyje (raskit juos!).



69 pieš.

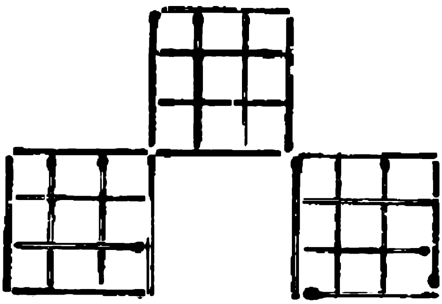
Kai kvadrato kraštinė iš $\frac{1}{2}$ degtuko (leidžiama vieną degtuką uždėti skersai ant kito), galima gauti 16 vienodo dydžio kvadratų ir 4 papildomus kvadratus. Iš viso 20 kvadratų (70 pieš.).



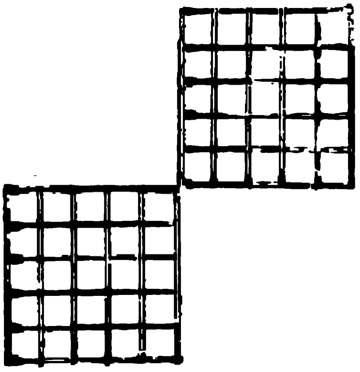
70 pieš.

Iš 24 degtukų, kai kvadrato kraštinė iš $\frac{1}{3}$ degtuko, galima sudaryti 27 vienodus kvadratus, o su papildomais kitų

dydžių kvadratais — 42 (71 pieš.), ir pagaliau, kai kvadrato kraštinė iš $\frac{1}{5}$ degtuko,— 50 vienodo didumo kvadratų



71 pieš.



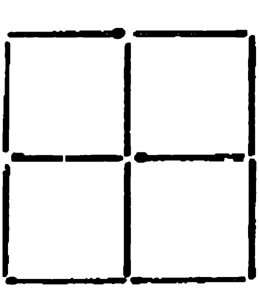
72 pieš.

(72 pieš.). Jeigu priskaitytume ir papildomus kvadratus (jų 60), tai iš viso gautume 110 kvadratų.

Sugalvokite, kaip išspręsti tolesnius uždavinius-galvosūkius*.

122. Šešetas galvosūkių

Iš 12 degtukų sudėjus 4 nedidelius vienodus kvadratus (73 pieš.), susidarė dar vienas papildomas kvadratas (didysis). Reikia:



73 pieš.

a) Perdedant degtukus, sudaryti 2 nelygius kvadratus.

b) Atimti 2 degtukus; kitų neliesti; turi likti 2 nelygūs kvadratai.

c) Perdėti 3 degtukus taip, kad susidarytų trys lygūs kvadratai.

d) Perdėjus 4 degtukus, sudaryti 3 lygius kvadratus.

---

* Vienu numeriu sunumeruoti tie uždaviniai, kuriuos reikia pradėti spręsti išeinant iš to paties pradinio degtukų išdėstymo. Kiekvienas uždavinys gali būti sprendžiamas nepriklausomai nuo pirmesnių.

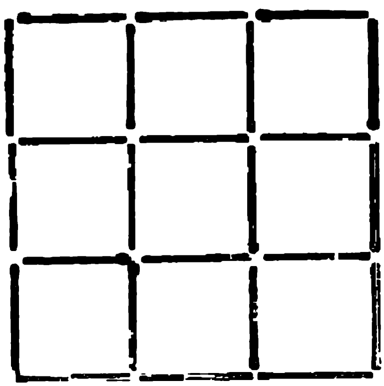
e) Perdėjus 2 degtukus, sudaryti 7 kvadratus (šiame ir paskesniame uždaviniuose leidžiama vieną degtuką uždėti skersai kito).

f) Perdėjus 4 degtukus, gauti 10 kvadratų.

123. Dar aštuonetas galvosūkių

Iš 24 degtukų sudėta kvadrato figūra su devyniais kvadratiniais laukeliais (74 pieš.). Reikia:

a) Perkėlus 12 degtukų, sudaryti 2 lygius kvadratus.



74 pieš.

b) Atimti 4 degtukus taip, kad likusieji sudarytų vieną didelį ir keturis mažus kvadratus.

c) Atėmus arba 4, arba 6, arba 8 degtukus, sudaryti 5 lygius kvadratus.

d) Nuimti 8 degtukus taip, kad likusieji sudarytų 4 lygius kvadratus (2 sprendiniai).

e) Nuimti 6 degtukus — sudaryti 3 kvadratus.

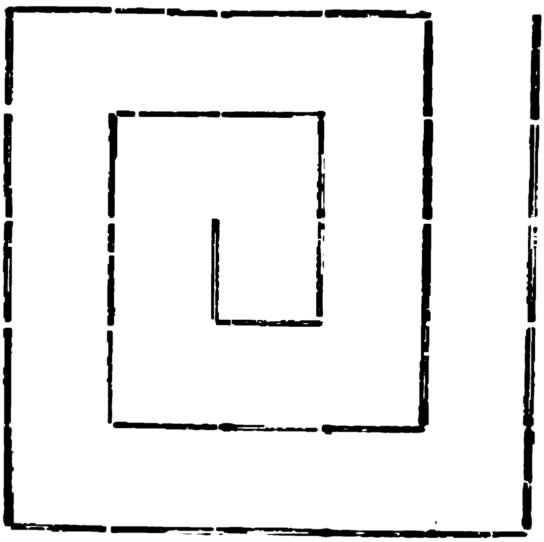
f) Nuimti 8 degtukus — liks 2 kvadratai (2 sprendiniai).

g) Atimti kitus 8 degtukus — liks 3 kvadratai.

h) Atimti 6 degtukus — gaunami 2 kvadratai ir 2 lygūs netaisyklingi šešiakampiai.

124. Iš devynių degtukų

Iš devynių degtukų sudaryti 6 kvadratus (leidžiama vieną degtuką uždėti skersai kito).



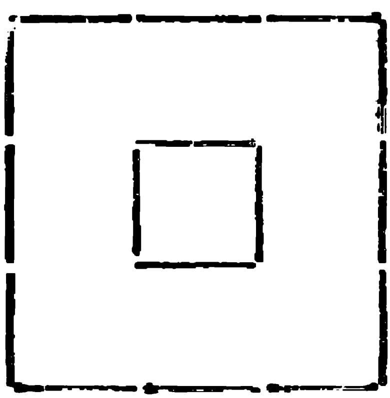
75 pieš.

125. Spiralė

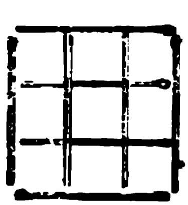
Iš 35 degtukų sudėta figūra, primenanti «spiralę» (75 pieš.). Perdėkite 4 degtukus taip, kad susidarytų 3 kvadratai.

126. Pokštas

Iš šešiolikos degtukų sudėtas tvirtovės, apjuostos giliu griovių, «planas» (76 pieš.). Kaip panaudojus dvi lentas (degtukus), kurių ilgis kaip tik lygus griovio pločiui, pakliūti į tvirtovę?



76 pieš.



77 pieš.

127. Pašalinti du degtukus

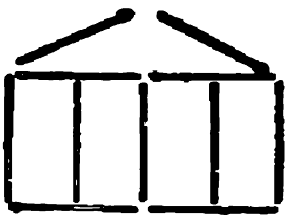
Figūra, atvaizduota 77 piešinyje, sudaryta iš aštuonių viens ant kito uždėtų degtukų. Pašalinti 2 degtukus taip, kad liktų 3 kvadratai.

128. Pokštas

Padėti 6 degtukus taip, kad susidarytų kvadratas.

129. Namo fasadas

«Namo fasadas» sudėtas iš 11 degtukų (78 pieš.). Perkėlus 2 degtukus, galima gauti 11 kvadratų, o perkėlus 4 degtukus, tą patį «namą» galima paversti figūra, turinčia 15 kvadratų. Padarykite!



78 pieš.

130. Trikampiai

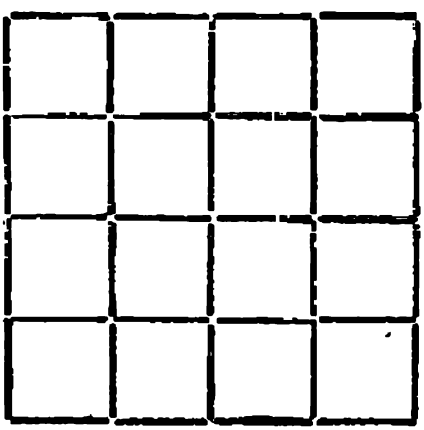
Vienam lygiakraščiui trikampiui sudaryti būtinai reikia 3 degtukų (jeigu jų nelaužysime), o šešiems tarpusavy lygiems lygiakraščiams trikampiams sudaryti užtenka 12 degtukų.

Padarykite!

Po to 4 degtukus perdėkite iš vienos vietos į kitą taip, kad susidarytų 3 lygiakraščiai trikampiai, iš kurių tik du būtų tarpusavy lygūs.

131. Kiek degtukų reikia nuimti?

Sudėta 16 vienodų kvadratų (79 pieš.). Jeigu suskaičiuotume visus kvadratus, kurie yra šioje figūroje, tai iš viso jų prisirinktų... Beje, suskaičiuokite patys! Kiek degtukų (mažiausiai) reikia nuimti, kad likusioji figūra nesudarytų nė vieno, tiek didelio, tiek ir mažo, kvadrato?



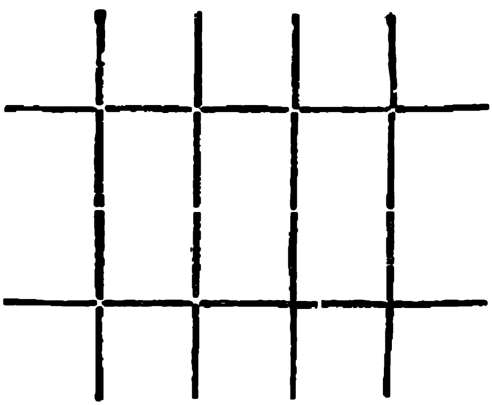
79 pieš.

132. Pokštas

Kiekvieno degtuko ilgis 4,5 *cm*. Kaip iš 20 degtukų sudedamas metras?

133. Tvora

Tvoroje, atvaizduotoje 80 piešinyje, perdėkite 14 degtukų taip, kad gautumėte 3 kvadratus.



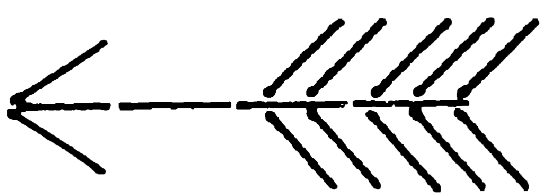
80 pieš.

134. Pokštas

Panaudoję du degtukus, jų nelauždami ir nepiaudami, sudarykite kvadratą.

135. Strėlė

Iš šešiolikos degtukų 81 piešinyje padaryta strėlė.



81 pieš.

a) Perdėkite 8 degtukus taip, kad gautumėte 8 lygius trikampius.

b) Perdėkite 7 degtukus taip, kad gautumėte 5 lygius keturkampius.

136. Kvadratai ir rombai

Iš 10 degtukų reikia sudėti 3 kvadratus. Po to atimti vieną degtuką, o iš likusių degtukų sudaryti vieną kvadratą ir du rombus.

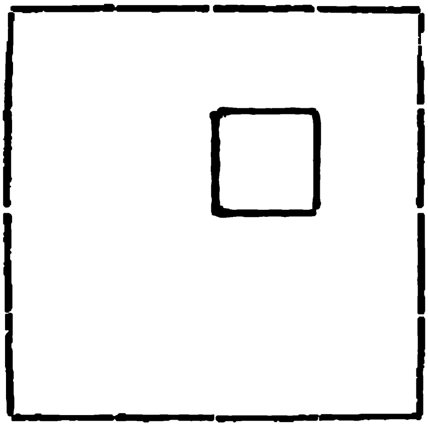
137. Vienoje figūroje įvairūs daugiakampiai

Aštuonis degtukus sudėkite taip, kad susidarytų vienas aštuoniakampis, du kvadratai ir aštuoni trikampiai — visi vienoje figūroje.

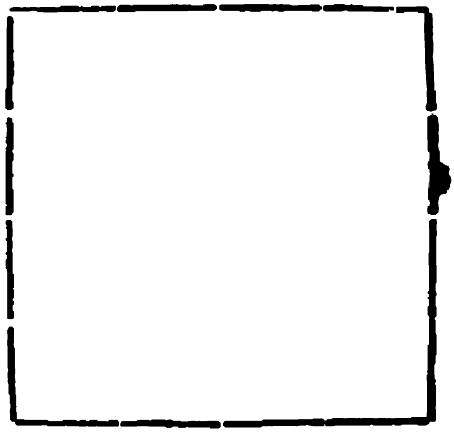
138. Sodo planavimas

Šešiolika degtukų, išdėliotų kvadrato forma, vaizduoja sodo tvorą (82 pieš.). Dalį šio sodo ploto užima namas, atvaizduotas kvadrato iš keturių degtukų pavidalu.

Reikia 10 degtukų pagalba padalyti likusią sodo dalį į 5 sklypus, vienodus savo forma ir plotu.



82 pieš.

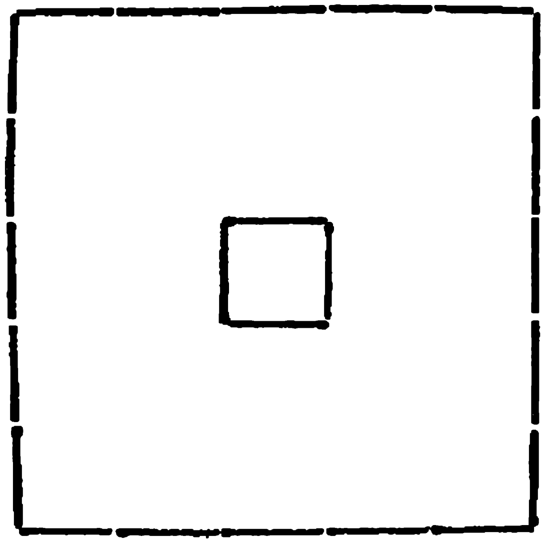


83 pieš.

139. Į lygiaplotes dalis

a) Kvadratą, sudarytą iš 16 degtukų (83 pieš.), reikia 11 degtukų pagalba padalyti į 4 lygiaplotes dalis taip, kad kiekviena iš dalių liestųsi su kitomis trimis.

b) Sodą, kurio kontūrai sudaryti iš 20 degtukų ir kurio viduryje yra kvadrato formos šulinys (84 pieš.), reikia:



84 pieš.

1) su 18 degtukų pagalba padalyti į 6 lygiaplotes ir vienodos formos dalis,

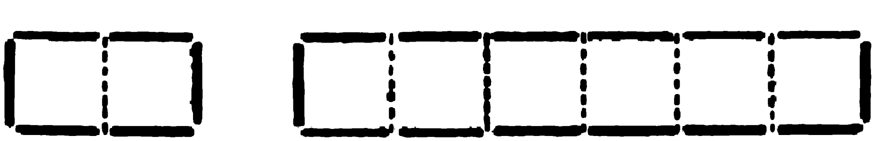
2) su 20 degtukų pagalba padalyti į 8 lygiaplotes ir vienodos formos dalis.

140. Parketas

Kiek reikės degtukų, norint apdėlioti vieną kvadratinį metrą vienodais kvadratais, kurių kraštinės iš vieno degtuko? Vidutinis degtuko ilgis — 5 *cm*.

141. Plotų santykis lieka tas pats

Iš 20 degtukų sudaryti du stačiakampiai: vienas iš 6 degtukų, o antras iš 14 (85 pieš.).



85 pieš.

Punktyrinėmis linijomis pirmasis stačiakampis padalytas į 2 kvadratus, o antrasis — į 6. Vadinasi, antrojo stačiakampio plotas 3 kartus didesnis už pirmojo plotą.

Dabar išskirstykite tuos pačius 20 degtukų į kitas dvi grupes — iš 7 ir 13 degtukų. Iš kiekvienos grupės degtukų sudėkite po vieną figūrą (jos gali būti nevienodos formos) taip, kad antrosios figūros plotas būtų 3 kartus didesnis už pirmosios plotą.

142. Rasti figūros kontūrus*

Duota 12 degtukų. Kiekvieną iš jų laikykime ilgio vienetu. Reikia iš 12 degtukų sudėti figūrą, kuri užimtų 3 kvadratinių vienetų plotą ir būtų ištisinė, o ne sudaryta iš atskirų kvadratų.

Tai sunkus uždavinys.

143. Rasti įrodymą

Sudėkite du degtukus greta taip, kad jie sudarytų vieną tiesiąją liniją, ir samprotavimų pagalba įrodykite jūsų dėstinio teisingumą.

Įrodymui reikia iš degtukų sudėti papildomą dėstinį, kuriam leidžiama panaudoti bet kurį degtukų skaičių.

144. Sudėti ir įrodyti

Iš degtukų sudėti taisyklingą šešiakampį. Įrodyti dėstinio teisingumą.

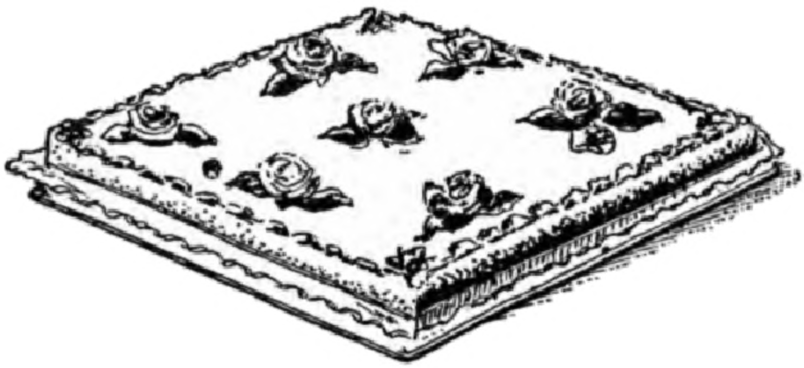
---

* Paskutinieji 3 uždaviniai tinkami 7-tų, 8-tų klasių mokiniams.

KETVIRTASIS SKYRIUS

SEPTYNIS KARTUS ATMATUOK, AŠTUNTĄ KARTĄ KIRPK

145. Septynios roželės ant torto.



86 pieš.

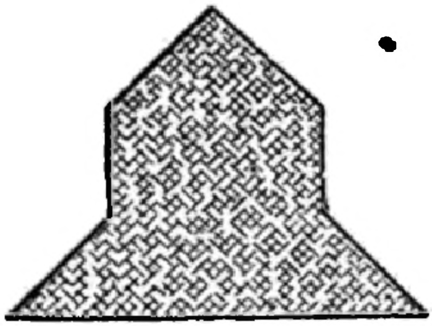
Prie arbatos buvo nupirktas tortas (86 pieš.). Trimis tiesiomis linijomis jis buvo padalytas į 7 dalis. Kiekvienai daliai teko po vieną rożelę.

Kaip buvo padalytas tortas?

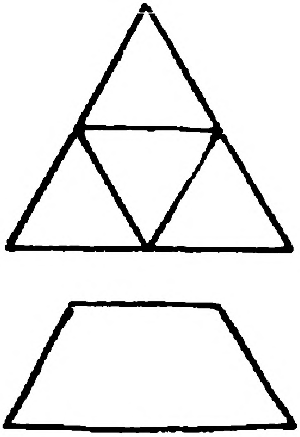
146. Į lygias dalis

1) Figūrą, atvaizduotą 87 piešinyje, persibrėžkite ant popieriaus lapo ir padalykite ją į 4 lygius keturkampius (figūros vadinamos lygiomis, jei uždėtos viena ant kitos sutampa visomis savo dalimis).

2) Kaip padalyti lygiakraštį trikampį į 4 lygias dalis, matyti iš 88 piešinio. Pašalinkite viršutinį trikampį; likusieji 3 trikampiai sudaro figūrą, geometrijoje vadinamą trapecija. Pabandykite padalyti ją taip pat į 4 lygias dalis.



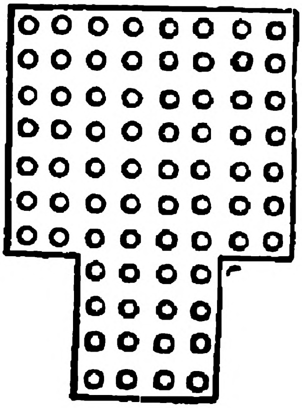
87 pieš.



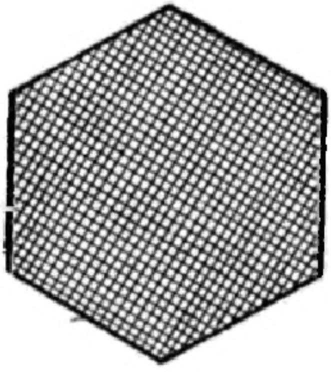
88 pieš.

3) Plokštelę, atvaizduotą 89 piešinyje, padalykite į 6 lygias plokšteles.

4) Jei daugiakampio visi vidaus kampai tarp savęs lygūs ir visos kraštinės taip pat lygios, tai jis vadinamas *taisyklinguoju*.



89 pieš.

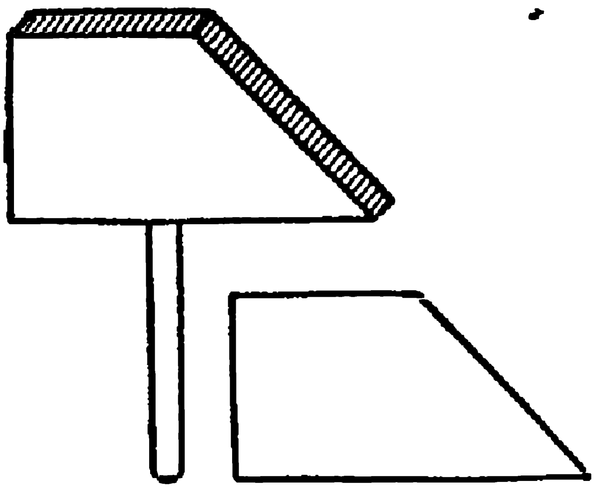


90 pieš.

Padalykite taisyklingąjį šešiakampį (90 pieš.) į 12 lygių keturkampių. Ar bus tie keturkampiai taisyklingi, t. y. ar bus jie kvadratai?

147. Plaktuko piūvis

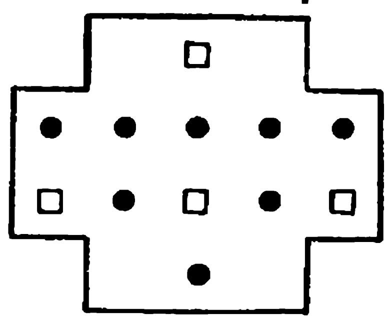
Ne kiekvieną trapeciją galima padalyti į 3—4 tarpusavy lygias mažas trapecijas. Ar ne taip? Bet trapeciją (91 pieš.), kuri gaunama plaktuko be kotelio išilginiame piūvyje, jūs lengvai padalysite į 4 visiškai vienodas stačiakampes trapecijas.



91 pieš.

148. Patarkite

Vieno prietaiso apatinės dalies planas atvaizduotas 92 piešinyje.



92 pieš.

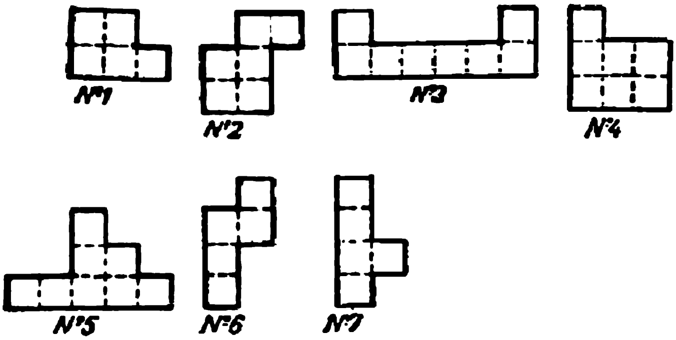
Patarkite, kaip prietaisą pertverti, kad gautųsi 4 kameros, vienodos savo forma ir didumu, be to, kad kiekvienoje kameroje būtų po 2 kaištelius (atvaizduoti taškais) ir po vieną skylutę (atvaizduotos mažais kvadratais).

149. Be nuostolių!

Jūs tikriausiai žinote, kad gamyklose kai kurie ruošiniai ne iš karto pakliūva apdirbimui į stakles, sakysim, į drožimo ar gręžimo, o iš pradžių perduodamos nužymėtojui, kuris ant jų pažymi reikalingas linijas ir taškus. Nužymėtojo nuovoka ir sugebėjimas gali nemažai padėti kovoje už medžiagos sutaupymą, už atlaikų sumažinimą.

Kartą gamykloje prireikė labai daug septynių fasonų žalvarinių daugiakampių plokštelių, atvaizduotų 93 piešinyje. Nužymėtojas pastebėjo, kad viena iš septynių plokštelių (nustatykite kuri) telpa lygiai 6 kartus nedideliame žalvario stačiakampiame lape. Kitoms plokštelėms paga-

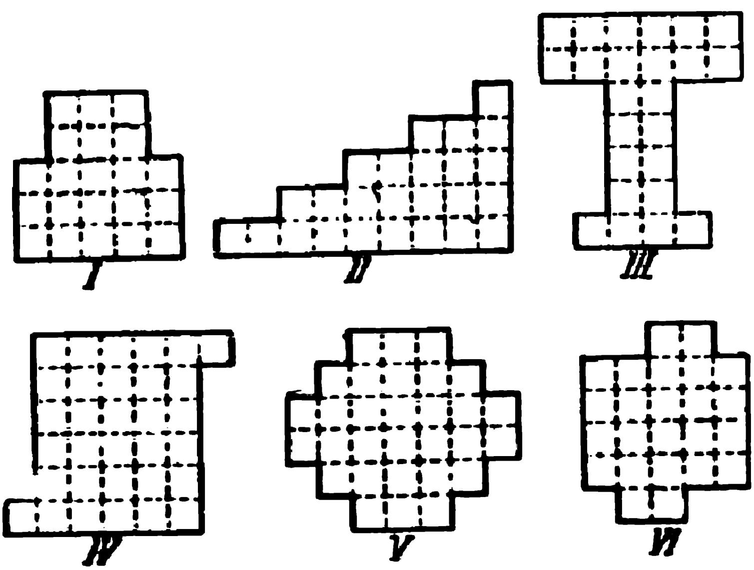
minti nužymėtojas taip sumaniai parinko iš atlaikų lakštinio žalvario atpiovas (94 pieš.), kad kiekvieną jų buvo



93 pieš.

galima supiaustyti, neprarandant žalvario nė vieno kvadratinio centimetro, į to paties fasono plokšteles.

Pavyzdžiui, iš *I* lakštinės atpiovos (94 pieš.) gaunamos 3 plokštelės Nr. 4 (93 pieš.), iš *II* atpiovos — 5 plokštelės



94 pieš.

Nr. 7 ir t. t. Kurios iš 93 piešinyje atvaizduotų plokštelių gali būti išpiautos iš kitų lakštinių atpiovų, atvaizduotų 94 piešinyje,— tai jūs patys nustatykite.

Nurodysiu dar, kad *III* lakštinė atpiova padalijama į 3 vienodo fasono plokšteles, *IV* lakštinė atpiova — į 4 vienodo fasono plokšteles, *V* — į 6, o *VI* — į 4 vienodo fasono plokšteles. Nepamirškite, kad vieno iš duotų septynių fasonų 6 plokštelės išpiaunamos iš stačiakampio žalvario lakšto.
Persibrėžkite į sąsiuvinį 94 piešinį ir raskite ant kiekvienos lakštinės atpiovos reikalingų piūvių linijas.
Uždaviniui palengvinti 93 ir 94 piešiniuose išbraižyti langeliai.

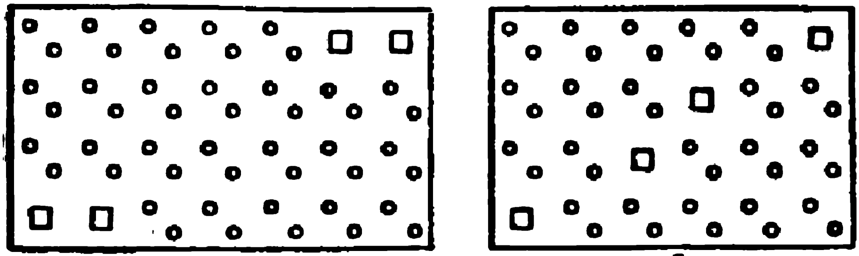
150. Kada fašistai kėsinosi į mūsų žemę...

Viename bute, prieš pačią užtemdymo pradžią, staiga pristigo užuolaidų kvadratiniam langui, kurio plotas $120 \times 120\ cm^2$. Čia pat nieko nebuvo, išskyrus stačiakampį faneros lapą, kurio plotas atitiko lango plotą, bet matmenys buvo ne tokie: $90 \times 160\ cm^2$.
Iš pradžių visi kažkaip net nesusigaudė, bet praėjo truputis laiko, ir pionierius Vasia, apsiginklavęs liniuote, pradėjo vikriai braižyti stačiakampį faneros lapą.
Pagal nubrėžtas linijas Vasia faneros lapą perpiovė tik į dvi dalis, iš kurių ir sudarė reikiamų matmenų kvadratinį skydą langui užtemdyti.
Raskite šio uždavinio sprendimą.

151. Elektromonterio atsiminimai

Kiekviename bute su elektros apšvietimu yra lentelė (marmurinė) su saugikliniais «kamščiais», o kiekvienoje gamykloje jūs išvysite jų labai daug. Paprastai lentelės yra stačiakampės arba kvadratinės, bet Didžiojo Tėvynės karo metu mūsų monterių brigada, taupydama marmurą, kartais nukrypdavo nuo nustatytų formų. Pamenu, pas mus buvo dvi didelės marmurinės lentos (95 pieš.) su pragręžtomis mažomis apvaliomis ir keliomis kvadratinėmis skylutėmis. Mums prireikė iš jų išpiauti 8 nedideles lenteles.
Ir šiaip ir taip brigadininkas matavo, kol pagaliau suvokė, kad pirmąją lentą (95 pieš., *a*) galima padalyti į 4 l y g i a s lenteles, be to, kiekvienoje jų bus po vieną kvad-

ratinę ir po 12 apvalių skylučių, ir antrąją lentą (95 pieš., *b*) — taip pat į 4 tarpusavy lygias lenteles, bet



a) *б)*

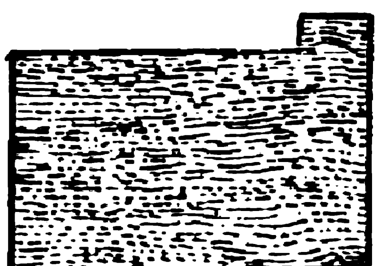
95 pieš.

kiekvienoje jų bus po vieną kvadratinę ir po 10 apvalių skylučių. Taip mes ir padarėme.

Raskite sprendimą.

152. Viskas sunaudojama

«Ar iš šios atpiovos galima gauti 64 langelių šachmatų lentą? — pagalvojau aš, atidžiai žiūrėdamas į riešuto medžio stačiakampį lentos gabalą su dviem, taip pat stačiakampiais, iškyšuliais (96 pieš.). Išmatavęs lentą, aš apskaičiavau, kad ją galėsiu sunaudoti visą, nieko neatmesdamas.

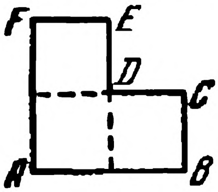


96 pieš.

Toliau aš ją subraižiau į 64 lygius langelius (pasirodė, kad kiekviename iškyšulyje tilpo po 2 langelius) ir, perpiovęs lentą tik į 2 dalis, tarp kitko, vienodas savo dydžiu ir forma, iš jų suklijavau šachmatų lentą. Raskite piūvio liniją.

153. Galvosūkis

Figūra *ABCDEF* (97 pieš.) sudaryta iš trijų lygių kvadratų.



97 pieš.

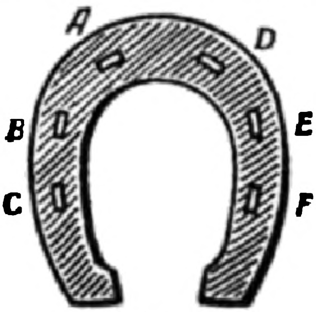
Reikia šią figūrą padalyti į 2 dalis taip, kad iš susidariusių dalių būtų galima sustatyti kvadratinį rėmą. Rėmo vidury esanti anga turi būti taip pat kvadratinės formos, lygios kiekvienam iš trijų duotąją figūrą sudarančių kvadratų.

154. Perkirsti pasagą

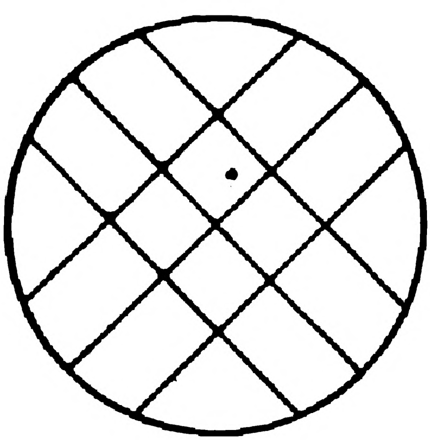
Nusipieškite pasagą ir suvokite, kaip dviem kirvio kirčiais, neperkeliant po kirčio susidariusių dalių, galima ją padalyti į 6 dalis.

155. Kiekvienoje dalyje — skylė

O štai jums pasaga su skylėmis vinims (98 pieš.). Dviem kirčiais perkirskite ją į 6 dalis taip, kad kiekvienoje dalyje būtų po vieną skylę.



98 pieš.



99 pieš.

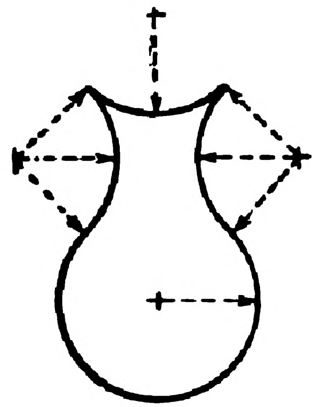
156. Dar daugiau!

Pabandykite padalyti skritulį šešiomis tiesiomis linijomis į didžiausią galimą dalių skaičių.

Skritulys, atvaizduotas 99 piešinyje, padalytas, pavyzdžiui, į 16 dalių, tačiau tai dar ne riba. Spręsdami pasistenkite išdėstyti tiesiąsias linijas simetriškai.

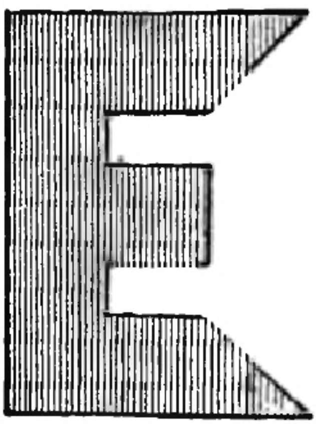
157. Iš ąsočio — kvadratas

Persibrėžkite ant popieriaus lapo ąsočio formos figūrą, atvaizduotą 100 piešinyje, ir dviem tiesialinijiniais piūviais padalykite ją į tokias 3 dalis, iš kurių galima būtų sudėti kvadratą.



100 pieš.

158. Kvadratas iš «raidės E»

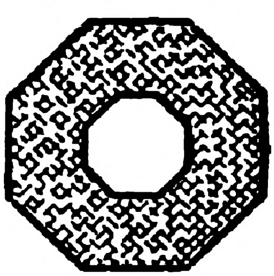


101 pieš.

Kruopščiai perpieškite ant popieriaus lapo dar vieną figūrą (101 pieš.), turinčią raidės «E» kontūrus. Reikia figūrą «E» padalyti tiktai į 7 dalis ir n e d a u g i a u k a i p k e t u r i a i s tiesialinijiniais piūviais, o po to iš visų gautųjų dalių sudėti kvadratą.

P a s t a b a. Kiekvienas smailus kampas šioje figūroje «E» sudaro pusę stataus kampo, o kiekvienas bukas kampas — tris kartus didesnis už smailų.

159. Gražus pavertimas

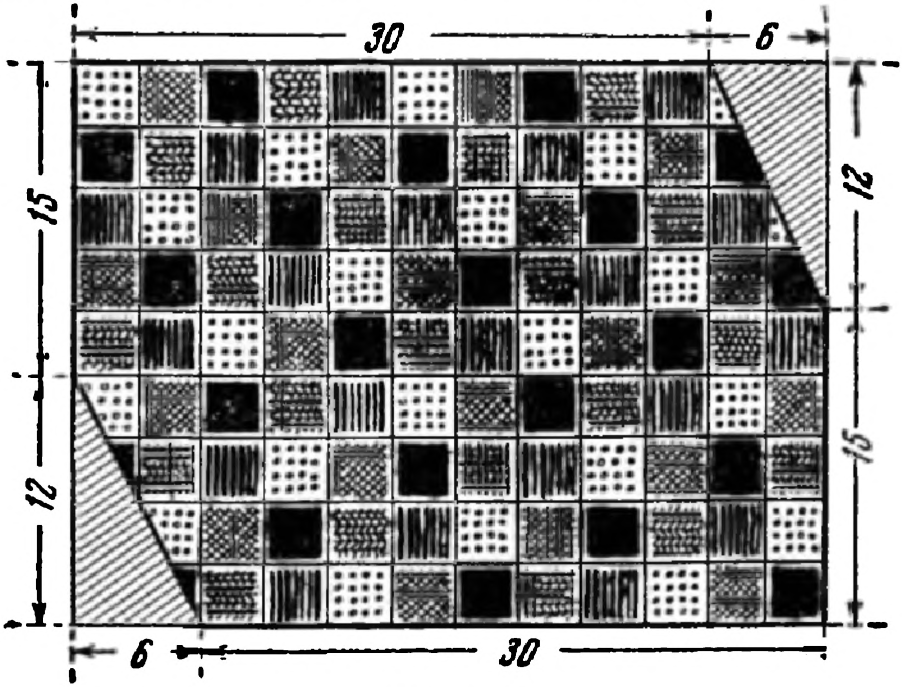


102 pieš.

Perpieškite ant plono kartono arba ant storo popieriaus 102 piešinyje atvaizduotą taisyklingą aštuoniakampį, o centre išpiaukite taip pat taisyklingo aštuoniakampio formos skylę. Susidariusią figūrą reikia padalyti į 8 lygius gabaliukus ir, perdedant juos, sustatyti aštuoniakampę žvaigždę, kuri taip pat turėtų aštuoniakampę skylę.

160. Senovinės mozaikos atnaujinimas

Iš vienos senovinės stačiakampės mozaikos (103 pieš.) teko pašalinti du nedidelius sugadintus trikampius gabaliukus (103 piešinyje subrūkšniuoti trikampiai).



103 pieš.

Dailiųjų amatų mokyklos auklėtiniai nusprendė atnaujinti mozaikos stačiakampę formą, išsaugojant jos piešinį ir neprarandant nė vieno jos gabaliuko. Jie perpiovė mozaiką tik į 2 dalis, iš kurių ir sudėjo naują stačiakampį (paaiškėjo, kad tai kvadratas). Be to, mozaikoje neteko jiems nieko perdirbti.

Kaip jiems tai pavyko?

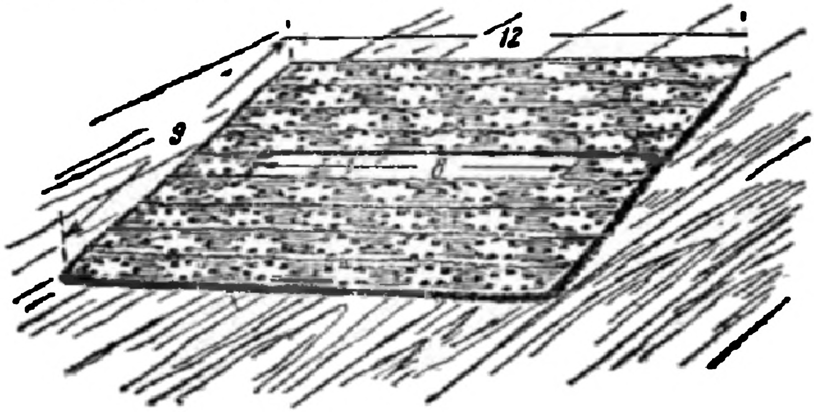
161. Brangi dovana

Kada Nuri Saradževa buvo dar paauglė, ji, kaip ir žinoma Mamliakat, viena iš pirmųjų savo kolūkyje pradėjo taikyti patobulintą medvilnės rinkimo būdą. Nuri gavo

dovanų gražų puikių turkmėnų kilimų gamintojų darbo kilimėlį. Šią pirmąją savo dovaną Nuri labai vertino.

Dabar ji užaugo ir dirba savo gimtajame kolūkyje kaip agronomas. Kilimėlis, žinoma, pas ją ant grindų jos laboratorijoje.

Kartą, atlikdama kažkokius tyrimus, Nuri ant kilimėlio paliejo rūgštį ir pradegino kaip tik patį vidurį. Teko sugadintąją dalį iškirpti iš kilimėlio vidurio. Liko didelė, stačiakampė, 1×8 dm^2 skylė (104 pieš.).



104 pieš.

Tačiau Nuri savo kilimėlio nenumetė. Ji labai sumaniai perkirpo išlikusią kilimėlio dalį į dvi dalis taip, kad sudėtos kartu jos sudarė kvadratą. Siūlės buvo nepastebimos, ir vėl buvo gautas puikus kilimėlis.

Kaip ji tai padarė?

162. Dovana senelei

Mergaitė turi languoto audeklo gabalą. Ji laiko jį rankose (105 pieš.). Iš šio audeklo gabalo mergaitė panoro senelei dovanų padaryti kvadratinės formos skarelę. Griežta baltų ir juodų langelių kaita, suprantama, skarelėje turėjo būti išlaikyta.

Audeklo gabalą mergaitei pavyko perkirpti iš viso tik į 4 dalis, be to, taip, kad skarelei padaryti ji sunaudojo

visą audeklo gabalą ir visos dalys, į kurias ji sukarpė audeklą, buvo vienodos formos.

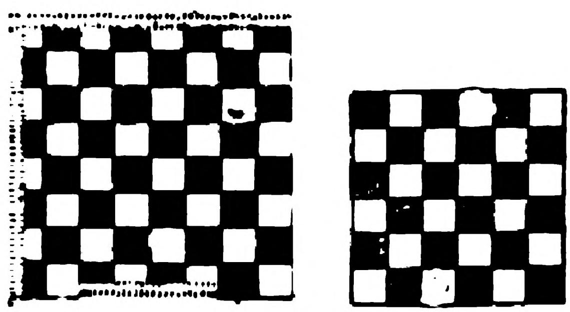
Ar jums tai pavyktų? Turėkite galvoje, kad tai ne taip paprasta, kaip iš pirmo žvilgsnio atrodo.

163. Senutės skarelės padidinimas

Greitai po to, kai mergaitė sukombinavo senelei kvadratinę languotą iš 64 langelių skarelę (žr. pirmesnį uždavinį), ji pas save atrado dar to paties audeklo kvadratinį, turintį 36 langelius, gabalą. Mergaitė nutarė medžiagas sujungti į vieną kvadratinę skarelę. Darbas pasunkėjo, nes



105 pieš.



106 pieš.

ji jau apmereškavo skarelės kraštus ir padarė kutelius prie dviejų skarelės šonų ištisai, o prie trečiojo — pusiau (106 pieš.).

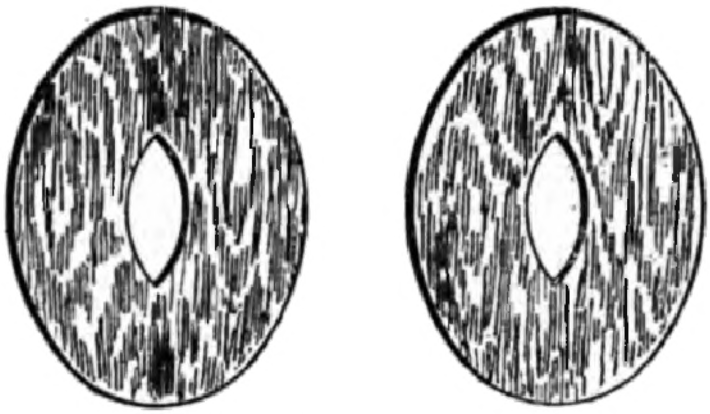
Ir antrą kartą mergaitei padėjo jos konstruktorinė nuovoka.

Ji perkirpo skarelę į 2 dalis ir naują jos atrastą audeklo gabalą — taip pat į 2 dalis. Iš gautųjų 4 dalių ji susiuvo 100 langelių didelę skarą, be to, visi kuteliai, padaryti prie pirmosios skarelės, taip ir liko išorėje, palei didžiosios skarelės kraštus.

Pabandykite mergaitės sprendimą pakartoti su popieriniais modeliais.

164. Uždavinys staliui

Staliui atnešė 2 vienodas ovalines lentas su pailgomis skylėmis centre (107 pieš.) ir užsakė padaryti iš jų vieną apskritą ištisinį stalo viršų.



107 pieš.

Lentos pasirodė esančios iš retos, brangios medžio rūšies, ir meistras panoro jas sunaudoti pilnutinai, be jokių atliekamų nuopiovų.

Ar tai įmanoma?

Kad nepadarytų bereikalingų, neapgalvotų piūvių, stalius pradžioje iš storo popieriaus iškirpo lentos pavyzdį, įsižiūrėjo į formą, kai ką patikrino skriestuvu. Pasirodė, kad meistro ketinimai pilnai įvykdomi ir, be to, su nedideliu kiekvienos dalies piovimų skaičiumi.

Kaip stalius supiaustė atneštąsias lentas?

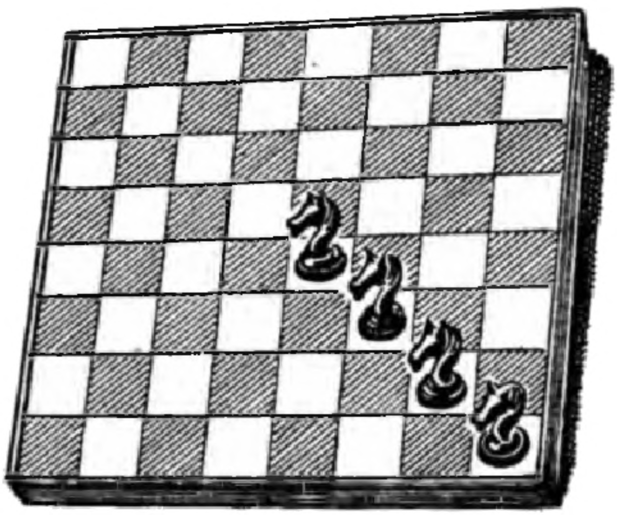
165. Ir pas kailininką geometrija!

Kailininkui reikėjo ant kailio užsiūti įvairiakraščio trikampio pavidalo lopinį. Jis sukirpo iš tokio pat kailio lopinį, bet padarė klaidą. Prie skylės kailyje lopinys pritiko tik išvirkščiąja puse. Tai nelaimė! Juk nenumesi atkirpto brangaus kailio gabalo. Bet kaip apversti jį gerąja puse, kartu išlaikant trikampio konfigūraciją?

Ilgai kailininkas galvojo ir vis dėlto sugalvojo. Jis suvokė, kad reikia gabalą kažkaip padalyti į tokias dalis, kurių kiekviena, ją apverčiant, gultų į savo pirmykštę vietą. Bet kaip padalyti?

166. Kiekvienam žirgui po arklidę

Šachmatų lenta su 4 žirgais atvaizduota 108 piešinyje. Reikia supiaustyti lentą į 4 lygias ir vienodos formos dalis, be to, kiekvienoje iš tų dalių turi likti po žirgą.



108 pieš.

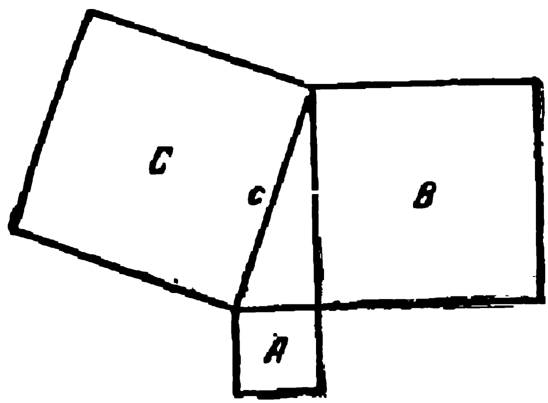
167. Daugiakampio pavertimas kvadratu

Ar galima 2 bet kokius kvadratus paversti vienu? Tai reiškia, jei aš nubrėšiu 2 bet kokius kvadratus, ar jūs rasite būdą padalyti juos į tokias dalis, iš kurių galima būtų sudaryti v i e n ą kvadratą?

Pirmasis bendras šio uždavinio sprendinys priskiriamas senovės graikų mokslininkui Pitagorui (VI amžius prieš mūsų erą), tačiau vienos figūros pavertimo kita uždaviniais užsiiminėjo dar tūkstantį ar pusantro tūkstančio metų

prieš Pitagorą indų matematikai (ryšium su įstabaus statybos meno išsivystymu senovės Indijoje).

Įdomu tai, kad, turint nubrėžtus 2 kvadratus, galima iš anksto įsivaizduoti ir tą trečią kvadratą, į kurį «sudedami» pirmi du. Tam tikslui duotus kvadratus *A* ir *B* išdėstykite taip, kad pirmojo kraštinės būtų antrojo kraštinių tęsiniai (109 pieš.) ir sujunkite dvi viršūnes tiesės atkarpa *c*, kaip



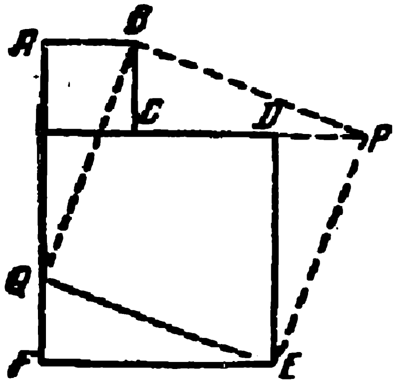
109 pieš.

parodyta 109 piešinyje. Susidaro statusis trikampis. Jeigu dabar nubrėžtume ant susidariusio stačiojo trikampio kraštinės *c* (ant įžambinės) dar vieną kvadratą *C*, tai jis ir bus tas kvadratas, kurį galima sudaryti iš pirmųjų dviejų kvadratų dalių.

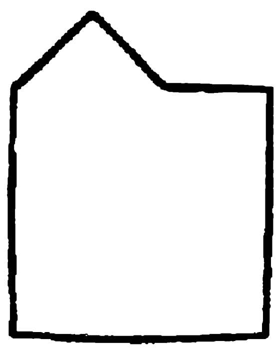
Tačiau kaipgi duotuosius kvadratus padalyti? Prieš du su puse tūkstančio metų, kurie skiria mus nuo Pitagoro, buvo sugalvota labai daug praktinių šio uždavinio sprendinių. Štai vienas iš jų — gražus ir ekonomiškas.

Išdėstykime duotus kvadratus figūros *ABCDEF* pavidalu (110 pieš.). Ant kraštinės *AF* atidėkime atkarpą $FA = AB$ ir perkirskime figūrą tiesėmis *EQ* ir *BQ*. Perdėkime trikampį *ABQ* į padėtį *BCP*, o trikampį *EFQ* — į padėtį *EDP;* susidaro kvadratas *EQBP*, apimąs visas abiejų duotų kvadratų dalis. Jo kraštinė lygi stataus trikampio *EFQ* įžambinei *EQ*, o abiejų duotų kvadratų kraštinės lygios statiniams *EF* ir *FQ*.

(Skaitytojas, susipažinęs su geometrija, pavyzdžiui, 7-os klasės mokinys, lengvai pats įrodys trikampių *BAQ, BCP, EFQ* ir *EDP* lygybę ir tai, kad *EQBP* — kvadratas. Tai bus kitoks, palyginus su mokykliniu, Pitagoro teoremos įrodymas.)



110 pieš.



111 pieš.

O dabar ant popieriaus persibrėžkite figūrą, vaizduojančią sujungtus kvadratą ir statų lygiašonį trikampį (111 pieš.); padalykite šią figūrą tiktai į 3 dalis ir iš jų sudarykite kvadratą.

168. Taisyklingojo šešiakampio pavertimas lygiakraščiu trikampiu

Štai jau keletą tūkstančių metų ir matematikus-specialistus, ir architektus, ir paprastus matematikos mėgėjus žavi geometriniai uždaviniai apie vienos figūros sudarymą iš kitos figūros dalių.

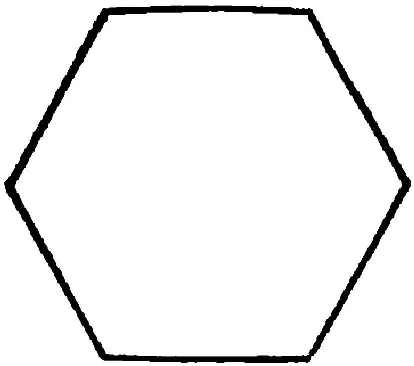
Egzistuoja vienos figūros pavertimo kita, duotą figūrą dalijant ir gautas dalis perdedant, bendri metodai*, bet praktiškai jais naudotis dauguma atvejų labai nepatogu, griozdiška.

Tokiuose uždaviniuose būva įdomu rasti būdą duotai figūrai padalyti į galimai mažiausią skaičių dalių. Tačiau tai nelengva ir reikalauja daug kantrybės ir išradingumo.

---

* Iš populiariosios šiuo klausimu literatūros žr., pavyzdžiui, Б. А. Кордемский и Н. В. Русалев, Удивительный квадрат, Гостехиздат, 1952.

Kaip, pavyzdžiui, geriausiu būdu padalyti duotą taisyklingą šešiakampį (112 pieš.) tiesialinijiniais piūviais, kad iš jo dalių galima būtų sudaryti vientisą taisyklingą trikampį?



112 pieš.

Yra keletas šio uždavinio sprendinių; kiekviename jų šešiakampis dalijamas tik į 6 dalis.

Pabandykite rasti tokį sprendinį.

Tarp kitko, galimumas padalyti šešiakampį į 5 tokias dalis, iš kurių galima būtų sudaryti taisyklingą trikampį, iki šio laiko niekeno netirtas, lygiai kaip ir niekeno nėra įrodytas tokio dalijimo negalimumas.

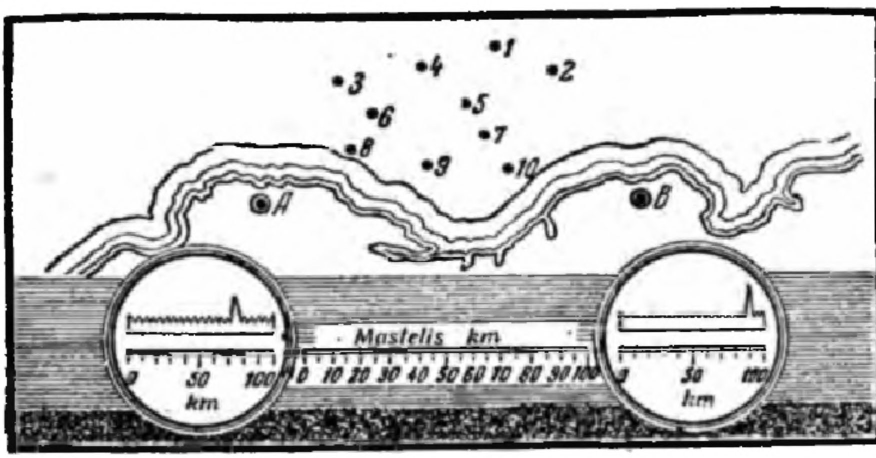
PENKTASIS SKYRIUS

KĄ ŽINOSI — VISADA PANAUDOSI

169. Kur yra taikinys?

Apskritimais 113 piešinyje atvaizduoti radiolokacijos stoties ekranai. Ekranuose švyti arba užsirašo zigzaginė linija; po ja yra nuotolio rodyklė.

Iš stoties išsiunčiama radijo banga. Šis momentas ekrane atitinka nulinį skalės tašką.



113 pieš.

Po tam tikro laiko radijo banga, atsimušusi nuo taikinio (pavyzdžiui, nuo laivo jūroje), sugrįžta į stotį. Tuo momentu ekrane atsiranda į viršų ištįsusi smailuma. Per praslinkusį laiką radijo banga padarė tarp stoties ir taikinio dvigubą kelią. Tačiau nuotolių rodyklė taip sužymėta,

kad skaičius, esąs po iškilusia smailuma, parodo nuotolį nuo stoties iki taikinio. Ekranas kairėje duoda pakrantės radiolokacijos stoties, esančios punkte *A*, parodymus. Ekranas dešinėje duoda radiolokacijos stoties, esančios punkte *B*, parodymus. Sakykime, abu ekranai tuo pačiu metu davė šių dviejų pakrančių stočių, ieškančių jūroje taikinio, parodymus.

Įvertinkite ekranų rodyklių parodymus, o po to, naudodamiesi jūros žemėlapio (113 pieš.) masteliu, nustatykite, kuriame iš 10 jūros punktų, paženklintų žemėlapyje skaičiais, yra stočių susektas taikinys?

170. Penkios minutės pagalvoti

Įsivaizduokite medinį kubą, kurio briauna yra 3 colių ilgio ir kurio visas paviršius nudažytas juoda spalva.

1) Kiek prireiks piūvių kubui padalyti į kubelius, kurių briaunos būtų 1 colio ilgio?
2) Kiek bus tokių kubelių?
3) Keli kubeliai turės 4 nudažytas sieneles?
4) „ „ „ 3 „ „
5) „ „ „ 2 „ „
6) „ „ „ 1 „ „
7) Keli kubeliai bus nedažyti?

171. Kaip turi prasilenkti priešais einą traukiniai?

Du traukiniai, kiekvienas po 80 vagonų, susitiko vienavėžiame kelyje, turinčiame nedidelę atsparinę atšaką (114 pieš.).



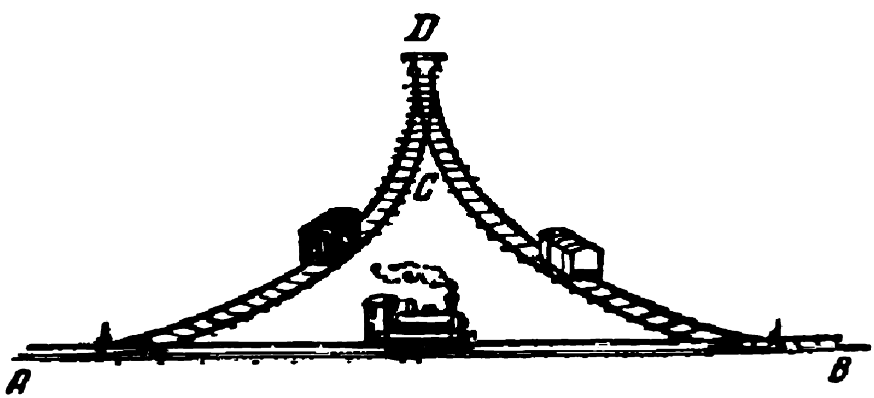
114 pieš.

Kaip prasilenkti šiems traukiniams, jei ant atsparinės atšakos gali tilpti garvežys ir ne daugiau kaip 40 vagonų?

172. Kelio trikampis

Pagrindinis geležinkelio kelias *AB* (115 pieš.) ir dvi nedidelės geležinkelio atšakos *AD* ir *BD* sudaro kelio trikampį. Jeigu ant pagrindinio kelio *AB* stovi garvežys priekiu į dešinę, tai, apvažiavęs kelio trikampį, jis jau bus priekiu į kairę.

Žiūrint į 115 piešinį, lengva «mintyse» įsivaizduoti, kaip turi judėti garvežys, kad «apsisuktų» priekiu į kitą pusę (tuo metu įsivaizduokite, kad ant atšakų vagonų nėra).



115 pieš.

Bet dabar garvežio mašinistui duotas kitas uždavinys. Jam reikia vagonus, stovinčius atšakose *AD* ir *BD*, sukeisti vietomis: baltą vagoną nuo atšakos *BD* pastatyti ant kelio *AD*, o raudoną — nuo *AD* ant *BD*; pačiam gi grįžti į ankstyvesnę vietą. Ant atsparinio keliuko *CD*, už iešmo *C*, telpa tik vienas vagonas.

Kaip mašinistas išsprendė šį uždavinį?

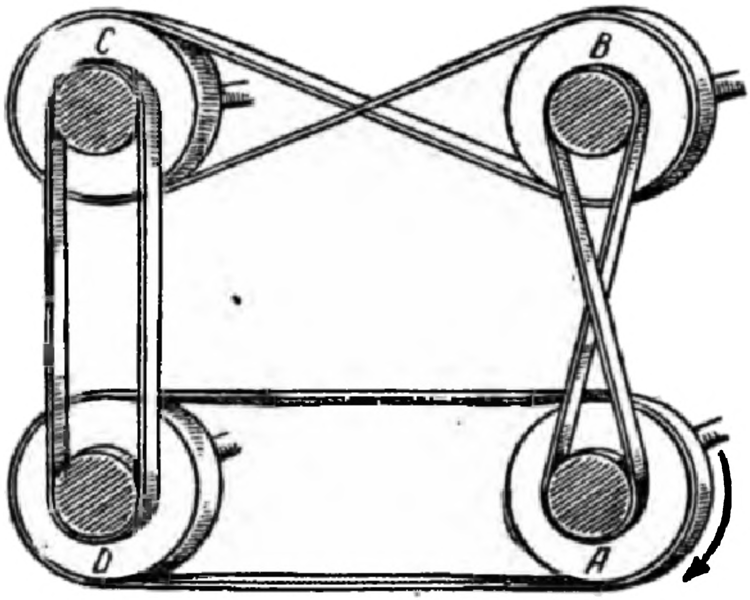
Jeigu kiekvieną prikabinimą ir atkabinimą jūs laikysite ėjimu, tai galiu pranešti, kad mašinistas uždavinį išsprendė 12 ėjimų, bet jūs galite išspręsti jį ir 10 ėjimų.

173. Pabandykite atsverti

Ryšulyje yra 9 *kg* kruopų. Pabandykite lėkštinių svarstyklių ir 50 bei 200 *g* svarsčių pagalba paskirstyti visas kruopas į du ryšulius: vieną — 2 *kg*, o antrą — 7 *kg*. Be to, leidžiama atlikti tik 3 pasvėrimus.

174. Transmisija

Skriemuliai *A, B, C* ir *D* sujungti transmisija, kaip parodyta 116 piešinyje. Jei, esant tokiam sujungimui, galimas visų keturių skriemulių judesys, tai kuria kryptimi suksis



116 pieš.

kiekvienas skriemulys, jei skriemulys *A* sukasi rodyklės nurodyta kryptimi?

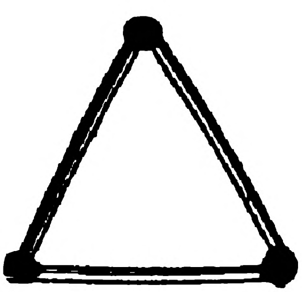
Ar galimas skriemulių judesys, jei visi keturi diržai bus sukryžiuoti, pavyzdžiui, kaip tarp skriemulių *A* ir *B*?

O jei tik 1 arba 3 diržai bus sukryžiuoti?

175. Septyni trikampiai

Sujungiant trijų degtukų galus plastelino arba lako, arba duonos minkštimo rutuliukais, lengva sudaryti vieną lygiakraštį trikampį (117 pieš.).

Dabar imkite 9 degtukus ir, taip pat sujungdami jų galus, sudarykite 7 lygiakraščius trikampius.

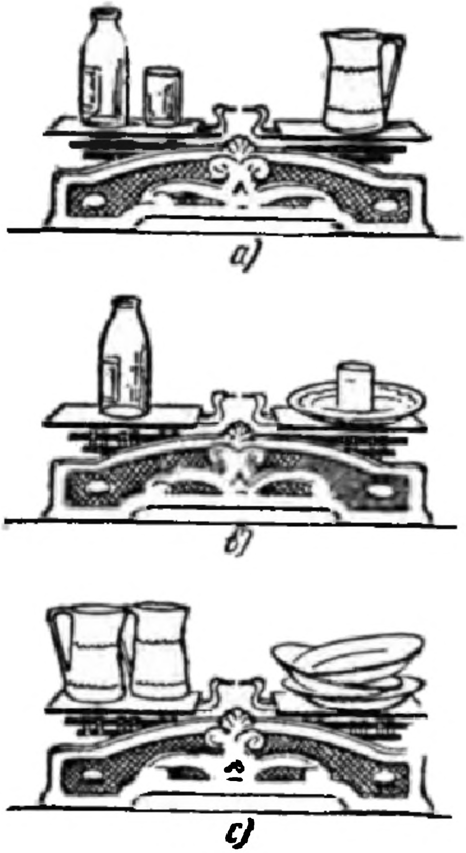


117 pieš.

176. Pašūkauk ir atrasi rombo centrą

Įsivaizduokite labai didelę rombo formos miško aikštę. Išilgai kiekvienos rombo kraštinės tankia siena auga medžiai. Kad atrastumėte centrinį aikštės tašką, jums užtenka, keičiant buvimo vietą aikštėje, keletą kartų sušukti. Kaip tai gali būti?

177. Kiek sveria butelis?



118 pieš.

Kairiojoje svarstyklių lėkštėje (118 pieš., *a*) — butelis ir stiklinė, o dešiniojoje — ąsotis. Svarstyklės yra pusiausvyroje.

Perstatykime stiklinę iš kairiosios lėkštės į dešiniąją, o ąsotį pakeiskime lėkšte (118 pieš., *b*). Svarstyklės vėl yra pusiausvyroje.

Pašalinkime butelį iš kairiosios svarstyklių lėkštės, į jo vietą pastatykime 2 vienodus ąsočius, o dešiniojoje — stiklinę pakeiskime dviem vienodomis lėkštėmis (118 pieš., *c*). Dabar pasirodo, kad 2 ąsočiai sveria tiek pat, kiek ir 3 lėkštės.

Kiek kartų butelis sunkesnis už stiklinę?

178. Kubeliai

Meistrui, gaminančiam vaikiškus žaislus, buvo duotas tam tikras skaičius medinių vienodo dydžio kubelių, kad ant jų užklijuotų žaidimams reikalingas raides ir skaitmenis. Tačiau pasirodė, kad bendro visų kubelių išorinių pa-

viršių ploto neužtenka. Jam buvo reikalingas dvigubai didesnis plotas.

Kaip meistras, nepridėjęs naujų kubelių, padvigubino visų kubelių sienų plotų sumą?

179. Stiklinis indas su šratais

Kartą vieno drėkinamojo kanalo statyboje mums skubiai prireikė padirbdinti lauko sąlygomis atitinkamo dydžio švino plokštelę. Žygio dirbtuvėje švino nebuvo, taigi mes nusprendėme sulydyti medžioklinius šratus. Mes turėjome puslitrinį stiklinį indą su padalomis, kaip menzūrėlės. Pripylėme jį kupiną šratų.

Bet ar gausime iš šių šratų reikalingo dydžio plokštelę? Juk švinas — ne vanduo; jo tūrio menzūrėle neišmatuosi. Kaip gi mes galime nustatyti surinktų šratų tūrį?

Kažkas pasiūlė pagal rutulio tūrio formulę apskaičiuoti vieno šrato tūrį ir suskaičiuoti šratus. Bet tai sudėtinga ir ilgai truktų, juo labiau, kad šratai buvo įvairaus dydžio.

Jeigu daiktas vienalytis (iš vienos medžiagos), tai jo tūrį galima nustatyti padalijus jo svorį iš tos medžiagos, iš kurios daiktas padarytas, lyginamojo svorio, tačiau, kaip tyčia, niekas iš mūsų negalėjo prisiminti, koks švino lyginamasis svoris, o vadovėlio čia pat neturėjome.

Ir vis tik mes greitai ir pakankamai tiksliai nustatėme šratų tūrį. Tarp kitko, visus skaičiavimus sudarė vienas veiksmas — atimtis.

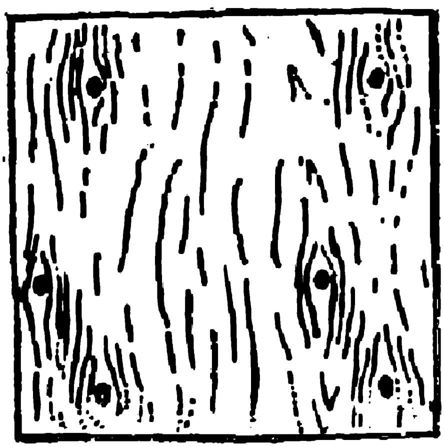
180. Į kurią vietą atėjo seržantas?

Vykdydamas vado įsakymą, seržantas išėjo iš gyvenamosios vietovės *M* pagal azimutą 330°. Priėjęs prie kalvos, toliau jis nuėjo pagal azimutą 30°, kol priėjo iki nuošaliai stovinčio medžio. Nuo čia jis pasuko 60° į dešinę. Eidamas šia kryptimi, seržantas atėjo prie tilto, o nuo jo upės krantu patraukė pagal azimutą 150°. Po pusvalandžio išėjęs prie malūno, seržantas vėl pakeitė kryptį. Dabar jis nuėjo pagal azimutą 210°, orientuodamasis į malūnininko namą. Priėjęs prie malūnininko namo, jis dar kartą pasuko į de-

šinę ir, eidamas pagal azimutą 270°, tiksliai išėjo į nurodytą vietą.

Naudodamiesi matlankiu, kruopščiai nubrėžkite savo sąsiuvinyje visą seržanto maršrutą ir nustatykite, į kurią vietą atėjo seržantas, jei yra žinoma, kad pagal kiekvieną azimutą jis nueidavo 2,5 *km*?

181. Nustatyti rąsto skersmenį



119 pieš.

Koks maždaug rąsto sluoksnio, iš kurio padarytas faneros lapas, atvaizduotas 119 piešinyje, skersmuo? Lapo matmenys 150×150 *cm*.

Primenu, kad apskritimo skersmuo *d* apytikriai apskaičiuojamas pagal tokią formulę: $d \approx \frac{c}{3{,}14}$, kur *c* — apskritimo ilgis, bet spręsdami duotąjį uždavinį neapsirikite. Rąsto sluoksnio skersmuo

$$d \neq \frac{150}{3{,}14}.$$

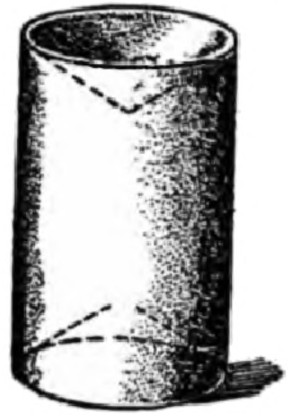
182. Netikėta kliūtis

Čapajevas, kartą paklaustas, ar ne atsitiktini yra jo kariniai pasisekimai, taip atsakė: «O ne, kame gi atsitiktinumas — visur reikalingas protas... išradingumas reikalingas...»

Iš tikrųjų, atsitiktinumas iš viso nepatikimas bet kurios mūsų veiklos pasisekimo pagrindas. Ar darbuojamės mes, ar lošiame, pavyzdžiui, šachmatais — visada gali atsirasti tokios padėtys, kurios atrodys be išeities, o padeda mums atkaklumas ir nuovoka...

Vienam studentui reikėjo nubraižyti cilindro su išpiovomis pagrinduose pavidalo detalę (120 pieš.). Kai jis pradėjo kroncirkeliu matuoti detalę, netikėtai susidūrė su kliūtimi: kad galėtų nustatyti nuotolį tarp pačių giliausių išpiovų taškų išilgai cilindro ašies, jam reikėjo kroncirkelį

nuimti nuo detalės ir pridėti prie mastelinės liniuotės. Bet kaip tai padaryti? Juk norint nuimti kroncirkelį nuo detalės, reikės išskėsti jo kojeles ir... prarasti ieškomą dydį. Ką gi daryti?



120 pieš.

183. Ar galima gauti 100% ekonomijos?

Vienas žmogus sužinojo apie tris išradimus: vienu iš jų sutaupoma 30% kuro, antru — 45%, trečiu — 25%. Šis žmogus nusprendė visus tris išradimus pritaikyti kartu, manydamas tuo sutaupyti 30%+45%+25%=100% kuro. Tačiau argi taip gali būti? Kiek iš tikrųjų jis gaus procentų ekonomijos?

184. Spyruoklinėmis svarstyklėmis

Turima keletas spyruoklinių svarstyklių. Didžiausia spyruoklinėms svarstyklėms apkrova — 5 *kg*. Kaip, naudojantis tiktai spyruoklinėmis svarstyklėmis, pasverti siją, kurios svoris «iš akies» 15—20 *kg*?

185. Konstruktorinė nuovoka



121 pieš.

1 uždavinys. Kaip iš trijų juostelių sudaryti trijų grandžių grandinėlę, kad, b e t k u r i ą grandį perpiovus, visa grandinėlė suirtų į tris dalis? Paprastas sukabinimas, atvaizduotas 121. piešinyje, aišku, netinka, nes šiuo atveju

grandinėlė į tris atskiras juosteles suyra perpiovus tiktai vidurinę grandį, o ne bet kurią, kaip kad reikalauja uždavinio sąlyga.

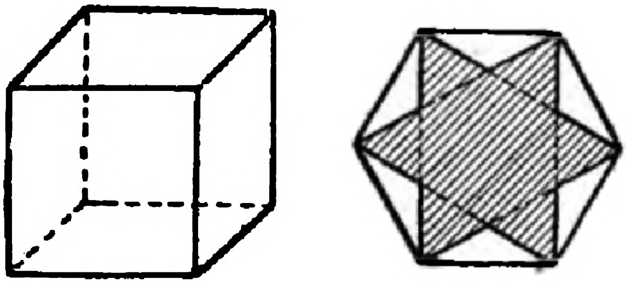
2 uždavinys. Kaip iš penkių juostų sudaryti 5 grandžių grandinėlę, kad, perpiovus t i k v i e n ą iš jų, grandinėlė suirtų į 5 atskiras dalis?

3 uždavinys. Kaip iš penkių juostų sudaryti 5 grandžių grandinėlę, kad, perpiovus b e t k u r i ą v i e n ą grandį, visa grandinėlė suirtų į 5 atskiras dalis?

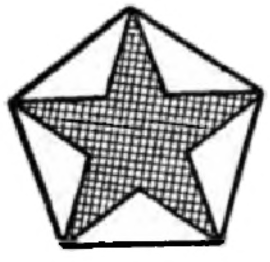
186. Mišos nesėkmė

Štai ką pamatė Miša Gerasimovas. Jo vyresnysis brolis Igoris paėmė žaislą — medinį kubelį ir taip sumaniai jį perpiovė, kad piūvį sudarė taisyklingas šešiakampis (122 pieš.). Po to pieštuku išvedė atkarpas, jungiančias kas antrą šešiakampio viršūnę, — gavo šešiakampę žvaigždę.

Trikampiuose tarpuose tarp žvaigždės «spindulių» (122 piešiny nesubrūkšniuoti trikampiai) Igoris peiliuku nupiovė ploną medžio sluoksnį, užklijavo ant žvaigždės



122 pieš.



123 pieš.

guminę plokštelę, kruopščiai apipiovė ją pagal žvaigždės kontūrą ir tarė: «Štampas baigtas».

Mišai tai patiko, ir jis, kaip klasės sieninio laikraščio dailininkas, nusprendė, kad jam labai pravartu būtų turėti visiškai tokį patį štampą, tik penkiakampės žvaigždės.

Jis žinojo, kad penkiakampę žvaigždę tokiu pat būdu galima padaryti iš taisyklingo penkiakampio (123 pieš.).

Tuo tikslu Miša paėmė iš savo «statybinės medžiagos» taip pat kubelį ir pradėjo bandyti jį perpiauti taip, kad piūvis būtų taisyklingas penkiakampis. Tačiau Mišai nepavyko. Kaip jis bebandė vienu kubelio perpiovimu gauti taisyklingą penkiakampį, nieko neišėjo. Gaudavo įvairių matmenų taisyklingus trikampius ir kvadratus, gaudavo ir taisyklingus šešiakampius, bet jau tik vieno dydžio, o penkiakampio — nė vieno.

Ilgai Miša plūkėsi, supiaustė visus savo «statybinės medžiagos» kubelius, bet taip ir nesuprato — ar jis negali suvokti, kaip reikia perpiauti kubelį, ar iš viso neįmanoma gauti taisyklingą penkiakampį, perpiovus kubą plokštuma.

O visa tai dėl to, kad Miša Gerasimovas buvo dar mažai mokęsis geometrijos ir kol kas dar nebuvo įgudęs geometriškai galvoti.

Reikia padėti Mišai išsiaiškinti šiuos klausimus:

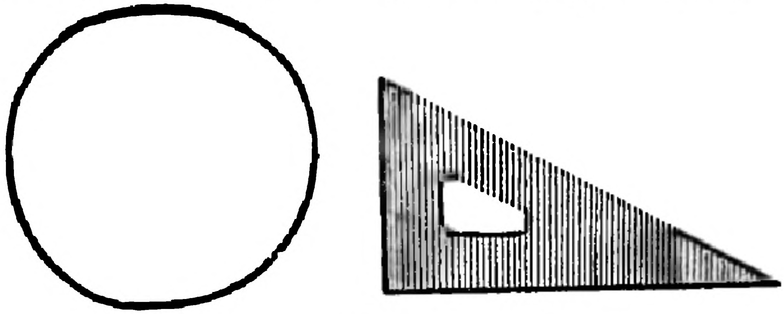
1) Ar galima gauti, perpiovus kubą plokštuma, taisyklingą penkiakampį?

2) Kaip perpiauti kubelį, kad piūvis būtų taisyklingas trikampis arba taisyklingas šešiakampis?

3) Ar galima gauti, perpiovus kubą plokštuma, taisyklingą daugiakampį su didesniu kraštinių skaičiumi, kaip 6?

187. Rasti apskritimo centrą

Kaip rasti apskritimo centrą (124 pieš.) vien tik vieno braižymo trikampio ir pieštuko pagalba (tarp kitko,



124 pieš.

pieštukas tik tam, kad galima būtų nubrėžti reikalingas linijas)?

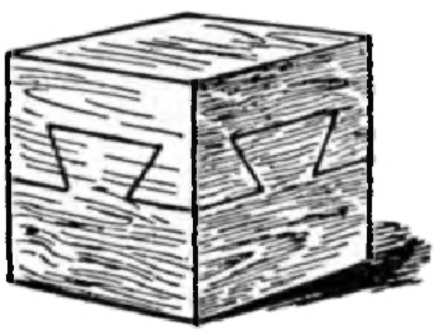
188. Kuri dėžė sunkesnė?

Dvi vienodų matmenų dėžės pripildytos vienodo lyginamojo svorio rutulių (t. y. pagamintų iš tos pačios medžiagos). Pirmoje dėžėje yra 27 vienodi didesni, o antroje — 64 vienodi mažesni rutuliai. Kuri dėžė sunkesnė?

Spėjama, kad abiejose dėžėse rutuliai sukrauti glaudžiai ir iki viršaus, be to, kad kiekviename sluoksnyje rutulių yra po vienodą skaičių.

189. Staliaus menas

Jaunųjų stalių — FGA mokyklos mokinių darbų parodoje mums buvo parodytas įstabus medinis kubas. Jis sudėtas iš dviejų dalių, glaudžiai sujungtų dygliais, kurių kontūrai matomi kiekviename iš keturių šonų (125 pieš.). Kubo dalys nesuklijuotos ir, aišku, turi išsiskirti, bet kaip?



125 pieš.

Mes bandėme jas tempti į viršų ir žemyn, į kairę ir į dešinę, pirmyn ir atgal — nesėkmingai. Ar jūs nesuvokiate, kaip vis dėlto kubo dalys išsiskirdavo ir kokią išvaizdą kiekviena iš jų turėjo?

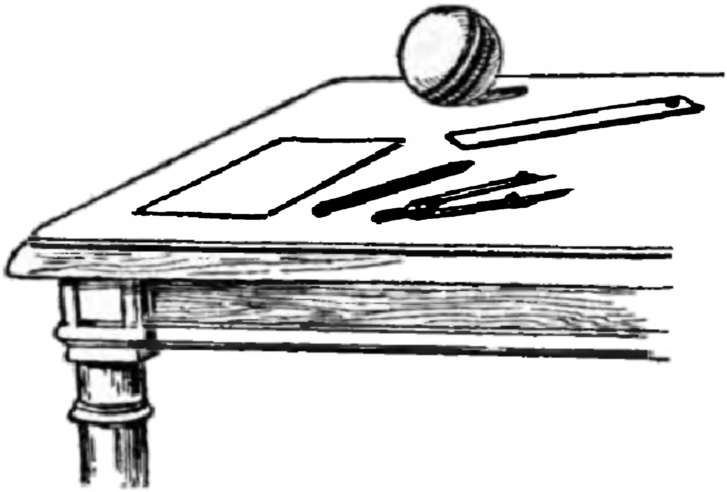
190. Geometrija ant rutulio

Kiekvienam, kuris mokėsi geometrijos, tikriausiai teko spręsti brėžimo uždavinius skriestuvo ir liniuotės pagalba, tai yra brėžiant apskritimo lankus ir tieses. Čia visi reikiami brėžiniai buvo atliekami paprastai ant popieriaus ar klasėje ant lentos.

Tačiau vargu ar jums teko, sprendžiant geometrinius uždavinius, atlikti brėžinius ne tik ant plokščio popieriaus lapo, bet ir ant kokio nors kreivo paviršiaus, sakysim, ant realaus rutulio paviršiaus?

Kaip tik tokiu keliu galima, pavyzdžiui, nustatyti duoto realaus rutulio skersmenį, jei naudotumės tik skriestuvu ir liniuote.

Padėkite ant stalo kokį nors rutulį, pavyzdžiui, kroketo rutulį (126 pieš.), paimkite popieriaus lapą, skriestuvą, li-

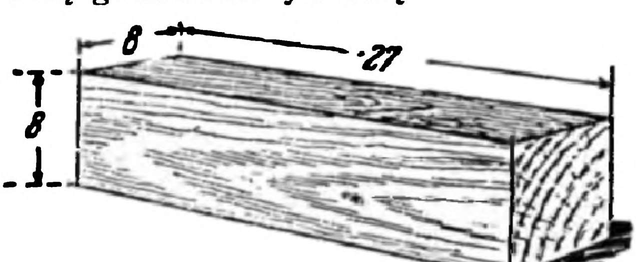


126 pieš.

niuotę be padalų, pieštuką ir pagalvokite, kaip nubrėžti ant popieriaus a t k a r p ą, lygią rutulio s k e r s m e n i u i.

191. Reikia geros nuovokos

Medinę 8 × 8 × 27 *cm* dydžio sijelę (stačiakampį gretasienį) (127 pieš.) reikia piūkleliu supiaustyti į 4 dalis, iš kurių būtų galima sudaryti kubą.



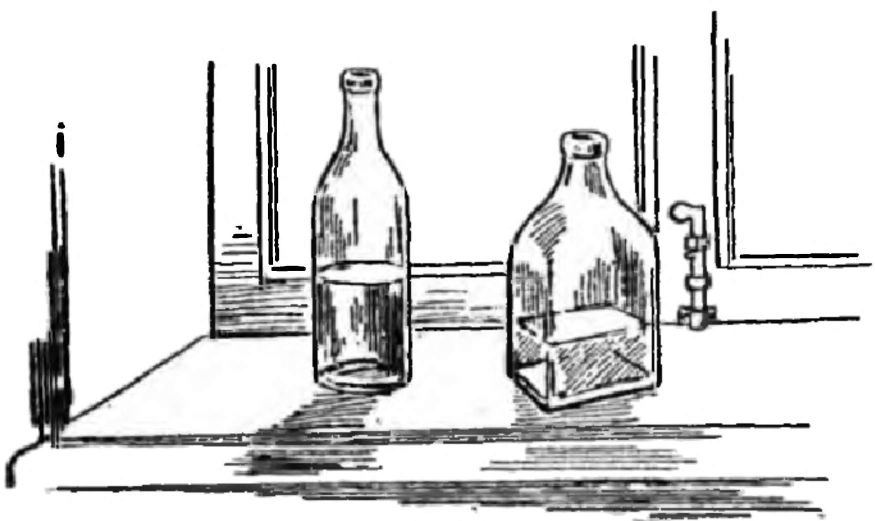
127 pieš.

Geriausia, suprantama, sijelę piauti ne kaip pakliūva — kas išeis,— o iš pradžių pagalvoti, paskaičiuoti bei brėžinyje suprojektuoti.

Turėkite galvoje, kad tai iš jūsų pareikalaus gero erdvės įsivaizdavimo ir suvokimo.

192. Sunkios sąlygos

Nuovokos lavinimui įsivaizduokite tokią priverstinę padėtį: jums reikia, naudojantis tik masteline liniuote, nustatyti butelio (su apskritu, kvadratiniu ar stačiakampiu dugnu), į kurį įpilta šiek tiek skysčio, tūrį



128 pieš.

(128 pieš). Butelio dugnas tegul bus plokščias. Skysčio išpilti arba įpilti neleidžiama.

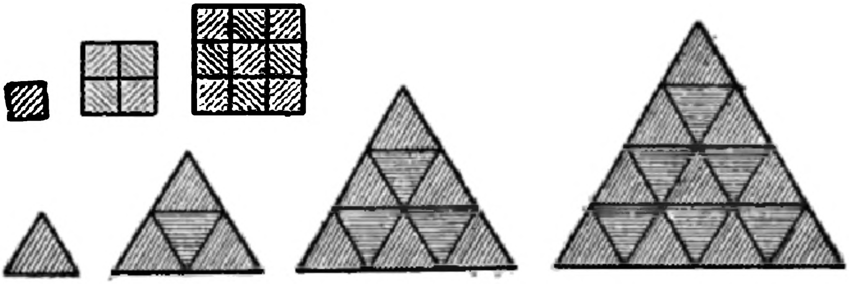
Sunkios sąlygos! Bet juo įdomiau nugalėti sunkumus.

193. Surenkamieji daugiakampiai

Dabartiniu metu statybininkai gali visą namą surinkti iš atskirų dalių (blokų), pagamintų gamyklose. Kodėl gi ir mums nepabandyti įgyvendinti analogišką «statybą» geometrijoje, tiesa, su tuo skirtumu, kad pas mus «blokai»

bus vienodos formos ir matmenų daugiakampiai. Įsivaizduokite, kad jūsų žinioje yra be galo daug tarpusavyje lygių daugiakampių. Reikia, glaudžiai pridedant daugiakampius vieną prie kito, sudaryti iš jų vieną daugiakampį tokios pat formos, kaip ir duotieji daugiakampiai, bet tik didesnių matmenų, tiksliau: sudaryti daugiakampį, panašų duotiesiems.

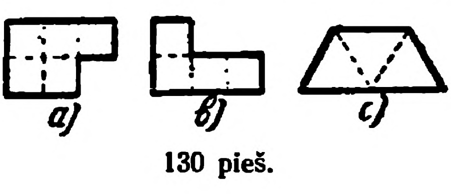
Pridedant daugiakampius vieną prie kito, leidžiama juos, kaip patinka, pasukti ir apversti, bet nelenkti ir neplėšyti į dalis.



129 pieš.

Ne kiekvienas daugiakampis šiam tikslui tinka. Pavyzdžiui, lygius taisyklingus šešiakampius galima gerai sudėti ant plokštumos (prisiminkite parketines grindis), bet iš jų sudaryti vieną taisyklingą šešiakampį neįmanoma.

Iš lygių kvadratų arba lygių lygiakraščių trikampių lengvai sudaromos panašios į juos figūros (129 pieš.). Be to, aišku, kad figūros, panašios į duotąją, «pastatymui» būtina turėti ne mažiau kaip 4 vienodas pradines figūras, o po to arba 9, arba 16, aplamai, n^2 figūrų, kur n — tam tikras sveikas skaičius.

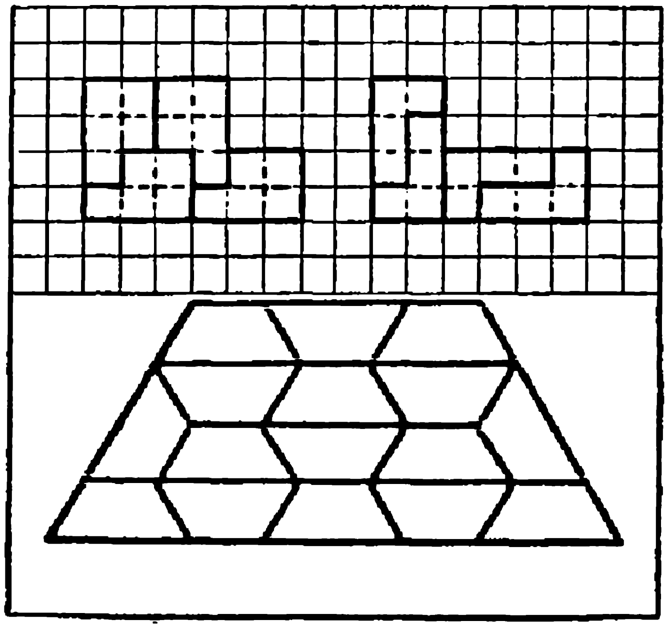


130 pieš.

Visų tinkamiausi į save panašių figūrų «statybos blokai» yra daugiakampiai *a*), *b*), *c*), atvaizduoti 130 piešinyje, ir jiems analogiški, kuriuos galima sudaryti iš lygių kvadratų (pavyzdžiui, iš languoto popieriaus langelių) arba iš lygių lygiakraščių trikampių.

Daugiakampius, panašius į 130 piešinyje atvaizduotus, galima sudaryti tiek iš 4 kiekvieno duotojo pavidalo figūrų, tiek ir iš 9 arba iš 16, arba iš dar didesnio duotųjų daugiakampių skaičiaus.

Kaip pavyzdys 131 piešinyje parodyta, kaip iš 130 piešinyje atvaizduotų 4 daugiakampių *a*) arba *b*), arba iš 16 daugiakampių *c*) sudaromos į juos panašios figūros.



131 pieš.

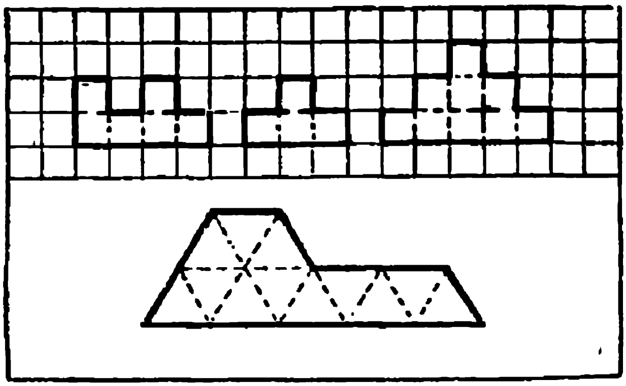
Uždavinys. Sudarykite daugiakampius, panašius į 130 piešinyje atvaizduotus:

1) iš 9 figūrų *a*); 2) iš 9 figūrų *b*); 3) iš 4 figūrų *c*); 4) iš 16 figūrų *b*); 5) iš 9 figūrų *c*).

Paruoškite iš popieriaus (languoto ar įstrižai languoto) kitokius «blokus», analogiškus 130 piešinyje atvaizduotiems (prikarpykite jų daug), ir suruoškite varžybas — kas greičiau ir iš mažesnio duotojo pavidalo daugiakampių skaičiaus sudarys panašias į juos figūras.

Atminkite, kad ne kiekvieną daugiakampį galima sudaryti iš 4 ar 9 į jį panašių figūrų.

Pats mažiausias reikalingų figūrų skaičius gali būti ir 16, ir 25, ir 36, ir, aplamai, n^2, kur n — bet kuris sveikas skaičius. Iš anksto tas skaičius nežinomas, todėl ir įdomu, kam pavyks daugiakampio sudarymui sunaudoti patį mažiausią duotųjų figūrų skaičių.



132 pieš.

Pavyzdiniai «blokai» atvaizduoti 132 piešinyje. Galite juos įvairiausiai keisti, bet kartu atminkite, kad gali būti «blokų», iš kurių negalima sudėti į juos panašios figūros.

194. Įdomus panašiųjų figūrų sudarymo būdas

Jei atsisakytumėte nuo reikalavimo sudaryti daugiakampį iš kuo mažesnio į jį panašių figūrų skaičiaus, tai galima būtų nurodyti vieną įdomų panašios rūšies uždavinių sprendimo būdą, pagrįstą vienodų konfigūracijų laužtinių linijų panaudojimu.

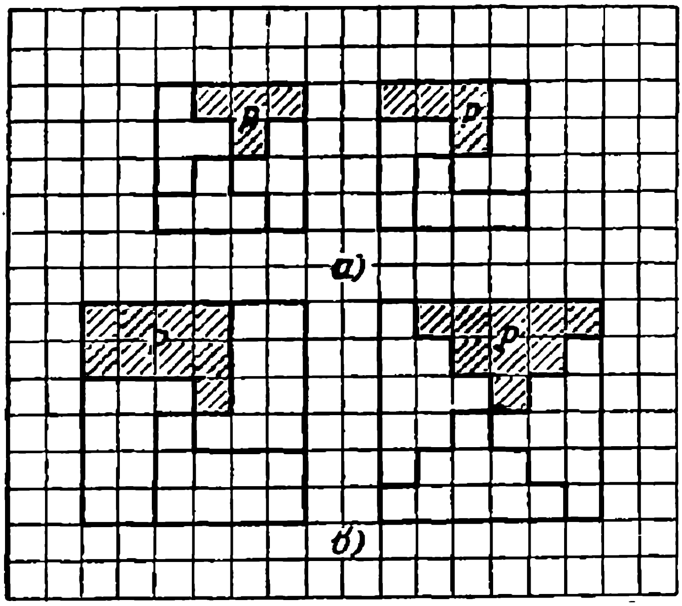
Imkime languotą popierių ir kiekvieną langelį pavadinkime vienetiniu kvadratu.

Duotuoju daugiakampiu iš pradžių laikykime tokį, kuris gali būti sudarytas iš vienetinių kvadratų (pirmų trijų 132 piešinyje atvaizduotų tipo).

Pažymėkime kiekvieną tokį daugiakampį raide P, o atitinkamą panašųjį daugiakampį — raide P'.

Nubrėžkime kvadratą, talpinantį savyje bet kokį, tačiau dalų 4, vienetinių kvadratų skaičių ($4n$). Iš šio kvadrato

centro išilgai vienetinių kvadratų kraštinių, vienos kurios nors jo kraštinės kryptimi nubrėžkime kurią nors laužtinę liniją, po to iš to paties centro taško, statmenai pirmajai laužtinei linijai, nubrėžkime antrąją laužtinę, tokios pat konfigūracijos, kaip pirmoji. Iš to paties centro taško stačiu kampu antrajai laužtinei linijai nubrėžkime tokią pat trečiąją liniją, o statmenai trečiajai — ketvirtąją (pavyzdžiui, kaip parodyta 133 piešinyje).



133 pieš.

Šios laužtinės padalys kvadratą į 4 lygias figūras, kurių kiekvieną laikysime daugiakampiu P.

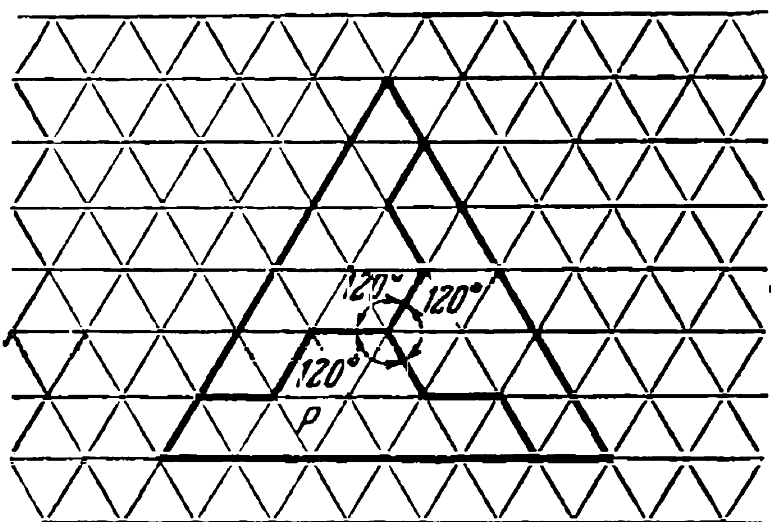
Jei į kiekvieną figūrą P įeina n vienetinių kvadratų, tai, vadinasi, iš n didelių kvadratų tikriausiai galima sudaryti daugiakampį P'. Kadangi viename dideliame kvadrate yra 4 figūros P, tai, vadinasi, daugiakampis P' gali būti sudarytas iš $4n$ figūrų P.

Tokiu būdu, pavyzdžiui, iš kiekvienų 4 didelių kvadratų, atvaizduotų 133 piešinyje, *a*, tai yra iš 16 subrūkšniuotų daugiakampių P, lengva sudaryti į juos panašius daugiakampius P'.

Daugiakampiams, panašiems į devynialangius daugiakampius *P*, atvaizduotus 133 piešinyje, *b*, sudaryti užtenka* 36 figūrų *P*. Tą patį būdą galima pritaikyti ir daugiakampiams, sudarytiems iš lygių lygiakraščių trikampių (130 piešinyje tipas *c*).

Paruošto popieriaus, t. y. subraižyto į lygiakraščius trikampius, paprastai nebūna, todėl iš anksto ir kruopščiai mes jį paruoškime patys. Pažymėjimus priimkime tuos pačius.

Dabar nubrėžkime didelį trikampį (134 pieš.), susidedantį iš bet kokio, tačiau dalaus trims, vienetinių lygiakraš-



134 pieš.

čių trikampių skaičiaus ($3n$). Iš šio trikampio centro išilgai vienetinių trikampių kraštinių, jo kraštinių kryptimi nubrėžkime 3 laužtines linijas taip, kad kampai tarp jų būtų 120° ir jos visos turėtų vienodą konfigūraciją (pavyzdžiui, kaip 134 piešinyje). Tos laužtinės padalys trikampį į 3

* Pateiktas daugiakampių φ', panašių į duotuosius *P*, sudarymo būdas nurodo mums tam tikrus p a k a n k a m u s pradinių figūrų *P* skaičius; jeigu iškirptume visas figūras *P* iš jų sudaryto kvadrato, tai yra išskirtume jas tarpusavyje ir laisvai jomis naudotumės, tai gali pasirodyti, kad daugiakampiui φ' sudaryti b ū t i n a s figūrų *P* skaičius yra mažesnis.

lygias figūras, kurių kiekvieną laikysime pradiniu daugiakampiu P.

Jei kiekvieną figūrą P sudaro n vienetinių trikampių, o 3 figūros P sudaro didelį trikampį, tai iš n tokių didelių trikampių lengva sudaryti P' (figūrą, panašią į daugiakampį P), tai yra figūrai P' sudaryti užtenka (žr. 135 psl. išnašą) $3n$ figūrų P.

Dabar atsakykite į šiuos klausimus:

1) Koks daugiakampių P, atvaizduotų 133 piešinyje, *b*, skaičius yra p a k a n k a m a s, norint sudaryti panašųjį daugiakampį P'? Mėginimų keliu patikrinkite, ar yra šis figūrų P skaičius galimai mažiausias.

2) Kokius dar daugiakampius P galima sudaryti laužtinių linijų pagalba iš tokio kvadrato, kaip 133 piešinyje, *b*, ir iš tokio trikampio, kaip 134 piešinyje?

Jei jums patiko čia išdėstytas daugiakampio iš panašių į jį figūrų sudarymo būdas, tai pagalvokite, kaip šį būdą pritaikyti pradinių daugiakampių sudarymui ne iš kvadrato, o iš stačiakampio.

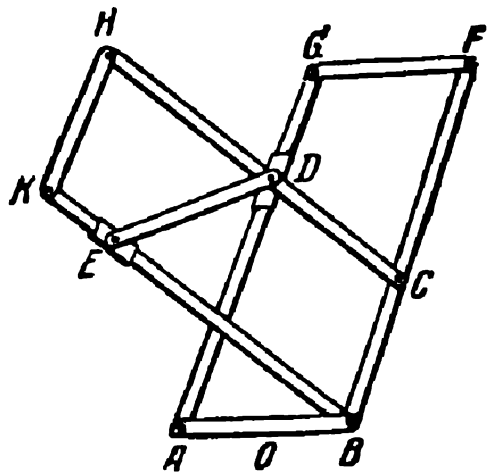
195. Šarnyrinis mechanizmas taisyklingiesiems daugiakampiams brėžti

Jauniesiems radijo imtuvų ir įvairios rūšies skraidančių bei plaukiančių modelių konstruktoriams pažįstami sunkumai, surišti su taisyklingųjų penkiakampio, septyniakampio ir devyniakampio nubrėžimu. Tiksliam brėžimui čia nepakanka skriestuvo ir liniuotės, bet jūs patys galite pasidaryti nesudėtingą mechanizmą, tinkantį bet kuriam taisyklingam n-kampiui (nuo $n = 5$ iki $n = 10$) nubrėžti.

Mechanizmas susideda iš judamų virbalinių arba plokščių strypų, sudarančių du lygius lygiagretainius $ABFG$ ir $BCHK$ (135 pieš.). Strypas DE prijungtas prie slankiklių D ir E, laisvai judančių: D išilgai AG ir E išilgai BK. Strypų dydžiai tokie, kad $AB = BC = CD = DE$. Pasislinkus bet kaip D strypu AG ir E — strypu BK, lygiagretainiai $ABFG$ ir $BCHK$ lieka lygūs; lygios lieka ir trapecijos $ABCD$ ir $BCDE$, tuo pačiu, esant bet kuriai strypų padėčiai, lygūs kampai n-kampio, kurio keturios iš eilės einančios kraštinės kiekvieną kartą bus AB, BC, CD ir DE, o

vidaus kampai $\angle ABC$, $\angle BCD$ ir $\angle CDE$. Toks dviejų šarnyrinių lygiagretainių sujungimas, esant pakankamam jų ilgiui, duoda galimybę vienodu būdu mechaniškai brėžti bet kurį taisyklingąjį n-kampį nuo $n = 5$ iki $n = 10$.

Kvadratui nubrėžti, aišku, nėra reikalo turėti šį mechanizmą, tačiau gautume ir kvadratą, jei praktiškai galima



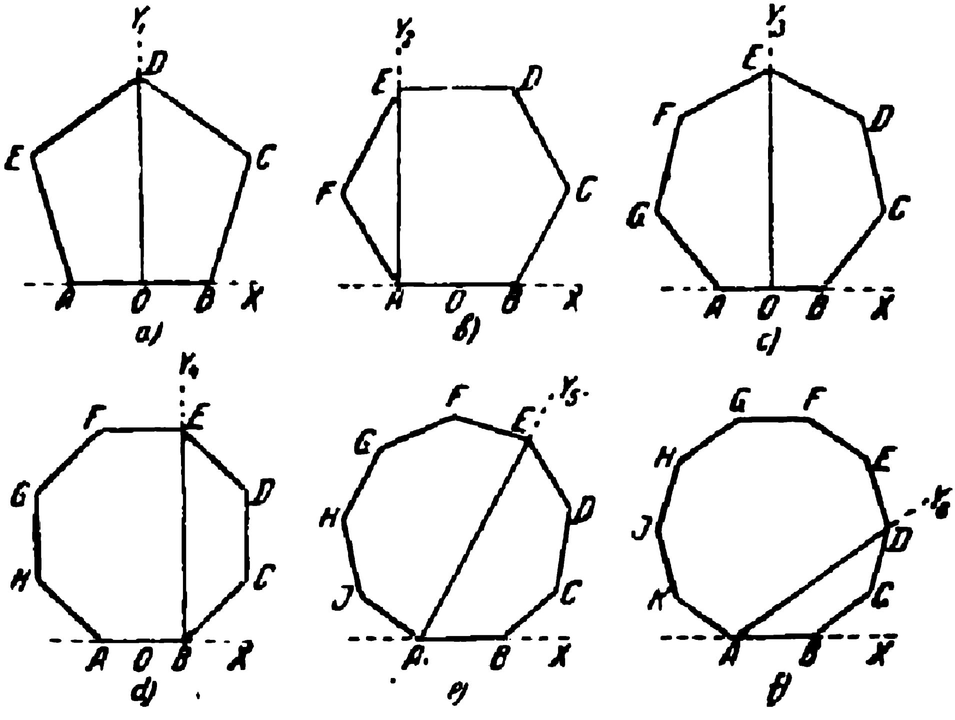
135 pieš.

būtų sutapdinti E ir A. Šarnyrinio mechanizmo pagalba n-kampių, kai $n = 5$, 6, 7, 8, 9 ir 10, brėžimo praktiniai būdai pagrįsti toliau nurodytomis atitinkamų daugiakampių savybėmis:

a) penkiakampyje $\angle DOB = 90°$ (136 pieš., *a*);
b) šešiakampyje $\angle EAB = 90°$ (136 pieš., *b*);
c) septyniakampyje $\angle EOB = 90°$ (136 pieš., *c*);
d) aštuoniakampyje $\angle EBA = 90°$ (136 pieš., *d*);
e) devyniakampyje $\angle EAB = 60°$ (136 pieš., *e*);
f) dešimtkampyje $\angle DAB = 36°$ (136 pieš., *f*).

Norint nubrėžti taisyklinguosius n-kampius su šarnyrinio mechanizmo pagalba atvejais, kai $n = 5$, 6, 7 ar 8, pradžioje reikia nubrėžti stačiuosius kampus Y_1OX, Y_2AX, Y_3OX, Y_4BX, po to uždėti mechanizmą strypu AB ant tiesės AB, sutapdinant (atitinkamai brėžiniams a — d) arba

taškus O, arba taškus A, arba taškus B. Toliau, prispaudus strypą AB prie popieriaus, reikia sukti kitus strypus, kol taškas D sutaps su tiese OY_1 (penkiakampio atveju) arba kol E sutaps su AY_2 (šešiakampio atveju), arba kol E sutaps su OY_3 (septyniakampio atveju) ir, pagaliau, kol E sutaps su BY_4 (aštuoniakampio atveju).



136 pieš.

Brėžiant taisyklingąjį n-kampį atvejais, kai $n = 9$ arba 10, pradžioje reikia nubrėžti tiesę AY_5 arba AY_6 taip, kad $\angle Y_5AX = 60°$, o $\angle Y_6AX = 36°$, po to uždėti mechanizmą strypu AB ant tiesės AB, kartu sutapdinant taškus A ir, prispaudus strypą AB prie popieriaus, sukti kitus strypus, kol E sutaps su AY_5 (devyniakampio atveju) arba kol D sutaps su AY_6 (dešimtkampio atveju). Mechanizmą standžiai užtvirtinę reikiamoje padėtyje, gausime ieškomojo n-kampio 4 paeiliui einančias kraštines (ir 5 viršūnes). Turint 4 n-kampio kraštines, nesunku jį visą nubrėžti nuosekliai pasukant «šabloną», gautą užtvirtinus strypus.

Teoriškai brėžinys tikslus, tačiau praktiškai brėžinio tikslumas priklausys nuo to, kaip kruopščiai bus daromas pats prietaisas.

Aprašytas mechanizmas gali būti padarytas iš medžio arba iš lengvo metalo.

Uždavinys. Jūs, aišku, mokate, naudodamiesi skriestuvu ir liniuote, padalyti kampą pusiau. Tad sugalvokite, kaip nubrėžti 1° kampą, pradžioje naudojantis aprašytuoju šarnyriniu mechanizmu, o po to — skriestuvu ir liniuote.

ŠEŠTASIS SKYRIUS

DOMINAS IR KAULIUKAS

A. DOMINAS

Lošimas «dominas» dažniausiai susideda iš 28 stačiakampių plytelių (137 pieš.). Kiekviena plytelė padalyta į 2 kvadratus, ant kurių sužymėti taškai. Kvadratuose taškai taip išdėstyti, kad ant kiekvienos plytelės taškų grupė sudaro vieną iš galimų kombinacijų po du iš 7 skaičių: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

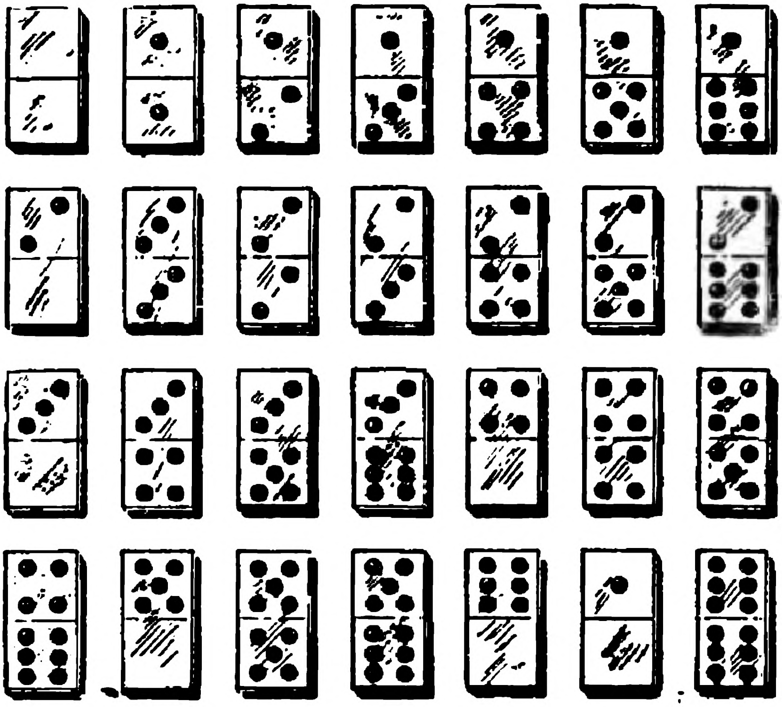
Sutinkamai su tuo, kiekviena domino plytelė apibūdinama dviem skaičiais: viename kvadrate esančių taškų skaičiumi ir antrame kvadrate esančių taškų skaičiumi. Visų plytelės taškų suma yra jos «akių» skaičius. Jei abi plytelės puselės turi vienodą skaičių akių arba abi «tuščios», tai kiekviena tokia plytelė vadinama «dviguba», arba «dubliumi». Vietoje pilno plytelės atvaizdavimo kartais tiesiog užrašysime greta du skaitmenis (su mažu brūkšneliu tarp jų), parodančius kiekvienos plytelės puselės akių skaičių. Antai, užrašas 0-5 žymi plytelę, kurios viename kvadrate nėra taškų (0), o antrame — penki taškai (5); užrašas 4-6 žymi plytelę su keturiais ir šešiais taškais ir t. t.

Domino lošimo būdas tiek visiems žinomas, kad nėra reikalo jo aprašinėti. Priminsiu tik pagrindinę taisyklę: prie bet kurio padėtos ant stalo plytelės kvadrato reikia priglausti tokią plytelę, kurios kvadratas turi tiek pat akių, kiek yra padėtosios plytelės kvadrate.

Visų 28 domino plytelių ženklus galima išdėstyti šiuo būdu:

0-6	1-6	2-6	3-6	4-6	5-6	6-6
0-5	1-5	2-5	3-5	4-5	5-5	
0-4	1-4	2-4	3-4	4-4		
0-3	1-3	2-3	3-3			
0-2	1-2	2-2				
0-1	1-1					
0-0						

Kaip lošimas, dominas nėra įdomus matematiniu požiūriu, bet jei jūs turite pilną domino plytelių rinkinį, tai



137 pieš.

pasipratinkite spręsdami toliau pateiktus įdomius uždavinius ir galvosūkius.

196. Kiek akių?

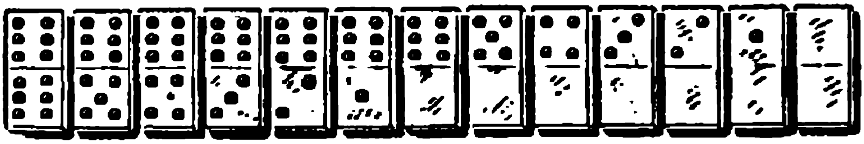
Žinodami «domino» lošimo plyteles ir pagrindinę taisyklę, išspręskite tokį uždavinį: pagal lošimo taisykles visos 28 domino plytelės yra išdėliotos ant stalo grandinėje taip, kad viename jos gale yra 5 akys. Kiek akių turi būti kitame grandinėlės gale?

Iš pradžių apgalvokite «mintyse», o po to patikrinkite praktiškai.

197. Du pokštai

Pirmas pokštas. Niekam nepastebint paslėpę vieną domino plytelę (tik ne «dublių») ir stengdamiesi neatkreipti savo draugų dėmesio į tai, kad liko 27, o ne 28 plytelės, pasiūlykite jiems pagal lošimo taisykles, pradedant bet kuria plytele, išdėlioti v i s a s esančias plyteles grandinėle (galima leisti nepasinaudoti tik «dubliais»). Jūsų užduotį jiems pavyks nesunkiai atlikti, bet j ū s g a l ė s i t e i š a n k s t o i š p r a n a š a u t i a k i ų s k a i č i ų, kuris bus grandinėlės galuose. Kodėl?

Antras pokštas. Imkite 25 domino plyteles, apverskite jas akimis į apačią ir sudėkite vieną greta kitos taip, kad jos liestųsi ilgesniaisiais kraštais. Po to pareikškite, kad jūs nusigręšite arba net išeisite į kitą kambarį, o kas nors



138 pieš.

tegul perkelia iš dešiniojo galo į kairįjį kurį nors skaičių plytelių (bet ne daugiau kaip 12). Jūs apsiimate atspėti perkeltų plytelių skaičių.

Pasiruošdami «atspėjimui» ir apversdami domino plyteles, 13 iš jų jūs išdėliokite mažėjančia sveikų skaičių seka nuo 12 iki 0 (138 pieš.), o į dešinę nuo jų — likusias 12 bet kokia tvarka.

Sugrįžęs į kambarį, jūs atverčiate vidurinįąją (tai yra tryliktąją iš eilės nuo galo) plytelę, kurios akių skaičius būtinai nurodys perkeltų, jums nesant, domino plytelių skaičių.

Kodėl?

198. Partijos laimėjimas užtikrintas

Sakykime, kad dominą lošia keturiese: *A* ir *C* prieš *B* ir *D*. Prieš lošimo pradžią plytelės išdalijamos po lygiai, tai yra kiekvienas lošėjas gauna po 7 plyteles. Nuo ko priklauso partijos laimėjimas?

Aišku, jis kažkuriuo laipsniu priklauso nuo lošėjų sumanumo, tačiau galimi ir tokie pradinio plytelių išskirstymo tarp lošiančiųjų porų atvejai, kada pirmoji pora būtinai išlošia ta prasme, kad vienas tos poros lošėjų anksčiau už kitus išdėlioja visas savo plyteles.

Tegul, pavyzdžiui, *A* turi tokias plyteles:

1-0 1-1 1-2 1-3 0-4 0-5 0-6,

o *D* turi likusias plyteles su nuliais ir vienetais, tai yra tokias:

0-0 0-2 0-3 1-4 1-5 1-6

ir dar kurią nors plytelę.

Likusios plytelės priklauso lošėjams *B* ir *C*, nesvarbu kurios kuriam. Šiuo atveju visas lošimas bus pirmosios lošiančiųjų poros lošėjo *A* ir antrosios poros lošėjo *D* dvikova, o likusieji du lošėjai (*B* ir *C*) negalės net nė vienos savo plytelės padėti.

Lošėjas *A* pradeda ir deda: 1 - 1; *B* ir *C* piktinasi: jie neturi tinkamos plytelės; *D* gali padėti bet kurią iš trijų plytelių; 1-4, 1-5 arba 1-6. Po to *A* turi padėti 4-0, arba 5-0, arba 6-0. *B* ir *C* vėl «pasuoja», nes pas juos nėra nei vieneto, nei nulio. *D* gali padėti bet kurią plytelę iš likusiųjų, bet pas *A* visada yra toks atsakymas, kuris sudaro grandinėlės galuose arba 0, arba 1. Galų gale *A* išdėlios visas plyteles, *B* ir *C* nepadės nė vienos, o pas *D* liks viena. Partiją laimėjo pora *A* ir *C*. (Šią partiją praveskite nuo pradžios iki galo pas save ant stalo.)

Domino plytelių pradinio išdėstymo nulių ir vienetų •kombinacijos gali būti pakeistos atitinkamomis skaičių 2, 3, 4, 5 ir 6 kombinacijomis.

Tokiu būdu, visų partijų, analogiškų išnagrinėtajai, skaičius lygus skaičiui visų derinių iš septynių elementų po 2, t. y. lygus 21. Aišku, kad tikimybė gauti vieną tokių partijų atsitiktinai yra labai maža.

Pateiktame pavyzdyje partija tęsėsi iki paskutinės plytelės pas vieną iš partnerių. Tačiau būva ir taip, kad po kelių ėjimų lošimas nutrūksta, nes nė pas vieną iš lošėjų nėra tinkamos plytelės. Tada laimi ta lošėjų pora, pas kurią mažesnis likusiųjų plytelių akių skaičius.

Suvokite pagal netiesioginius vienos tokių trumpų partijų duomenis, kurios plytelės buvo išdėliotos ant stalo?

Lošia tos pačios poros: *A* su *C* ir *B* su *D*. Kiekvienas turi po 6 plyteles, o 4 plytelės lieka uždengtos, bet lošėjai sutarė «pirkimo» neimti. Lošėjo *A* plytelės žinomos:

2-4 1-4 0-4 2-3 1-3 1-5.

Pas partnerį *C* — penkios dvigubos plytelės («dubliai»). *D* turi dvi dvigubas plyteles; jo visų plytelių akių suma 59.

Lošėjas *A* pradėjo lošimą nuo plytelės 2-4, *B* pasuoja, *C* prideda, *D* pasuoja, *A* prideda, *B* vėl pasuoja, *C* prideda ir uždaro lošimą. Pora *B* ir *D*, nepadariusi nė vieno ėjimo, partiją pralošė. Pas partnerius *A* ir *C* liko 35 akys, o pas partnerius *B* ir *D* — 91 akis. Keturių išdėliotų plytelių akių suma lygi 22.

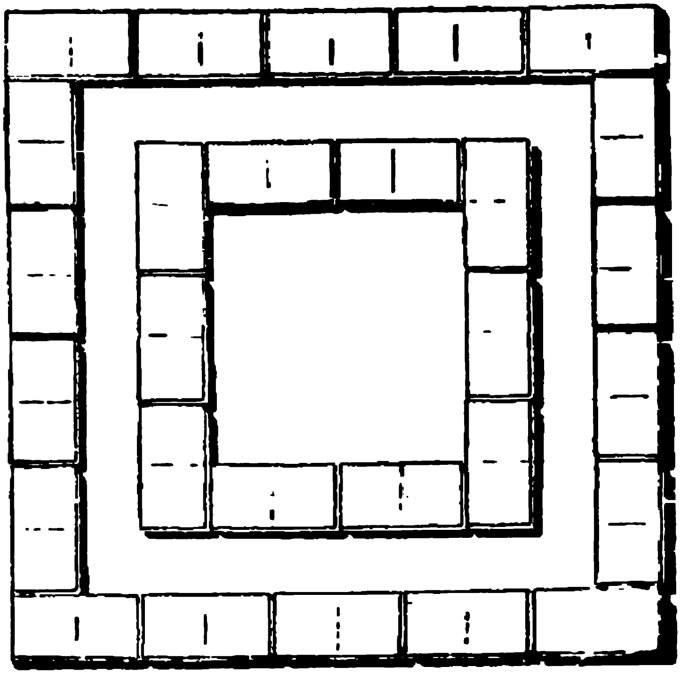
Pagal šiuos duomenis nustatykite, kurios 4 plytelės liko nepanaudotos (uždengtos) ir kurios 4 plytelės buvo išdėliotos.

199. Rėmelis

Pridėdami domino plyteles vieną prie kitos pagal priimtas lošimo taisykles, sudėkite kvadratinį rėmelį. Be to, panaudodami visas 28 plyteles, sudėkite jas taip, kad išilgai kiekvienos kvadrato kraštinės akių suma būtų lygi 44.

200. Rėmelis rėmelyje

Išdėliokite visas 28 domino plyteles figūros, atvaizduotos 139 piešinyje, pavidalu taip, kad akių suma išilgai kiekvienos aštuonių figūros kraštinių būtų vienoda.



139 pieš.

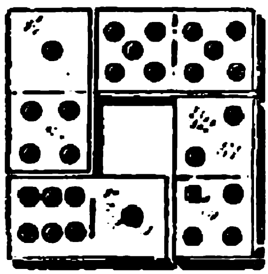
Čia leidžiamas bet koks plytelių «sukabinimas», kitaip tariant, dabar nėra reikalo suglausti plyteles tokiomis puselėmis, kurios būtinai turėtų po vienodą akių skaičių.

201. Langeliai

Iš domino plytelių galima sudėti langelius su vienodomis akių sumomis išilgai kiekvienos kiekvieno atskiro langelio kraštinės (140 pieš.).

Panaudodami visas 28 domino plyteles, sudėkite 7 vienodus, turinčius nurodytas savybes, langelius, kurių tarpe nebūtų langelio, atvaizduoto 140 piešinyje.

Pastabos. 1) Akys, esančios kampiniuose kvadratuose, skaičiuojamos du kartus: išilgai horizontalinio krašto ir išilgai vertikalinio krašto. 2) Akių sumos turi būti vienodos



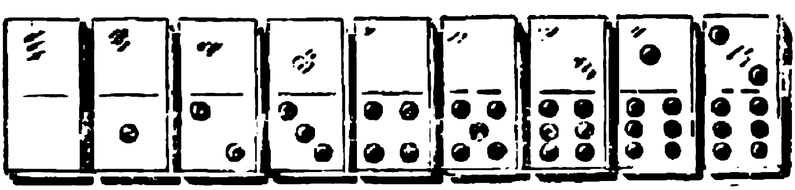
140 pieš.

tik išilgai kiekvieno atskiro langelio kraštų. Skirtinguose langeliuose jos gali būti skirtingos.

202. Magiški kvadratai iš domino plytelių

Iš domino plytelių galima sudaryti ne tik «langelius» ir «rėmelius», bet ir ištisinius kvadratus, ir, be to, net «magiškus».

Jei nepasikartojantieji skaičiai išdėstyti kvadrato forma taip, kad skaičių suma kiekvienoje eilėje, tiek horizontalioje, tiek ir vertikalioje, ir kiekvienoje iš dviejų įstrižainių yra vienoda, tai toks skaičių kvadratas vadinamas *«magišku»**.



141 pieš.

Pavyzdžiui, iš visų blanšų (taip vadinamos domino plytelės, kurių vienoje ar abiejose puselėse nėra akių) ir dar dviejų plytelių (141 pieš.) labai lengva sudaryti magišką kvadratą (142 pieš.) su pastovia suma 12 .

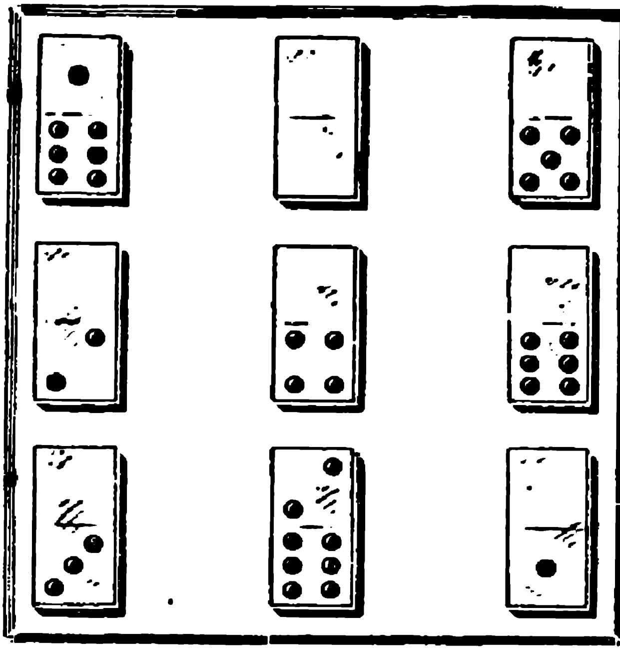
* Smulkiau apie magiškus skaičių kvadratus žr. XIII skyriuje.

Šis kvadratas, užrašytas sutartiniu būdu, atrodo taip:

1-6	0-0	0-5
0-2	0-4	0-6
0-3	2-6	0-1

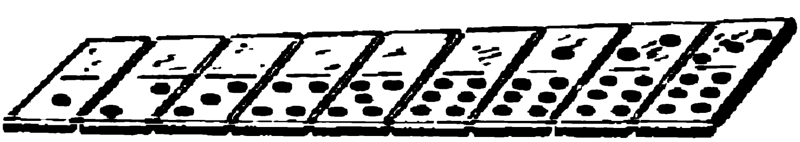
arba skaičiais:

7	0	5
2	4	6
3	8	1



142 pieš.

Įdomu pastebėti, kad paimtų devynių plytelių akių skaičiai yra 8 pirmieji natūriniai skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir dar nulis.

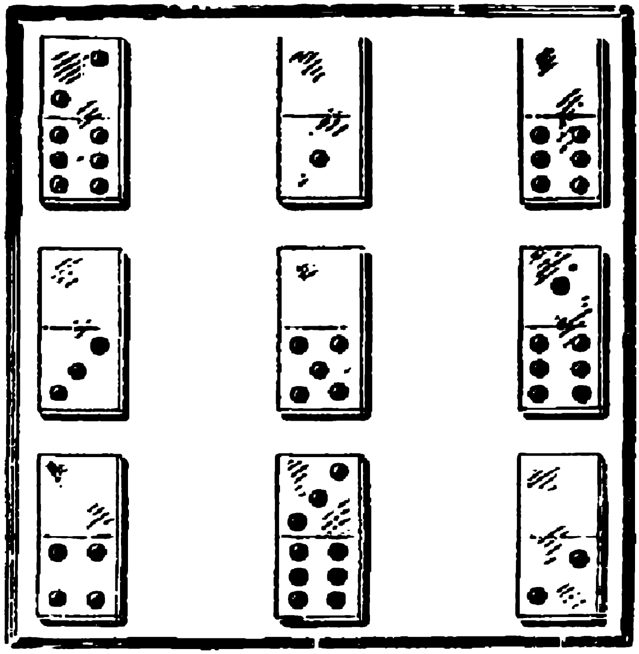


143 pieš.

Jeigu paimtume 9 plyteles, kurių akių skaičiai yra devyni pirmieji natūriniai skaičiai, pavyzdžiui, tokias, kaip 143 piešinyje, tai iš jų galima būtų sudaryti magišką kvadratą su pastovia suma 15 (144 pieš.).

Analoginius kvadratus galima sudaryti iš plytelių, turinčių visas dvejukes arba trejukes, arba ketveriukes, ir dar

dviejų atitinkamai parinktų plytelių. Šių kvadratų konstantos (pastovios sumos) bus 18 arba 20, arba 24.



144 pieš.

Magiškus kvadratus galima sukonstruuoti iš didesnio plytelių skaičiaus: iš 16, 25 ir t. t.; be to, leidžiama pavartoti pasikartojančius skaičius.

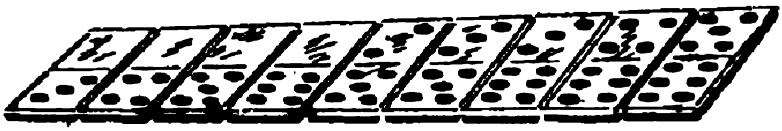
Kaip pavyzdį pateiksime magiško kvadrato, susidedančio iš 16 domino plytelių, su pastovia suma 18, schemą:

2-6	1-2	1-3	0-3
1-4	0-2	3-6	1-1
0-5	1-5	0-1	0-6
0-0	2-5	0-4	1-6

Jis sudarytas iš plytelių, turinčių visus nulius, visus vienetus, ir dar trijų plytelių: 2-5; 2-6; 3-6. Šio kvadrato kiekviename stulpelyje, kiekvienoje eilutėje ir įstrižainėje akių suma lygi 18. Kai kurios plytelės turi po lygų akių skaičių, pavyzdžiui, 1+4=0+5 (pirmas stulpelis), 2+5=1+6 (paskutinioji eilutė) ir t. t.

Gautasis kvadratas turi dar tą įdomią ypatybę, kad jame galima pirmą stulpelį perkelti į ketvirto vietą arba viršutinę eilutę pernešti žemyn, ir vėl gausime taip pat magišką kvadratą. Jei šiame kvadrate visas plyteles, turinčias nulius ir vienetus, pakeistume plytelėmis, kurių akių skaičius didesnis vienetu, dviem arba trimis, tai vėl gautume magiškus kvadratus. Pagaliau jei bet kuriame tokių kvadratų kiekvieną plytelę pakeistume papildomąja* plytele, tai vėl gautume magišką kvadratą.

Kaip matote, dominas duoda vertingos medžiagos pratimams su magiškais kvadratais. Dabar išspręskite šiuos uždavinius.



145 pieš.

1) Sudarykite iš devynių plytelių, duotų 145 piešinyje, magišką kvadratą su pastovia suma, lygia 21.

2) Parinkite 9 domino plyteles, kurių akių skaičiai sudaro seką 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ir 12, ir iš jų sudarykite magišką kvadratą. Kokia šio kvadrato konstanta (pastovi suma)?

3) Parinkite 16 domino plytelių su tokiais akių skaičiais: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9 ir 10 ir iš jų sudarykite magišką kvadratą.

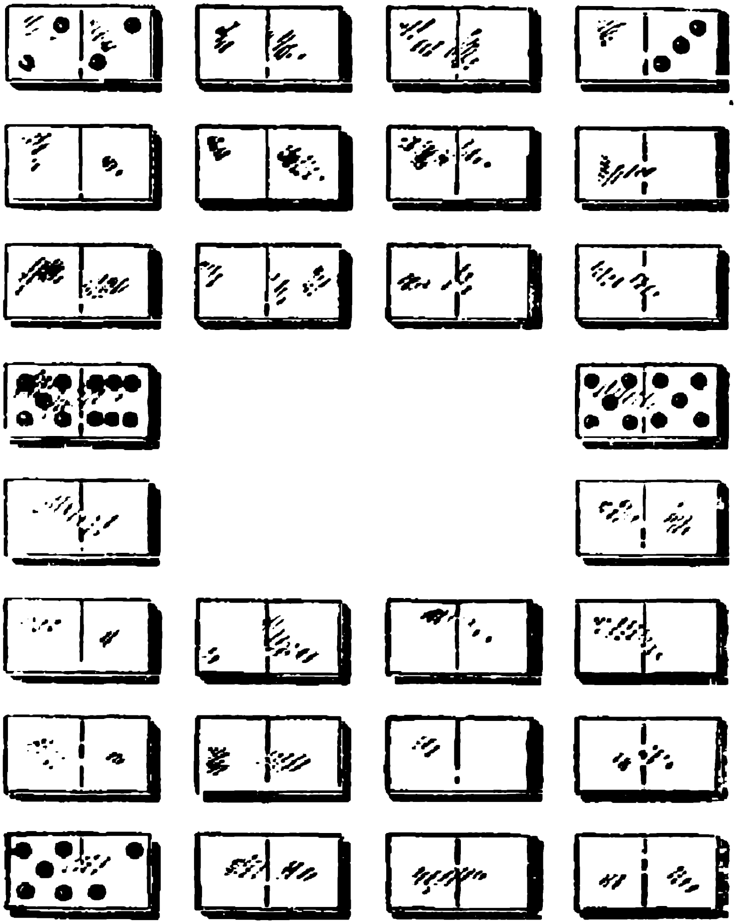
4) Sudarykite magišką kvadratą su pastovia suma, lygia 27, iš šių 25 plytelių: 0-0, 0-1, 0-2, 1-1, 0-3, 1-2, 0-4, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 5-0, 1-5, 6-0, 4-2, 3-3, 1-6, 3-4, 2-5, 2-6, 3-5, 4-4, 4-5, 6-3, 6-4.

---

* Domino plytelės vadinamos papildomosiomis, jei vienos plytelės kiekvieno kvadrato akių skaičius papildo kitos plytelės kiekvieno kvadrato akių skaičių iki šešių. Tokios, pavyzdžiui, plytelės 2-3 ir 4-3 arba 1-2 ir 5-4 ir t. t. Komplekte iš 28 plytelių yra 4 plytelės: 0-6; 1-5; 4-2 ir 3-3, kurios papildo pačios save.

203. Magiškas kvadratas su skyle

Pabandykite iš visų 28 plytelių pagal schemą, atvaizduotą 146 piešinyje, sudėti kvadratą su stačiakampe skyle viduryje. Tuo pačiu gaukite tokį plytelių išdėliojimą, kad



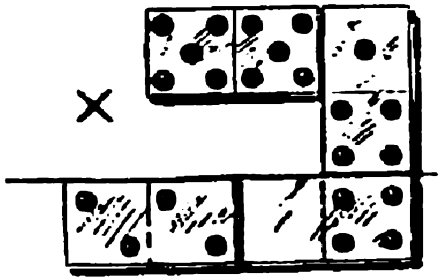
146 pieš.

akių suma kiekvienoje iš aštuonių horizontalių eilių, kiekvienoje iš aštuonių vertikalių eilių ir kiekvienoje iš dviejų įstrižainių būtų lygi 21.

Ketvirta iš viršaus 146 piešinio schemos horizontali eilė jau yra pilnai sukomplektuota. Akių suma $5+6+5+5=21$. Taip pat parodyta, kurias plyteles reikia padėti kvadrato kampuose.

204. Daugyba domino plytelių pagalba

Pažvelkite į 147 piešinį. Keturių domino plytelių pagalba mes atvaizdavome triženklio skaičiaus (551) daugybą iš vienaženklio (4), būtent: 551 $\times$ 4 = 2 204. Pabandykite išdėlioti visas 28 domino plyteles taip, kad gautumėte 7 panašias į šią «daugybas». Šešias «daugybas» jūs sudarysite



147 pieš.

be ypatingo sunkumo. O štai prie septintosios teks ilgokai pagalvoti. O vis dėlto tai įmanoma. Atminkite: nedėkite blanšo (0 akių) kairiame dauginamojo ar sandaugos gale.

205. Atspėti pasirinktą domino plytelę

Pasiūlykite draugams kartu, tačiau slapta nuo jūsų, pasirinkti mintimis kurią nors vieną domino plytelę.

Dabar tegul jie iš eilės atlieka šiuos veiksmus:

1) pasirinktos plytelės vienos puselės (kurios jie panorės) akių skaičių padaugina iš 2;

2) prie sandaugos prideda bet kurį jūsų nurodytą skaičių m;

3) gautą sumą padaugina iš 5 ir

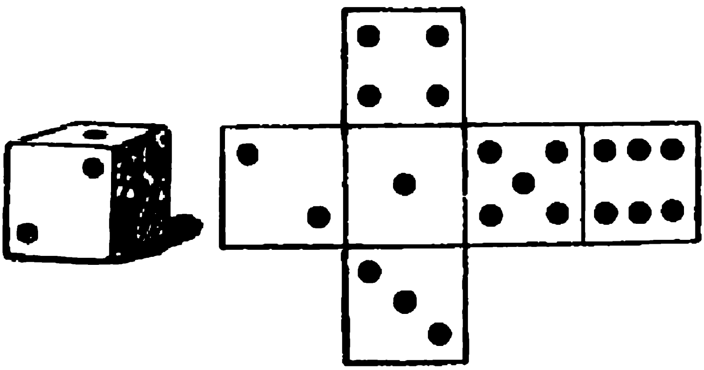
4) prie sandaugos prideda pasirinktos plytelės antros puselės akių skaičių.

Pasiteiraukite jų, koks galutinis rezultatas, ir atimkite iš jo $5m$. Tada du gautojo dviženklio skaičiaus skaitmenys ir nurodys jums pasirinktos domino plytelės kiekvienos puselės akių skaičių. Pasirinko, pavyzdžiui, plytelę 6-2. Sudaugino 6 su 2 ir pridėjo pagal jūsų reikalavimą $m = 3$. Gavo 15. Padaugino 15 iš 5 ir pridėjo pasirinktos plytelės

antros puselės 2 akis. Gavo 77. Jūs atimate $5m = 15$. Gaunate: $77 - 15 = 62$. Pasirinktoji domino plytelė: 6-2. Kodėl taip gaunate? Išsiaiškinkite!

B. KAULIUKAS

Lošiamasis kauliukas — tai kubelis, ant kurio paviršiaus pažymėti taškai. Ant vienos sienelės — vienas taškas, ant antros — 2 taškai, ant trečios — 3, ant likusių sienelių — 4, 5 ir 6 taškai. 148 piešinyje parodytas lošiamasis



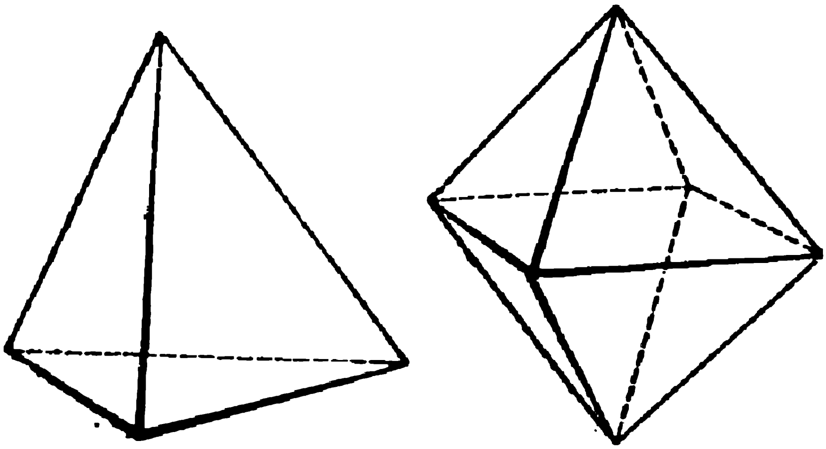
148 pieš.

kauliukas ir jo išklotinė. Ant sienelių esančių taškų skaičius nustato akių skaičių. Taškai ant kauliuko paviršiaus išdėlioti taip, kad taškų sumos ant priešingų sienelių lygios 7.

Kodėl, būtent, kubelis yra daugiasienis, labiausiai tinkamas lošimams? Pirmiausia, aišku, kad lošiamasis kauliukas turi būti taisyklingas daugiasienis, nes tik tokiu atveju, metant lošiamąjį kauliuką, kiekvienai jo sienelei yra lygūs šansai būti viršutinei. Tačiau iš penkių taisyklingų daugiasienių tipų labiausiai tinkamas, žinoma, yra kubas. Pirmiausia, jis lengvai konstruuojamas ir mestas pakankamai lengvai rieda. Jei vienoda jėga mestume visus 5 taisyklingus daugiasienius, tai tetraedras ir oktaedras (149 pieš.) vos riedės, kubas (148 pieš.) riedės geriau, o dodekaedras ir ikosaedras (150 pieš.) yra tiek «apvalūs», kad riedės beveik kaip rutuliai.

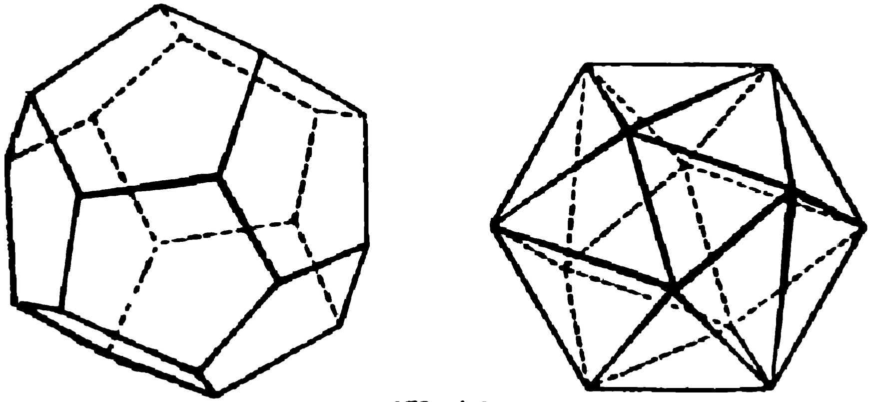
Šešios kubo sienelės davė mintį panaudoti 6 pirmus natūrinius skaičius, o priešais esančių kubo sienelių lygia-

greti tarpusavio padėtis leido paprastai, dėsningai ir tam tikra prasme simetriškai tuos skaičius išdėlioti (kiekvienoje priešais esančių sienelių poroje taškų skaičių suma lygi 7).



149 pieš.

Šis septynių principas ir yra įvairių uždavinių — pokštų su vienu ar keliais lošiamaisiais kauliukais sprendimo raktas. Tiems, kurie dar nepastebėjo šios taškų



150 pieš.

išdėliojimo ant kauliuko paviršiaus savybės, bus sunkoka suvokti «atspėjimų», kuriuos jūs galite pademonstruoti, paslaptis.

206. Aritmetinis pokštas su lošiamaisiais kauliukais

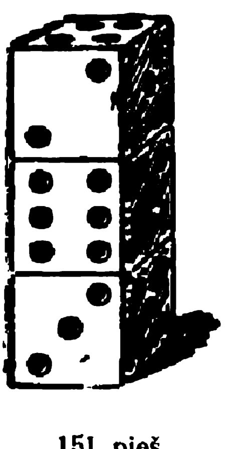
Pokštui parodyti reikia 3 lošiamųjų kauliukų. Jei jūs jų neturite, persipieškite kauliuko išklotinę, atvaizduotą 148 piešinyje, ant storo popieriaus arba ant plono kartono, rūpestingai iškirpkite ir suklijuokite.

«Fakiras» nusigręžia; «publika» meta ant stalo 3 kauliukus. «Fakiras» pasiūlo «publikai» suskaičiuoti visų trijų kauliukų viršutinių sienelių akių skaičių, po to pakelti kurį nors vieną kauliuką ir jo apatinės sienelės akių skaičių pridėti prie ankstyvesnės sumos. Toliau «fakiras» vėl pasiūlo mesti tą kauliuką, kuris buvo pakeltas ir jo viršutinės sienelės akių skaičių pridėti prie anksčiau gautos sumos. Po to «fakiras» atsigręžia, primena «publikai», kad jis nežino, kuris kauliukas buvo antrą kartą mestas, ima į ranką visus 3 kauliukus, sukrečia juos (kad atrodytų paslaptingiau) ir, nustebindamas «publiką», «atspėja» galutinį atliktų aritmetinių veiksmų rezultatą.

«Atspėjimo» metodas. Prieš paimant kauliukus į ranką, reikia sudėti jų viršutinių sienelių akis ir pridėti 7. Gauta suma ir bus ta, kuri turi būti «atspėta».

Paaiškinkite, kodėl?

207. Paslėptų sienelių akių sumos atspėjimas



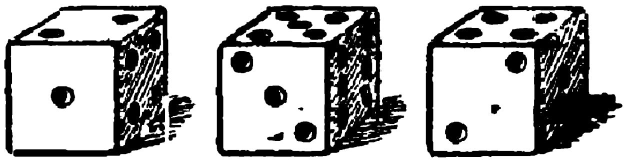
151 pieš.

Tegul trys lošiamieji kauliukai sukrauti stulpeliu (151 pieš.). Pažvelgę tiktai į stulpelio viršutinę sienelę arba tiktai į dvi jo šonines sieneles, jūs galite iš karto nustatyti sienelių, kuriomis kauliukai susiglaudžia, ir pačios apatinės sienelės akių bendrą sumą. Pavyzdžiui, kauliukų padėtyje, atvaizduotoje 151 piešinyje, ieškomoji suma būtinai lygi 17.

Suvokite, kokia taisykle reikia vadovautis, kad galima būtų atspėti paslėptų akių sumą.

208. Kuria tvarka išdėlioti kauliukai?

Duokite draugams tris kauliukus, popierio gabaliuką, pieštuką ir pasiūlykite jiems, kauliukus bet kaip išdėliojus į eilę, sudaryti triženklį skaičių, kurio skaitmenis reikštų kiekvieno kauliuko viršutinės sienelės akių skaičiai. Pavyz-



152 pieš.

džiui, kai kauliukai yra išdėlioti pagal 152 piešinį, triženklis skaičius bus 254. Prie to skaičiaus tegul jie prirašo tris skaitmenis, reiškiančius atitinkamų kauliukų apatinių sienelių akių skaičių. Gaunamas šešiaženklis skaičius. Mūsų pavyzdyje — 254 523. Gautą šešiaženklį skaičių paprašykite padalyti iš 111 ir jums pasakyti rezultatą.

Neatlikę daugybos, jūs labai greitai galite nustatyti šio šešiaženklio skaičiaus pirmuosius tris skaitmenis, taigi, pasakyti, kokia tvarka buvo išdėlioti kauliukai.

A t s p ė j i m o m e t o d a s. Iš pranešto jo dalmens atimti 7 ir skirtumą padalyti iš 9. Gautojo dalmens skaitmenys ir parodys pradinį kauliukų išdėstymą.

Tęsdami duoto pavyzdžio nagrinėjimą, gausime:

$$254\,523 : 111 = 2\,293;\; 2\,293 - 7 = 2\,286;\; 2\,286 : 9 = 254.$$

Kokia šio pokšto matematinė esmė?

SEPTINTASIS SKYRIUS

DEVYNIUKĖS SAVYBĖS

Kai kurių aritmetinių operacijų su sveikais skaičiais savotiškumai yra susieti su skaičiumi 9. Kiekviena jūsų pastebėta devyniukės savybė gali suteikti progą sugalvoti įvairias matematines pramogas. Yra žinomas, pavyzdžiui, dalumo iš 9 požymis: skaičius dalijasi iš 9, jei jo skaitmenų suma dalijasi iš devynių. Iš to matyti, kad bet kurio skaičiaus sandaugos iš 9 skaitmenų suma lygi 9 arba dali devyniems (tai yra dalijasi iš devynių). Pavyzdžiui, $354 \times 9 = 3\,186$; tada $3+1+8+6=18$ (dalijasi iš devynių).

Todėl, kai vienas mažėlis skundėsi, kad jam sunku įsiminti pirmųjų dešimties skaičių daugybos iš d e v y n i ų lentelę, tai mažėlio tėvas pasiūlė jam paprastą būdą — rankų pirštais padėti atminčiai.

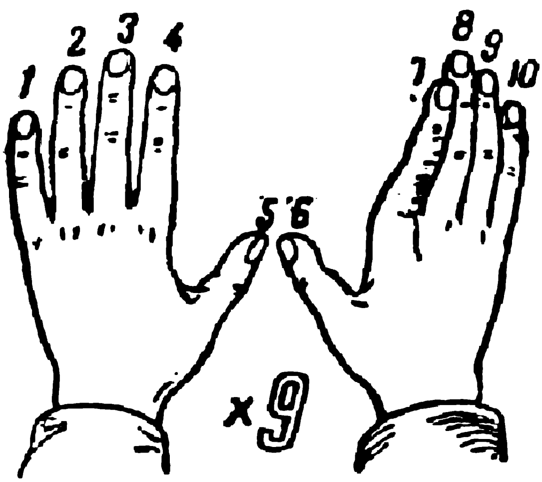
Štai tas būdas, kuris bus naudingas ir pagelbės kitiems.

Piršto judesiu. Padėkite ant stalo abi rankas greta ir ištieskite pirštus. Kiekvieną pirštą iš kairės į dešinę pažymėkime atitinkamais skaičiais: pirmą iš kairės 1, antrą po jo 2, trečią — 3, ketvirtą — 4 ir t. t. iki dešimtojo, kurį pažymėkime skaičiumi 10. Tegul reikia bet kurį pirmos dešimties skaičių padauginti iš 9. Tam jums tereikia tik, neatitraukiant rankų nuo stalo, kilstelėti į viršų tą pirštą, kuris žymi dauginamąjį. Tada likusių pirštų, gulinčių kairėje nuo pakeltojo piršto, skaičius bus sandaugos dešimčių skaičius, o pirštų dešinėje skaičius — vienetų skaičius.

P a v y z d y s. Padauginti 7 iš 9. Dėkite rankas ant stalo ir pakelkite septintą pirštą (153 pieš.); kairėje nuo pakeltojo piršto guli 6 pirštai, o dešinėje — 3. Vadinasi, pa-

dauginę 7 iš 9, gavote 63. Šią iš pirmo žvilgsnio stebėtiną mechaninę daugybą greitai bus galima suprasti, jei prisiminsime, kad daugybos lentelėje kiekvieno skaičiaus ir devynių sandaugos skaitmenų suma lygi devyniems, o dešimčių skaičius visada vienetu mažesnis už tą skaičių, kurį mes dauginame iš 9. Atitinkamo piršto pakėlimu mes tai ir pažymime, taigi ir... sudauginame.

Žmogaus ranka yra viena iš pirmųjų skaičiavimo mašinų!



153 pieš.

Dar keletas savybių. Štai dar keletas įdomių ir ateičiai naudingų savybių, susietų su skaičiumi 9.

1) Visada dalijasi iš 9:

a) bet kurio skaičiaus ir jo skaitmenų sumos skirtumas;

b) dviejų skaičių su vienodais skaitmenimis, bet su skirtingu jų išdėstymu, skirtumas;

c) dviejų skaičių su vienodomis kiekvieno jų skaitmenų sumomis skirtumas.

2) Jei skaičiuje, susidedančiame iš bet kiek skaitmenų, bet kaip pakeisime jų tvarką, tai, kiekvieną tų skaičių padalijęs iš 9, gausime tą pačią liekaną. Ji lygi liekanai, kurią gauname padalijęs bet kurio iš tų skaičių skaitmenų sumą iš 9.

3) Jei skaičiaus skaitmenų sumos dalybos iš 9 liekaną pavadinsime «pertekliumi», tai:

a) skaičių $\frac{\text{sumos}}{\text{skirtumo}}$ perteklius lygus dėmenų perteklių $\frac{\text{sumos}}{\text{skirtumo}}$ pertekliui;

b) dviejų skaičių sandaugos perteklius lygus tų skaičių perteklių sandaugos pertekliui.

Jūs lengvai patikrinsite šias savybes skaitiniais pavyzdžiais, o jei esate susipažinę su algebra, tai galite įsitikinti jų bendrumu.

Savarankiškai raskite analogišką dviejų skaičių dalmens pertekliaus priklausomybę.

Išnagrinėję šio skyriaus uždavinių sprendimus, jūs daugelį iš jų galėsite panaudoti kaip matematinius pokštus.

209. Kuris skaitmuo užbrauktas?

1 uždavinys. Tegul jūsų draugas, jums nerodydamas, užrašo skaičių iš trijų ar daugiau skaitmenų, padalija jį iš 9 ir pasako jums tokios dalybos liekaną. Dabar pasiūlykite jam užbraukti jo paimto skaičiaus vieną skaitmenį (bet kurį); skaičių, kuris liko, užbraukus skaitmenį, tegul jis vėl padalija iš 9 ir vėl jums pasako tos dalybos liekaną. Tuojau pat jūs galite pasakyti, vadovaudamiesi žemiau pateiktomis taisyklėmis, koks skaitmuo buvo užbrauktas:

a) jei antroji liekana mažesnė už pirmąją, tai, atėmę iš pirmosios liekanos antrąją, jūs gausite užbrauktąjį skaitmenį;

b) jei antroji liekana didesnė už pirmąją, tai užbrauktąjį skaitmenį jūs gausite, atėmę antrąją liekaną iš pirmosios, padidintos devyniais;

c) jei liekanos lygios, tai užbrauktas skaitmuo arba 9, arba 0. Kodėl taip yra?

2 uždavinys. Dabar pasiūlykite savo draugui sugalvoti du skaičius su vienodais skaitmenimis, tačiau skirtingai išdėstytais, ir atimti mažesnįjį iš didesniojo. Nei užrašyto skaičiaus, nei gauto skirtumo jis jums, suprantama, neturi pasakyti, tačiau tegul jis užbraukia vieną skirtumo skaitmenį (tiktai ne 0) ir pasako jums visų likusiųjų skirtumo skaitmenų sumą. Norint nustatyti užbrauktąjį skaitmenį,

jums tereikia papildyti jo pasakytąjį skaičių iki artimiausiojo skaičiaus, dalaus 9.

Pavyzdžiui,

$$72\,105 - 25\,071 = 47\,034.$$

Užbraukiame skaitmenį 3. Likusiųjų skaitmenų suma: $4 + 7 + 4 = 15$. Skaičiaus 15 papildinys iki artimiausio skaičiaus, pasidalijančio iš 9, tai yra iki 18, lygus 3, o tai ir duoda užbrauktąjį skaitmenį.

Kodėl taip yra?

P a s t a b a. Uždavinį galima visaip įvairinti, remiantis aukščiau nurodytomis devyniukės savybėmis. Galima, pavyzdžiui, pasiūlyti iš duotojo skaičiaus atimti jo skaitmenų sumą, užbraukti vieną skirtumo skaitmenį (išskyrus 0 ir 9) ir pagal pasakytąją likusiųjų skirtumo skaitmenų sumą tokiu pat būdu įspėti užbrauktąjį skaitmenį.

3 uždavinys. Parašykime bet kurį skaičių, pavyzdžiui, 7 146. Vieną skaitmenį, pavyzdžiui 4, užbraukime. Iš likusiojo skaičiaus (kuriame skaitmenų yra vienu mažiau) atimkime p r a d ž i o j e p a r a š y t o s k a i č i a u s skaitmenų sumą (18). Mūsų pavyzdyje gausime: $716 - 18 = 698$. Rezultatas paskelbiamas.

Kaip, žinant atimties rezultatą, sužinoti užbrauktąjį skaitmenį?

4 uždavinys. Parašykite du ar daugiau skaičių su vienodu skaitmenų kiekiu. Aš prirašysiu dar keletą skaičių ir pasišalinęs paprašysiu jūsų užbraukti bet kurį skaitmenį, išskyrus nulį, ir rasti likusiųjų skaičių sumą. Jeigu dabar jūs man pasakysite gautąją sumą arba bent sumos skaitmenų sumą, tai aš tuojau pat jums pasakysiu, kuris skaitmuo užbrauktas.

Pavyzdžiui,

605	*Jūsų parašyti skaičiai*
218	
~~7~~81	*Mano prirašyti skaičiai*
394	
1298	

Sumos skaitmenų suma $1 + 2 + 9 + 8 = 20$. Užbraukta 7. Kiek ir kokius skaičius aš turiu prirašyti ir kaip surasti užbrauktąjį skaitmenį?

5 uždavinys. Pirmesniame uždavinyje buvo rekomenduojama prirašyti tiek pat skaičių, kiek pasirinkusis buvo parašęs. Tačiau, esant toms pačioms sąlygoms, galima apsiriboti tiktai vieno skaičiaus prirašymu.

Pavyzdžiui,

3521
4086 } Jūsų parašyti skaičiai
7219
4272 — Mano prirašytas skaičius

19018

Sumos skaitmenų suma 1 + 9 + 1 + 8 = 19. Užbraukta 8.

Kokį skaičių turiu aš prirašyti šiuo atveju ir kokiu būdu surasti užbrauktąjį skaitmenį?

6 uždavinys. Tą pačią idėją galima ir kitaip apipavidalinti.

Pasiūlykite parašyti greta keletą vienaženklių skaičių stulpelių, o jūs iš dešinės ar kairės — pagal partnerio pageidavimą — prirašykite dar vieną skaičių stulpelį taip, kad kiekvienas jūsų skaičius papildytų eilutės skaičių sumą iki skaičiaus, dalaus devyniems. Dabar drąsiai galite pasiūlyti partneriui užbraukti bet kurį skaitmenį, likusius skaičius sudėti pagal daugiaženklių skaičių sudėties taisyklę, o pagal jums pasakytosios sumos skaitmenų sumą, naudodamiesi jau žinomomis taisyklėmis, jūs lengvai surasite užbrauktąjį skaitmenį.

Pavyzdžiui,

Mano prirašyta / Partnerio parašyta

63216
44802
47421
51921
95238

302198

Sumos skaitmenų suma be devyniukės:

3 + 2 + 1 + 8 = 14; 18 — 14 = 4.

Užbraukta 4.

Įdomu, kad visą savų skaičių prirašymą galima pakeisti vienaženklio skaičiaus prirašymu bet kurioje vietoje.

Suvokite, kaip?

210. Paslėpta savybė

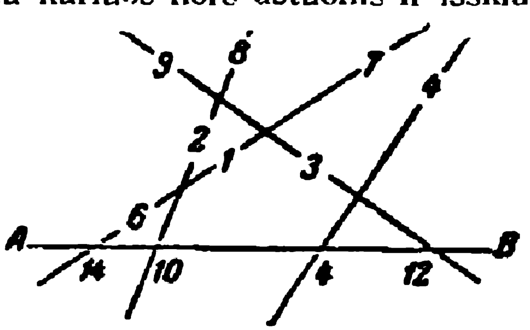
Skaičius 1313 lengvai įsimenamas, todėl juo patogu manipuliuoti tam, kuris panorės savo draugams parodyti pokštą su užbrauktojo skaitmens atspėjimu.

Tuo tikslu pasiūlykite draugams parašyti skaičių 1313 ir atimti iš jo jūsų duotą skaičių. Atimti jūs galite pasiūlyti bet kurį skaičių: vienam dalyviui — vieną, kitam — kitą. Paskui tegul kiekvienas dalyvis prie savo gautojo po atimties skaičiaus prirašo (atminkite: ne prideda, o prirašo) iš dešinės arba iš kairės skaičių, kurį jis atėmė, tik p a d i d i n t ą šimtu, ir susidariusiame naujame skaičiuje tegul užbraukia bet kurį skaitmenį, išskyrus nulį, o jums praneša likusius skaitmenis. Pagal tuos skaitmenis jūs lengvai nustatysite dalyvio užbrauktąjį skaitmenį.

Kokia skaičiaus 1313 savybė, susieta su devyniukės savybėmis, padeda nustatyti užbrauktąjį skaitmenį ir kaip tai atliekama?

211. Dar keletas įdomių nežinomojo skaičiaus suradimų

1 uždavinys. Iš devynių skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 aš atrenku kuriuos nors aštuonis ir išsklaidau juos bet



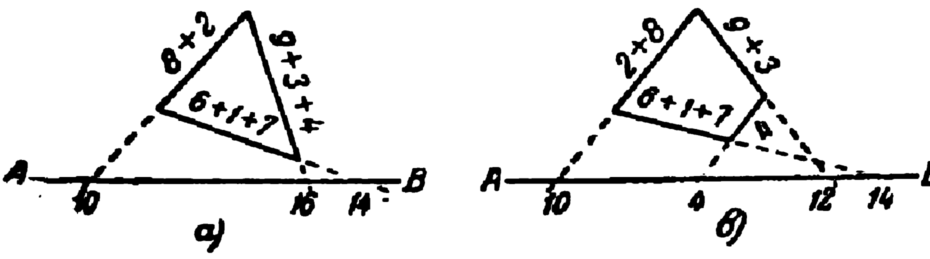
154 pieš.

kaip popieriaus lape. Bet kurioje popieriaus vietoje nubrėžiu tiesę *AB* (154 pieš.) ir pavadinu ją «rezultatų tiese». Parašytus skaitmenis bet kaip sujungiu keliomis linijomis,

tiesiomis ar kreivomis — nesvarbu, tačiau kiekvieną skaitmenį tik po vieną kartą. Prie «rezultatų tiesės» aš surašau skaitmenų, esančių išilgai kiekvienos linijos, sumas. Jums aš parodau tik tuos skaičius, kurie susidarė prie «rezultatų tiesės», arba pasakau jų skaitmenų sumą.

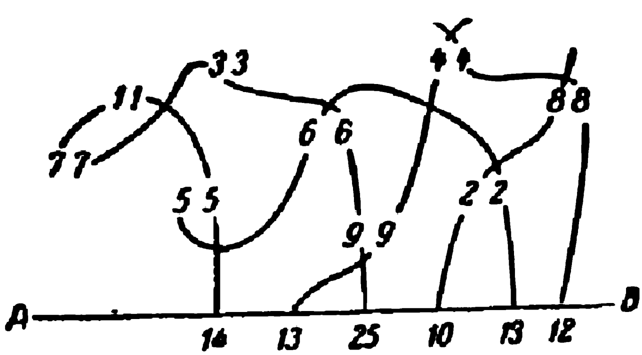
Skaičiai, surašyti, pavyzdžiui, prie 154 piešinio «rezultatų tiesės», duoda šią skaitmenų sumą: $1 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 = 13$. Žinodami pastarąjį skaičių, nustatykite, kuris skaitmuo neįėjo į pradžioje atrinktus skaitmenis?

P a s t a b a. Užuot išsklaidęs popieriuje atrinktus skaitmenis, aš galiu juos bet kuriuo būdu išdėlioti išilgai iš



155 pieš.

anksto nubrėžto trikampio (155 pieš., *a*), arba keturkampio (155 pieš., *b*), arba bet kurio daugiakampio kraštinių ir prie «rezultatų tiesės» surašyti skaitmenų, išdėliotų išilgai kiekvienos nubrėžtos figūros kraštinės, sumas.



156 pieš.

2 uždavinys. Dabar aš išsklaidau popieriaus lape skaičius 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 (156 pieš.). Vėl nubrėžiu «rezultatų tiesę» ir visus skaitmenis, išskyrus vieną — atrinktąjį, sujungiu keliomis linijomis. Prie «rezul-

tatų tiesės» surašau išdėliotų išilgai kiekvienos linijos skaičių skaitmenų sumas ir paprašysiu jūsų vėl pagal šias sumas nustatyti nesantį ant tų linijų skaitmenį. Tiems, kurie suprato pirmesnį uždavinį,— tai nesunku.

3 uždavinys. Surašykite visus sveikus skaičius nuo 1 iki 8 ir atrinkite mėgstamą skaičių. Likusius septynis skaičius bet kaip išdėliokite į du ar daugiau stulpelių. Sudėkite visus skaičius, laikydami juos daugiaženkliais, ir praneškite man sumą arba sumos skaitmenų sumą. Aš greitai surasiu jūsų mėgstamąjį skaičių. Kaip aš tai atlieku?

212. Neatliekame dalybos, o liekaną žinome

Sakykime, kad jūs žinote kurio nors skaičiaus dalybos iš 9 liekaną. Tegul, pavyzdžiui, ji lygi 2. Po to duotasis skaičius buvo padaugintas iš kurio nors skaičiaus, nesvarbu iš kurio, bet jums žinomo; kad būtų apibrėžta, sakysime, kad iš 13. Ir vėl reikia sužinoti gautojo sudauginant skaičiaus dalybos iš 9 liekaną. Pabandykite nustatyti šią liekaną, neatlikdami nei pradinio ir antrojo — duotojo skaičiaus daugybos, nei gautosios sandaugos dalybos iš 9.

213. Pagal vieną rezultato skaitmenį reikia surasti likusius tris

Kažkuris dviženklis skaičius su vienodais skaitmenimis buvo padaugintas iš 99. Lengva suprasti, kad sandauga buvo keturženklis skaičius, bet išliko tik vienas, būtent, trečiasis rezultato skaitmuo. Kaip, žinant šį skaitmenį, rasti visą rezultatą?

Tarkime, kad išlikęs skaitmuo — 5. Koks visas rezultatas?

214. Skirtumo atspėjimas

Parašykite, man nepranešdami, bet kurį triženklį skaičių su skirtingais kraštutiniais skaitmenimis (pavyzdžiui, 621) ir sudarykite naują skaičių iš tų pačių skaitmenų, tačiau išdėstytų atvirkščia tvarka (duotajame pavyzdyje —

126). Apskaičiuokite skaičių skirtumą (621 — 126 = 495) ir pasakykite man paskutinį skirtumo skaitmenį (5), o aš pasakysiu visą gautąjį rezultatą.

Kuriuo būdu?

215. Amžiaus nustatymas

Perstatykite *A* metų skaitmenis, gausite *B* amžių. *A* ir *B* amžiaus skirtumas yra lygus dvigubam *C* amžiui, tačiau *B* yra 10 kartų vyresnis už *C*. Raskite kiekvieno amžių.

AŠTUNTASIS SKYRIUS

SU ALGEBROS PAGALBA IR BE JOS

Besivystant matematikai kaip mokslui, tobulėjo ir uždavinių sprendimo menas. Grynai aritmetiniai sprendimo būdai, vystantis raidinei simbolikai, palaipsniui užleido pirmenybę algebrai ir jos lygčių aparatui. Nežinomųjų skaičių reiškimas raidėmis su paskesniu ryšių tarp nežinomųjų ir žinomųjų skaičių nustatymu, tai yra uždavinio lygčių sudarymas, pasirodė esąs galingas, visiems prieinamas ir vieningas įvairiatipiams uždaviniams spręsti metodas.

Spręsdami uždavinį, mes visada samprotaujame, tačiau tuo pačiu stengiamės nustatyti (pagal galimybes) trumpiausią samprotavimų grandinėlę. Vienais atvejais patogiau ir paprasčiau samprotavimus vesti «nuo nežinomojo prie žinomojo», užbaigiant juos vienos ar kelių lygčių sudarymu (algebrinis kelias). Einant šiuo keliu, norint tikslingiausiai parinkti nežinomąjį, kurio atžvilgiu sudaromos lygtys, reikia atsižvelgti į būdingas kiekvieno duoto uždavinio sąlygų ypatybes. Būtina įsisavinti algebrinius samprotavimo būdus, kad vėliau būtų galima sėkmingai spręsti sunkius uždavinius. Kitais atvejais, atvirkščiai, natūralu uždavinį spręsti atskirais etapais, «nuo žinomojo prie nežinomojo», konkrečiai interpretuojant kiekvieną sprendimo etapą (aritmetinis kelias).

Abu nurodytieji samprotavimų keliai vienas kitą lyg papildo; kiekviename jų gali iškilti sąmojingi ir dailūs uždavinių sprendimo būdai.

Jau daugiau kaip pusamžį šeimose, o retkarčiais ir mokyklose, pateikiamas toks uždavinys.

Kaip žąsis su gandru uždavinį sprendė. Skrido žąsų būrys, o priešais jas — viena žąsis, kuri prabilo: «Sveikos, šimtas žąsų!» Priešakyje skrendanti sena žąsis jai atsakė: «Ne, mūsų ne šimtas! Štai, jeigu mūsų būtų dar tiek ir dar pusė tiek, ir dar ketvirtis tiek, ir tu, žąsie, tada būtų šimtas žąsų, o dabar... Štai ir suskaičiuoki, kiek mūsų?»

Nuskrido vieniša žąsis toliau ir susimąstė. Iš tikrųjų, kiekgi draugių-žąsų ji sutiko? Galvojo ji, galvojo ir, ko tik nesigriebė, niekaip negalėjo šio uždavinio išspręsti. Pamatė žąsis ant kūdros kranto gandrą; vaikšto ilgakojis ir varlių ieško. Gandras — orus paukštis ir laikomas matematiku kitų paukščių tarpe: ištisomis valandomis, dažniausiai nejudėdamas, stovi ant vienos kojos ir vis galvoja, matyt, uždavinius sprendžia. Apsidžiaugė žąsis, nuskrido prie kūdros, priplaukė prie gandro ir papasakojo jam, kaip ji sutikusi būrį draugių ir kokią jai mįslę žąsis-vadovas uždavusi, ir kad ji niekaip negalinti šios mįslės išspręsti.

— Hm!.. — atsikosėjo gandras. — Pabandysim išspręsti. Tik būk atidi ir stenkis suprasti! Girdi?

— Klausau ir pasistengsiu! — atsakė žąsis.

— Tai štai. Kaip tau pasakė? Jeigu prie sutiktų žąsų pridėtume dar tiek ir dar pusę tiek, ir ketvirtį tiek, ir tave, žąsie, tai būtų šimtas? Taip?

— Taip! — atsakė žąsis.

— Dabar žiūrėk, — tarė gandras. — Štai ką aš tau nubrėšiu čia ant pakrantės smėlio (157 pieš.).

Gandras sulenkė kaklą ir snapu nubrėžė brūkšnį, greta tokį pat brūkšnį, paskui pusę tokio pat brūkšnio, po to ketvirtį brūkšnio ir dar trumputį brūkšnelį, beveik tašką. Gavo štai ką:



Žąsis priplaukė prie pat kranto, išlipo krypuodama ant smėlio, pažiūrėjo į brėžinį, tačiau nieko nesuprato.

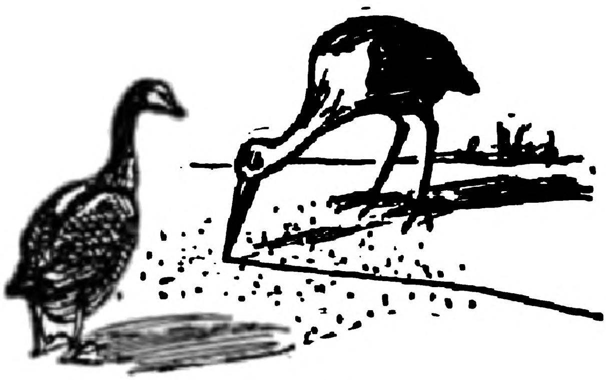
— Supranti? — paklausė gandras.

— Dar ne! — atsakė liūdnai žąsis.

— Ach, tu! Na štai žiūrėk: kaip tau pasakė, — būrys ir dar būrys, ir pusė būrio, ir ketvirtis būrio, ir tu, žąsie, —

taip aš ir nubrėžiau: brūkšnį ir dar brūkšnį, ir pusę brūkšnio, ir ketvirtį to brūkšnio, ir dar trumputį brūkšniuką, tai yra tave. Supratai?

— Supratau! — linksmai prakalbo žąsis.



157 pieš.

— Jeigu prie tavo sutikto būrio pridėtume dar būrį, dar pusę būrio, dar ketvirtį būrio, dar tave, žąsie,— tai kiek gautume?

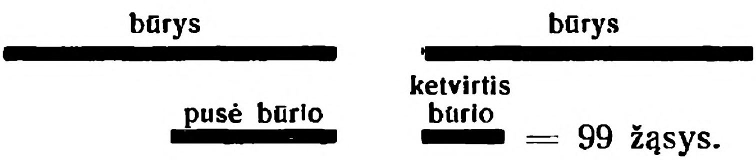
— Šimtą žąsų!

— O be tavęs,vadinasi, kiek bus?

— Devyniasdešimt devynios.

— Gerai. Atmeskim mūsų brėžinyje tašką, vaizduojantį tave, žąsie, ir pažymėkim, kad lieka 99 žąsys.

Gandras pasidarbavo snapu ir atvaizdavo smėlyje:



— Dabar gi sumesk, — tęsė gandras, — pusė būrio, kiek tai bus ketvirčių?

Žąsis susimąstė, pažiūrėjo į liniją smėlyje ir tarė:

— Linija, vaizduojanti pusę būrio, dvigubai ilgesnė, kaip linija, vaizduojanti ketvirtį būrio, t. y. pusėje yra du ketvirčiai.

— Puiku! — pagyrė gandras žąsį. — Na, o visame būryje kiek ketvirčių?

— Žinoma, keturi! — atsakė žąsis.

— Taip! Jeigu dabar paverstume ketvirčiais vieną būrį ir dar būrį, ir pusę būrio, ir ketvirtį būrio, tai kiek iš viso būtų ketvirčių?

Žąsis pagalvojo ir atsakė:

— Būrys — tai tas pats, kaip būrio 4 ketvirčiai, ir dar būrys — dar būrio 4 ketvirčiai, viso 8 ketvirčiai; dar būrio pusėje 2 ketvirčiai: viso 10 ketvirčių; ir dar ketvirtis būrio: viso 11 būrio ketvirčių, o tai sudaro 99 žąsis.

— Taip! — vėl patvirtino gandras. — Dabar sakyk, ką tu, galų gale, gavai?

— Aš gavau, — atsakė žąsis, — kad vienuolikoje mano sutiktojo būrio ketvirčių yra 99 žąsys.

— Tai, vadinasi, kiek yra viename būrio ketvirtyje žąsų?

Žąsis padalijo 99 iš 11 ir atsakė:

— Būrio ketvirtyje — 9 žąsys.

— Na, o visame būryje kiek?

— Visame būryje yra 4 ketvirčiai... Aš sutikau 36 žąsis! — džiaugsmingai sušuko žąsis.

— Na matai! — rimtai ištarė gandras. — O pati negalėjai išsiaiškinti!.. Ei, tu...žąsie!..

Labai trumpai užrašomas ir išsprendžiamas uždavinys algebros kalba. Pavadinsime būrio ketvirtį x-su. Tada visas būrys sudaro $4x$, o pusė būrio $2x$. Iš sąlygos turime: $4x + 4x + 2x + x = 99$, arba $11x = 99$, ir $x = 99 : 11 = 9$, o $4x = 4 \cdot 9 = 36$. Būrys susidėjo iš 36 žąsų.

Spręsdami tolesnius uždavinius, naudokitės bet kuriuo jums pažįstamu būdu: aritmetiniu, algebriniu, grafiniu ir pan. Atsakymus, pateiktus knygos gale, papildykite savo samprotavimais ir sprendimais.

216. Tarpusavio pagalba

Pirmaisiais metais po Didžiojo Tėvynės karo, įtemptais lauko darbų laikotarpiais kai kuriose MTS kolūkiams aptarnauti kartais trūkdavo tų ar kitų žemės ūkio mašinų ir padargų. Tada kaimyninės MTS kooperavosi tarp savęs, t. y. perduodavo viena kitai reikiamas mašinas ir padargus.

Vieną kartą viena iš trijų kaimyninių MTS tarpusavio pagalbos tvarka perdavė antrajai ir trečiajai MTS tiek įvairių žemės ūkio mašinų, kiek kiekvienoje jų buvo.

Po kurio laiko antroji MTS savo ruožtu perdavė pirmos ir trečios MTS žinion tiek mašinų, kiek iki to meto kiekvienoje jų buvo. Besibaigiant darbams ir trečioji MTS perdavė pirmajai ir antrajai MTS tiek mašinų, kiek iki to meto kiekvienoje jų buvo. Po to kiekvienoje iš trijų MTS jau buvo po 24 mašinas.

Kiek žemės ūkio mašinų buvo iš pradžių kiekvienoje MTS?

217. Dykinėtojas ir velnias

Tarp mūsų, sąžiningo ir džiaugsmingo darbo žmonių, įsitaisė Dykinėtojas. Ir mokytis jis tingi, ir nuo darbo išsisukinėja, o pinigus mėgsta, gobšus. Niekaip nenori suprasti, kad tik tie pinigai geri, kurie sąžiningu darbu uždirbami. Vaikšto Dykinėtojas be darbo ir dūsauja:

— Ech, dalia mano nelaiminga. Niekas ir pasižinti su manimi nenori. Sako: «Dykinėtojai mums nereikalingi. Pats nieko nedirbi ir mums trukdai. Eik po velnių!»

— Nebent koks velnias patars man, kaip turtingu pasidaryti?! — Vos taip pagalvojo Dykinėtojas, žiūri — prieš jį velnias bestovįs.

— Ką gi, — sako, — jeigu nori, aš tau padėsiu. Darbas lengvas, ir turtingas tapsi. Šit, matai tiltą per upę?

— Matau, — atsako truputį pabūgęs Dykinėtojas.

— Na, tai pereik tiltu į kitą krantą, ir turėsi dvigubai daugiau pinigų, negu turi. Dar kartą tiltu pereisi, vėl pinigų pasidarys dvigubai daugiau, nei buvo. Ir taip kiekvieną kartą: kai tik tu pereisi tiltą, pas tave bus lygiai du kartus daugiau pinigų, nei prieš tai buvo.

— Argi?! — apsidžiaugė Dykinėtojas.

— Tikrų tikriausiai! — užtikrino velnias. — Tiktai, palauk, viena sąlyga! Už tai, kad tau suteikiu tokią laimę, tu kiekvieną kartą, perėjęs tiltą, atiduosi man po 24 kapeikas už gerą patarimą.

— Na, ką gi, — sutiko Dykinėtojas, — jeigu pinigai padvigubės, tai kodėl neatiduoti tau kiekvieną kartą po 24 kapeikas? Gal pradėkim!

Perėjo vieną kartą Dykinėtojas tiltą, suskaičiavo pinigus... Tai stebuklas! Iš tikrųjų, pinigų pasidarė dvigubai daugiau, nei buvo. Metė jis velniui 24 kapeikas ir perėjo antrą kartą tiltą. Vėl pinigų pasidarė du kartus daugiau, nei buvo prieš tai. Atskaitė jis 24 kapeikas, atidavė velniui ir nuėjo tiltu trečią kartą. Pinigų pasidarė vėl dvigubai daugiau. Tačiau jų ir tebuvo lygių lygiausiai 24 kapeikos, kurias pagal susitarimą visas teko atiduoti velniui. Velnias nusikvatojo ir dingo iš akių.

Liko Dykinėtojas be kapeikos. Matyti, kad, be svetimo patarimo, dar reikia ir savo proto turėti!

Kiekgi pinigų buvo iš pradžių Dykinėtojo kišenėje?

218. Sumanus mažėlis

Trys broliai gavo 24 obuolius; be to, kiekvienam teko tiek obuolių, kiek jis turėjo metų. Pats jauniausias, labai sumanus berniukas, pasiūlė broliams tokius obuolių mainus:

— Aš, — tarė jis, — paliksiu sau tik pusę turimų obuolių, o likusius padalysiu jums po lygiai, po to tegul mūsų vidurinis brolis taip pat pasiliks sau pusę, o likusius obuolius atiduos man ir vyresniam broliui po lygiai, o po to ir vyresnysis brolis tegul sau paliks pusę visų pas jį esamų obuolių, o likusius padalys man ir viduriniam broliui po lygiai. Broliai, neįtardami tokiame pasiūlyme klastos, sutiko patenkinti jaunesniojo pageidavimą. Po dalybų pasirodė, kad... visi turi po lygiai obuolių.

Kiekgi metų turėjo mažėlis ir kiekvienas iš likusių brolių?

219. Meškeriotojai

Trys meškeriotojai žuvaudami praleido paeiliui keletą dienų ant upės kranto. Visi jie buvo rūkantieji.

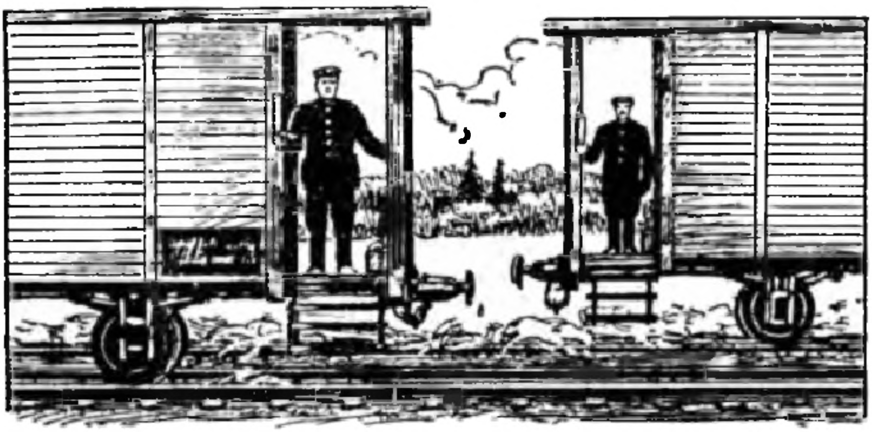
Paskutiniosios meškeriotojų buvimo ant upės kranto dienos rytą paaiškėjo, kad tiktai pas vieną iš jų dar liko nepilnas pakelis papirosų. Meškeriotojai papirosus pasidalijo po lygiai. Kiekvienas per dieną surūkė po 4 papirosus,

ir liko pas visus kartu tiek papirosų, kiek po dalybų buvo pas kiekvieną.

Kiek papirosų buvo pakelyje?

220. Priešais einą traukiniai

Du prekiniai traukiniai, abu po 150 *m* ilgio, eina vienas prieš kitą vienodu 45 *km/val* greičiu. Kiek praeis sekun-



158 pieš.

džių nuo mašinistų susitikimo iki to meto, kai susitiks paskutinių vagonų palydovai (158 pieš.)?

221. Viera skaito knygą

— Skaitysiu vidutiniškai po 20 puslapių per dieną, — nusprendė Viera. Tačiau pirmą knygos pusę ji skaitė tingėdama, tiktai po 10 puslapių per dieną. Užtat antrą knygos pusę ji skaitė po 30 puslapių per dieną.

— Štai ir gavosi vidutiniškai po 20 puslapių per dieną,— padarė išvadą Viera.

— Tu neteisingai skaičiuoji, — tarė mama.

— Kaip tai neteisingai? $10 + 30 = 40$; $40 : 2 = 20$. Arba: skaitydama pirmąją knygos pusę, aš neperskaitydavau po 10 puslapių per dieną, o antrąją — aš perskaitydavau daugiau už vidutinę normą tuos pačius 10 puslapių.

— Ir vis dėlto — atkakliai laikėsi mama,— vidutiniškai tu skaitei mažiau kaip 20 puslapių per dieną. Pagalvok gi dar kaip reikiant.

Ar įtikinami Vieros argumentai? Ką parodo jūsų skaičiavimas?

222. Istorija su grybais

Penketas draugų: Marusia, Kolia, Vania, Andriuša ir Petia, poilsiaujančių pionierių stovykloje, išėjo grybauti (159 pieš.). Tiesa, rimtai grybavo tik viena Marusia, o



159 pieš.

berniukai didesnę laiko dalį voliojosi žolėje, pasakodami vienas kitam visokius nebūtus dalykus.

Dėl to, nutarus grįžti į stovyklą, pasirodė, kad berniukų pintinės tuščios, kai tuo tarpu Marusia savo pintinėje suskaitė 45 grybus.

— Nepatogu jums, vaikai, grįžti į stovyklą su tuščiomis pintinėmis,— užjautė Marusia ir visus savo grybus išdėliojo į berniukų pintines (savo pintinėje nepaliko nė vieno grybo). Tačiau, grįždami atgal, Kolia ir Andriuša užtiko grybų ir papildė jais savo pintines: Kolia rado 2 gry-

bus, o Andriuša padvigubino buvusių pas jį grybų skaičių. Vania ir Petia visą kelią išdykavo ir išbarstė dalį savo grybų. Vania pametė 2 grybus, o Petia išbarstė pusę iš Marusios gautų grybų. Keisčiausia pasirodė tai, kad kai jie stovykloje pradėjo skaičiuoti atneštus grybus, tai pas visus berniukus grybų buvo po lygiai. Kada grybautojai papasakojo draugams visą istoriją su grybais, tai matematikos mėgėjus sudomino klausimas: ar galėtų jie, remdamiesi tuo pasakojimu, apskaičiuoti, kiek grybų iš Marusios gavo kiekvienas berniukas?

Kaip jūs manote?

223. Kuris sugrįš anksčiau?

Du sportininkai vienu metu pradėjo lenktynes valtimis: vienas nuplaukė upe tam tikrą atstumą ir grįžo atgal, o antras tokį pat nuotolį šalia upės esančiu stovinčio vandens ežeru. Sakykime, kad abiejų irkluotojų jėgų įtempimas visą laiką visiškai vienodas. Kuris iš jų sugrįš anksčiau? Laikas, sunaudotas posūkiuose, į skaičiavimus neįeina.

Pastaba. Beveik prieš keturiasdešimt metų su analoginiu uždaviniu pirmą kartą buvo susidurta oreivybės praktikoje. Buvo pravedamos aviacijos varžybos, pagal kurių sąlygas lakūnai turėdavo apskristi pagal perimetrą didžiulį stačiakampį lauką, pažymėtą keturiais stulpais, be to, stulpus reikėjo aplenkti, darant posūkius.

Iškilo klausimas: ar vienodos skridimo sąlygos nesant vėjo ir pučiant vėjui?

224. Plaukikas ir skrybėlė

Tegul kažkas, iššokęs iš laivelio, nešamo upės srovės, tam tikrą laiką plaukia prieš srovę, o po to apsisuka ir pasiveja laivelį.

Kuriuo atveju jis sunaudoja daugiau laiko: kai plaukia prieš srovę, ar kai vejasi laivelį — pasroviui? Arba, gal būt, abu laiko kiekiai vienodi?

Be to, laikoma, kad plaukiko raumenų įtempimas visą laiką vienodas.

Kokį atsakymą į iškeltą klausimą jums perša pradinė nuovoka ir ar jį patvirtina tolesni samprotavimai?

O teisingas atsakymas toks: plaukikas laivelį vijosi pasroviui tiek pat laiko, kiek laiko jis plaukė iš pradžių prieš srovę.

Iš tikrųjų, upės srovė nuneša žemyn vienodu greičiu tiek laivelį, tiek ir plaukiką, tai yra srovė pati savaime nedaro įtakos atstumui tarp plaukiko ir laivelio, lyg jos visai nebūtų. Iš čia ir seka, kad, net padedant srovei, plaukikas artėja prie laivelio tiek pat laiko, kiek laiko jis nuo jo tolinosi.

Dabar įsivaizduokite, kad nuo tilto į nedidelę upę nušoko sportininkas ir nuplaukė prieš srovę. Tuo pačiu metu nuo vieno stebėtojo, stovinčio ant to paties tilto, galvos nukrito skrybėlė ir nuplaukė pasroviui. Po 10 minučių plaukikas pasuko atgal, ir, kada vėl priplaukė prie tilto, jo paprašė nesustojus plaukti toliau ir pasivyti skrybėlę. Plaukikas pasivijo skrybėlę kaip tik po kitu tiltu, kuris buvo už 1 000 *m* nuo pirmojo tilto. Plaukiko greitis nežinomas, bet žinoma, kad jis visą plaukimo laiką savo pastangų nepakeitė. Pasinaudoję tik nurodytais duomenimis, jūs galite nustatyti tos upės srovės greitį.

Sulygindami savo šio uždavinio sprendimą su tuo, kuris pateiktas «Atsakymuose ir sprendimuose», atkreipkite dėmesį į antrąjį sprendimo būdą.

225. Du laivai

Štai dar vienas pirmesniojo uždavinio temos įdomus variantas. Du mokomieji laivai vienu metu išplaukė iš prieplaukos. Laivas «Stepanas Razinas» — pavandeniui, o laivas «Timiriazevas» — prieš vandenį. Nuosavi jų greičiai vienodi. Išvykimo momentu nuo laivo «Stepanas Razinas» nukrito gelbėjimo ratas, kuris nuplaukė pasroviui. Po valandos abiejuose laivuose per radiją buvo gautas potvarkis apie krypčių pakeitimą: einančiam pavandeniui — pasukti

prieš vandenį, o einančiam prieš vandenį — pasukti pavandeniui.

Ar suspės laivo «Stepanas Razinas» įgula anksčiau pakelti plaukiantį upe gelbėjimo ratą, nei abu laivai susitiks?

226. Patikrinkite savo nuovoką!

Du gliseriai plaukia išilgai didelio ežero į ten ir atgal, neužtrukdami prie krantų. Kiekvieno gliserio greitis pastovus. Jie vienu metu apleido priešingus krantus: gliseris «*M*» paliko krantą «*A*», o gliseris «*N*» — krantą «*B*», ir pirmą kartą susitiko 500 *m* nuo kranto «*A*»; sugrįždami jie susitiko antrą kartą 300 *m* nuo kranto «*B*».

Iš tų duomenų nustatykite ežero ilgį. Nuovoka padės jums be sudėtingų skaičiavimų išspręsti uždavinį «mintinai».

227. Keblios padėties išvengta

Sodinant kolūkio sodą, veikliai dalyvavo ir pionieriai. Būriai tarpusavy lenktyniavo.

Dirbo visi labai uoliai. Štai tik Pavliko Morozovo vardo būryje vos nesusidarė kebli padėtis. Vitia Vetluginas pareiškė, kad jis pasodins pusę to vaismedžių skaičiaus, koks bus pasodintas visų kitų būrio pionierių. O Kiriuša Černovas pažadėjo pasodinti tiek medelių, kiek jų pasodins visi kiti būrio pionieriai (įskaitant ir Vitią Vetluginą).

Sklype pionieriai dirbo iš karto ne visi, o pagal eilę, poromis. Vitia ir Kiriuša buvo paskutinėje poroje. Visi jų būrio pionieriai sėkmingai įvykdė savo įsipareigojimus. Iš viso jie pasodino 40 medelių. O kai atėjo eilė Vitiai ir Kiriušai, tai iškilo sunkumas, apie kurį nieks anksčiau nepagalvojo, nors jį galima buvo numatyti. Būtent: kad ištesėtų savo pažadus, Vitia turėjo žinoti, kiek medelių pasodins Kiriuša, o Kiriušai, savo ruožtu, būtinai reikėjo žinoti, kiek medelių pasodins Vitia. Abu laukė vienas kito, ir padėtis atrodė visiškai be išeities, kol vyresnysis pionierių vadovas nurodė visiškai paprastą ir logišką išeitį.

Kokią?

228. Kiek kartų didesnis?

Jei iš dviejų skaičių atimtume po pusę mažesniojo skaičiaus, tai didesniojo liekana bus tris kartus didesnė už mažesniojo liekaną.

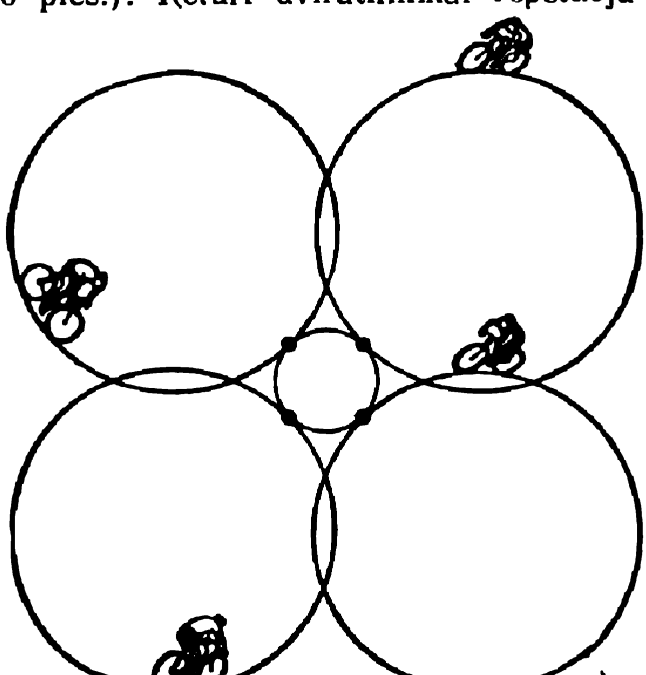
Kiek kartų didesnysis skaičius didesnis už mažesnįjį?

229. Laivas ir hidroplanas

Laivas išvyko į tolimą jūros reisą. Kada jis nutolo nuo kranto per 180 mylių, paskui jį su skubiu paštu išskrido hidroplanas. Jo greitis 10 kartų didesnis už laivo greitį. Kuriame atstume nuo kranto hidroplanas pasivys laivą?

230. Arenoje dviratininkai-figūrininkai

Arena — didžiulė lygi aikštė su keturiais apskritais takais (160 pieš.). Keturi dviratininkai repetuoja čia savo



160 pieš.

bendrą cirkinį numerį. Kiekvienas dviratininkas juda savo apskritu taku. Pradeda judėti jie vienu metu, ir kiekvie-

nas pradeda iš tos savo važiavimo tako vietos, kuri yra arčiausiai nuo arenos centro. Kiekvieno jų judėjimo greitis tiksliai matematiškai apskaičiuotas ir sutartiniais vienetais gali būti išreikštas šiais skaičiais:

$$V_1 = 6\ \frac{\text{vienetai}}{\text{valandą}},$$

$$V_2 = 9\ \frac{\text{vienetai}}{\text{valandą}}.$$

$$V_3 = 12\ \frac{\text{vienetų}}{\text{valandą}},$$

$$V_4 = 15\ \frac{\text{vienetų}}{\text{valandą}}.$$

Kiekvieno apskritimo ilgis sudaro $\frac{1}{3}$ sutartinio ilgio vieneto.

Dviratininkų-figūrininkų pasirodymas užtrunka lygiai 20 min.

Ar dviratininkai-figūrininkai per tas 20 minučių atsidurs visi vienu metu dar kartą ar keletą kartų tose vietose, iš kurių jie pradėjo judėjimą?

231. Tekintojo Bykovo darbo greitis

Kada Stalininės premijos laureatas tekintojas-spartuolis P. Bykovas padidino špižiaus piovimo greitį 1 690 *m/min*, tai detalės apdirbimo laikas sutrumpėjo nuo 35 minučių iki $2^1/_2$ minutės.

Kokį piovimo greitį jis pasiekė tada?

232. Džeko Londono kelionė

Viename Džeko Londono apsakyme aprašoma, kaip jis rogėmis, vežamomis penkių šunų, skubėjo iš Skagvėjo į savo stovyklą, kur gulėjo jo mirštantis draugas. Tame apsakyme yra keletas įdomių smulkmenų, kurios leidžia iš apsakymo padaryti įdomų uždavinį.

Pirmą kelionės parą rogės su šunimis judėjo pilnu, iš anksto Džeko Londono numatytu greičiu. Praslinkus parai, 2 šunys nutraukė pakinktus ir pabėgo su vilkų gauja.

Londonui teko tęsti kelionę trimis šunimis, kurie tempė roges greičiu, lygiu $\frac{3}{5}$ pradinio greičio. Dėl tos priežasties Londonas atvyko į paskyrimo vietą dviem parom vėliau numatyto termino.

Sia proga apsakymo autorius pastebi: «Jeigu 2 pabėgusieji šunys būtų įkinkyti prabėgę dar 50 mylių, aš būčiau atvykęs tik vieną dieną vėliau numatyto termino».

Kyla klausimas: koks buvo atstumas nuo Skagvėjo iki stovyklos? Apsakyme apie tai nieko nepasakyta, tačiau atstumui nustatyti užtenka apsakyme pateiktų duomenų.

233. Iš nevykusių analogijų galimos klaidos

Kai kurios išvados ir net ištisi atradimai padaromi pagal *analogiją*, kurios pagrinde yra prielaida apie dviejų daiktų panašumą vienais požymiais ar savybėmis dėl to, kad tie patys daiktai panašūs ir kitais požymiais.

Tačiau analogija nieko neįrodo. Ji gali tik mums duoti mintį, kurios teisingumą reikalinga dar patikrinti, patvirtinti.

Gerai padaryta analogija naudinga ir matematikoje. Aišku yra, kad kiekvienas pastebėtas panašumas matematiniuose veiksmuose, pritaikant taisykles ir t. t. palengvina uždavinių sprendimą, padeda galvoti; vis dėlto, stebėdami p a n a š i a s savybes ir požymius, nepamirškite ir a p i e j ų s k i r t i n g u m u s.

Nevykusi analogija pagimdo klaidingas išvadas.

Būna, klausi pašnekovo:

— Keliais vienetais 40 daugiau už 32?

— Aštuoniais, — atsako jis be vargo.

— O keliais vienetais 32 mažiau už 40?

— Taip pat aštuoniais.

— Teisingai. Dabar apskaičiuokite, keliais procentais skaičius 40 didesnis už skaičių 32? Beje, nevarkite! Aš pasakysiu keliais. Lygiai 25%. Tačiau keliais procentais skaičius 32 mažesnis už skaičių 40 — reikia paskaičiuoti...

— Ką gi čia skaičiuoti, — pertraukia pašnekovas,— juk jūs pasakėte, kad keturiasdešimt daugiau už trisdešimt du 25%, vadinasi, ir trisdešimt du mažesni už keturiasdešimt taip pat 25%.

Tenka pašnekovui išaiškinti jo klaidą.

Skirtumas, iš tikrųjų, abiem atvejais vienas ir tas pats — 8. Tačiau pirmu atveju mes jį priskiriame skaičiui 32, kurį laikome 100%, o antru atveju — skaičiui 40, kurį laikome 100%. Aštuoni nuo keturiasdešimt sudaro $^1/_5$, arba 20%. Taigi, 40 už trisdešimt du didesnis 25%, kai tuo tarpu 32 už keturiasdešimt mažesnis 20%.

Pašnekovo suklydimo priežastis — klaidinga analogija.

Pasiūlykite savo pažįstamiems tokius uždavinius:

1) Sakykim, kad jūsų mėnesinis uždarbis padidėjo 30%. Keliais procentais išaugo jūsų perkamoji galia?

2) Tegul jūsų mėnesinis atlyginimas nepakeistas, bet prekių kainos sumažintos 30%. Keliais procentais šiuo atveju išaugo jūsų perkamoji galia?

3) Bukinistinis knygynas, parduodamas knygas, padarė 10% pradžioje numatytos kainos nuolaidą ir vis dėlto gavo 8% pelno. Kiek procentų pelno knygynas buvo numatęs iš pradžių gauti, parduodamas šias knygas?

4) Jei darbininkas sutrumpino detalės padirbimo laiką P%, tai keliais procentais pakilo jo darbo našumas?

Klaidingus atsakymus į šiuos paprastus klausimus jūs sutiksite ne taip jau retai, tačiau... pradžioje patys save patikrinkite.

234. Juridinis kazusas

Senovės romėnai mažai nuveikė matematikos mokslų srityje. Teisės mokslų srityje jie nužengė toliau. Pasiekę mus senovės romėnų matematiniai veikalai daugiausia yra grynai praktinio, utilitarinio pobūdžio.

Vienas iš pretekstų aritmetiniams uždaviniams atsirasti buvo romėnų įstatymai apie paveldėjimą. Štai vienas iš tokių senovinių uždavinių.

Kažkas mirdamas paliko nėščią žmoną ir padarė tokį testamentą: jei gimtų sūnus, jam atiduoti $\frac{2}{3}$ palikto turto, o motinai $\frac{1}{3}$. Gimus dukrai, ji turi gauti $\frac{1}{3}$, o motina $\frac{2}{3}$ turto.

Testatoriaus našlė pagimdė dvynukus — mergaitę ir berniuką. Tokio įvykio testatorius nebuvo numatęs.

Kaip padalyti turtą tarp visų trijų paveldėtojų, kuo mažiau nutolstant nuo testatoriaus nurodytų sąlygų?

Šio uždavinio matematinis sprendimas priklauso nuo juridinio testatoriaus valios aiškinimo. Vieną iš galimų, juridiškai pagrįstų, šio uždavinio sprendimų davė romėnų juristas Salvianas Julianas. Jo sprendimas pateiktas atsakyme, tačiau neskubėkite žiūrėti į atsakymą. Pagalvokite, pasiginčykite tarpusavy, pasiūlykite savo sprendimą.

235. Poromis ir trejetais

Vienodai žingsniuodamas pas savo bičiulį, aš nusprendžiau išmatuoti atstumą nuo savo namo iki jo namo. Pusę kelio aš skaičiavau žingsnius poromis, o pusę kelio — trejetais. Žingsnių porų suskaičiavau 450 daugiau, kaip trejetų.

Kiek žingsnių iki mano bičiulio namo?

236. Kuris važiavo arkliu?

Du piliečiai — vienas arkliu, kitas mašina — vienu metu išvyko iš kaimo į miestą. Vienas jų — jaunas, kitas — senyvas. Po kurio laiko paaiškėjo, kad jei senyvasis būtų nuvažiavęs trigubai didesnį nuotolį, tai jam būtų belikę važiuoti perpus mažiau. Jei jaunasis būtų nuvažiavęs dukart mažesnį nuotolį, tai jam būtų likę važiuoti trigubai daugiau.

Kuris iš jų važiavo arkliu — senyvasis ar jaunasis?

237. Du motociklininkai

Du motociklininkai vienu metu iš tos pačios vietos išvažiavo pasivažinėti. Abu nuvažiavo vienodą kelią ir grįžo namo tuo pačiu laiku. Kelyje jie ilsėjosi. Vienas jų važiavo dukart ilgesnį laiką, nei kitas ilsėjosi; antrasis važiavo triskart ilgesnį laiką, nei pirmasis ilsėjosi. Kuris iš jų važiavo greičiau?

238. Kuriame lėktuve Volodios tėtis?

— Sakyk, tėveli,— paklausė Volodia savo tėvą — lakūną,— kuriame lėktuve tu buvai oro parado metu?

— Tu lengvai gali pats apskaičiuoti,— atsakė Volodios tėvas, nupiešęs lėktuvų «devyniukę» (161 pieš.).

— Aš prisimenu, kad lėktuvų skaičius į dešinę pusę nuo manęs, padaugintas iš lėktuvų skaičiaus į kairę pusę nuo manęs, buvo lygus skaičiui, trimis mažesniam, nei būtų



161 pieš.

buvęs tuo atveju, jei mano lėktuvas būtų buvęs 3 vietomis dešiniau.

Volodia pagalvojo ir parodė piešinyje tą lėktuvą, kuriame buvo jo tėvas.

239. Suskaidyti į dalis

Suskaidykite 45 į keturias dalis taip, kad prie pirmos dalies pridėjus 2, iš antros atėmus 2, trečią padauginus iš 2, o ketvirtą padalijus iš 2, gautieji skaičiai būtų lygūs.

240. Dvi žvakės

Dega dvi nevienodo ilgio ir storio žvakės. Ilgesnioji sudega per $3\frac{1}{2}$ val., o trumpoji — per 5 val. Po 2 val. vienalaikio degimo jos liko vienodo ilgio. Kiek kartų viena žvakė iš pradžių buvo trumpesnė už kitą?

241. Stebėtinas įžvalgumas

Kada vaikai aplanko savo vyresnį draugą, buhalterį Nikanorovą, jis būtinai pasiūlo jiems ką nors paskaičiuoti. Štai kas stebėtina: kitais kartais jis netgi nežino, kuriuos skaičius vyrukai sudėjo ar atėmė, o pažiūrės į rezultatą ir iš karto pasakys, kuris gavo teisingą atsakymą, o kuris — neteisingą.

— Nagi,— pasakys jis,— sugalvokite kokį nors keturženklį skaičių, kiekvienas atskirai. Sugalvojote? Taip... Dabar perstatykite pirmąjį skaitmenį į skaičiaus galą. Pas jus atsirado dar vienas keturženklis skaičius. Sudėkite abu tuos skaičius. Pavyzdžiui, 1 234 + 2 341 = 3 575. Na, pasakykite man savo rezultatus.

Kolia: 8 612,
Polia: 4 322,
Tolia: 9 867,
Olia: 13 859.

— Visi, išskyrus Tolią, padarė klaidą.

Patikrino. Iš tikrųjų taip.

Kaip tai Nikanorovas sužinojo? Juk jis nežinojo, kokius skaičius sugalvojo vaikai!

242. «Tikras laikas»

Į dirbtuvę «Tikras laikas» buvo atnešti keturi laikrodžiai: sieninis, stalinis, žadintuvas ir rankinis.

Sieninis laikrodis, palyginus su laiko signalu, vėluoja 2 minutes per valandą. Stalinis laikrodis, palyginus su sieniniu, skuba 2 minutes per val. Žadintuvas, palyginus su staliniu, vėluoja 2 minutes per val. Rankinis, palyginus su žadintuvu, skuba 2 minutes per val. 12-tą valandą visi laikrodžiai buvo nustatyti pagal laiko signalą.

Kurį laiką rodys rankinis laikrodis 19-tą signalinio laiko valandą?

243. Laikrodžiai

Vargas su tais laikrodžiais. Vidurdienį, vasario 2 dieną, ir aš, ir Vasia nustatėme juos tiksliai. Po kelių dienų vėl patikrinome laikrodžius. Pasirodė, kad mano laikrodis truputį skubėjo, o Vasios vėlavo. Perskaičiavę į 1 valandą,

gavome, kad mano laikrodis skubėjo viena sekunde, o Vasios vėlavo $1\frac{1}{2}$ sekundės per valandą.

Mes vis tik nusprendėme savo laikrodžių rodyklėlių nepavaryti ir susidomėjome tokiais klausimais:

1) kada kitą kartą mano ir Vasios laikrodžiai rodys tą patį laiką?

2) kada kitą kartą jie rodys tuo pačiu metu teisingą laiką?

244. Kurią valandą?

1 uždavinys. Praėjus po vidurdienio tam tikram laikui, meistras išėjo pietauti. Išeidamas jis įsidėmėjo laikrodžio rodyklių padėtį. Grįžęs meistras pastebėjo, kad minutinė ir valandinė rodyklės pasikeitė vietomis.

Kurią valandą grįžo meistras?

Jeigu jūs išsiaiškinote pirmojo uždavinio sprendimą, tai jums netaip jau sunku bus savarankiškai išspręsti antrą ir trečią uždavinius.

2 uždavinys. Mama mane leido pasivaikščioti. Aš nebuvau namuose daugiau, kaip dvi valandas, tačiau mažiau, nei tris. Grįžęs namo, pastebėjau, kad mano nebuvimo metu mūsų sieninio laikrodžio minutinė ir valandinė rodyklės pasikeitė vietomis.

Kiek laiko virš dviejų valandų aš vaikščiojau?

3 uždavinys. Mokinys pradėjo spręsti uždavinį tarp 4-tos ir 5-tos valandos vakaro, kai laikrodžio rodyklės sutapo. O baigė tada, kada minutinė rodyklė atsirado priešais va landinę (vienoje tiesėje).

Kiek minučių mokinys sprendė uždavinį ir kurią valandą jį išsprendė?

245. Kurią valandą prasidėjo pasitarimas ir kurią baigėsi?

Pasitarimas prasidėjo tarp 6-tos ir 7-tos valandos vakaro, o baigėsi tarp 9-tos ir 10-tos valandos vakaro.

Sužinoti t i k s l i a i, kuriuo laiku prasidėjo pasitarimas ir kuriuo baigėsi, jei minutinė ir valandinė rodyklės per pasitarimo laiką pasikeitė vietomis.

246. Seržantas treniruoja žvalgus

Žvalgų skyriaus vadas, seržantas Semočkinas, naudojasi kiekvienu patogiu momentu, kad ištreniruotų savo pavaldinių pastabumą, nuovoką, karišką gudrumą. Tai jis nelauktai paklausia:

— Kiek atramų turi tiltas, kurį mes šiandien perėjome?

Arba štai pasiūlo savo žvalgams išspręsti laisvalaikiu uždavinį.

— Įsivaizduokite,— pasakys, pavyzdžiui, Semočkinas, papsėdamas pypkę,— kad du mūsų skyriaus žvalgai išsiųsti į tą patį punktą. Abu jie nuėjo vienodą kelią, tačiau pirmasis sugaišo visam keliui vienokį laiką, o antrasis — kitokį. Pirmasis žvalgas ėjo pusę viso jo sugaišto laiko tam tikru greičiu. Antrasis žvalgas tokiu pat greičiu ėjo pusę kelio. Pirmasis žvalgas antrą pusę savo laiko ėjo pakeistu greičiu; ir antrasis žvalgas ėjo antrą kelio pusę tokiu pat pakeistu greičiu.

Kuris jų atėjo į numatytą vietą greičiau?

Šiam uždaviniui išspręsti žvalgai ėmė įvairius skaičius kelio ilgiui ir greičiui, tiek pradiniam, tiek ir pakeistam, žymėti, atlikinėjo atitinkamus skaičiavimus ir kiekvieną kartą prieidavo prie to paties rezultato:

pirmasis žvalgas sugaišo mažiau laiko visam keliui, nei antrasis.

Tie žvalgai, kurie buvo truputį susipažinę su algebra, uždaviniui spręsti naudojo ne skaičius, o raides, tačiau gavo tą patį atsakymą. Tuo pačiu jie įrodė, kad uždavinyje nurodytomis sąlygomis pirmasis žvalgas ateis greičiau už antrąjį nepriklausomai nei nuo atstumo, nei nuo jų greičių skaitinių dydžių.

Ar galite jūs išspręsti šį uždavinį «raidėmis»?

247. Iš dviejų pranešimų

Pirmasis pranešimas:

— Traukinys N pro mane praėjo per t_1 sekundžių.

Antrasis pranešimas:

— Tas pats traukinys N perėjo a metrų ilgio tiltą per t_2 sekundžių.

Kaip iš tų dviejų pranešimų sužinoti traukinio N ilgį ir greitį, tariant, kad traukinio greitis nepasikeitė?

248. Kiek naujų stočių buvo pastatyta N geležinkelio ruože?

— Smarkus pramonės ir žemės ūkio augimas mūsų šalyje yra lydimas naujų gyvenviečių ir miestų statybos, taigi, ir nepertraukiamo geležinkelių tinklo plėtimo,— pasakė N geležinkelio viršininkas bendrame darbininkų ir tarnautojų susirinkime.

— Viename mūsų kelio ruožų — tęsė jis, — artimiausiu laiku baigiama naujų keleivinių geležinkelio stočių statyba. Mes turime pavyzdingai pasiruošti jų atidarymui ir neleisti transporto darbe sutrikimų.

— Ar atspausdinti nauji bilietų komplektai keleiviams, kurie naudojasi mūsų ruožu? — pasiteiravo kelio vyresnysis kasininkas.

— Taip, visi reikiami bilietai paruošti, o tam, kad bet kurioje mūsų ruožo stotyje keleivis galėtų gauti iš anksto paruoštą bilietą iki bet kurios kitos to paties ruožo stoties, teko, ryšium su naujų stočių atidarymu, atspausdinti 46 papildomus bilietų komplektus.

Iš tų duomenų sužinokite, kiek stočių buvo prie N geležinkelio ruožo ir kiek buvo pastatyta naujų stočių?

249. Išrinkti keturis žodžius

AŠ
YLA
GĖLĖ
TAIKA
PROTAS
VĖLIAVA
ĮSAKYMAS
TRIKAMPIS
MATEMATIKA
SOCIALIZMAS
PASIUNTINYBĖ
KVALIFIKACIJA
KORESPONDENTAS

Stulpelyje iš kairės 13 žodžių. Kiekviename žodyje, pradedant antruoju, raidžių skaičius yra vienu didesnis, nei pirmesniame. Paskutiniame žodyje «korespondentas» — 14 raidžių. Ir tegul bus dar kaip išimtis vienas nemalonus žodis, susidedantis iš 15 raidžių, — «eksploatatorius».

Iš visų tų keturiolikos žodžių išrinkite keturis žodžius taip, kad būtų teisingos šios dvi lygybės:

$$a^2 = bd,$$

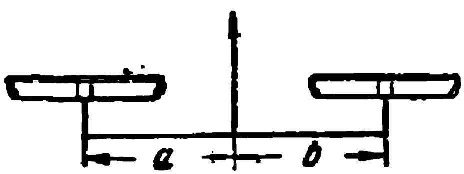
$$ad = b^2c.$$

Čia raidėmis *a, b, c* ir *d* pažymėti raidžių skaičiai atitinkamai pirmame, antrame, trečiame ir ketvirtame jūsų išrinktuose žodžiuose.

Kurie tai žodžiai?

250. Ar leistinas toks svėrimas?

Geros lėkštelinės svarstyklės turi būti lygiapetės (162 pieš., $a = b$). Kolūkiniame turguje buvo atidaryta nauja bakalėjinių prekių pardavimo būdelė. Deja, svarstyklės, atgabentos į būdelę, pasirodė truputį nelygiapetės, ir naudotis jomis buvo uždrausta.



162 pieš.

— Blogos svarstyklės rytoj bus pakeistos teisingomis svarstyklėmis,— pasakė direktorius pardavėjui,— o kol kas prekiaukite tiktai fasuotomis prekėmis.

Prieš pat prekiavimo laiko pabaigą buvo parduotas paskutinis fasuoto cukraus pakelis. Tačiau atėjo dar vienas pirkėjas, kuris pageidavo nusipirkti 2 *kg* cukraus. Pardavėjas nenorėjo pirkėją atleisti nepatenkinęs. Jis nusprendė pasinaudoti neteisingomis svarstyklėmis ir pasiūlė pirkėjui tokį svėrimo būdą:

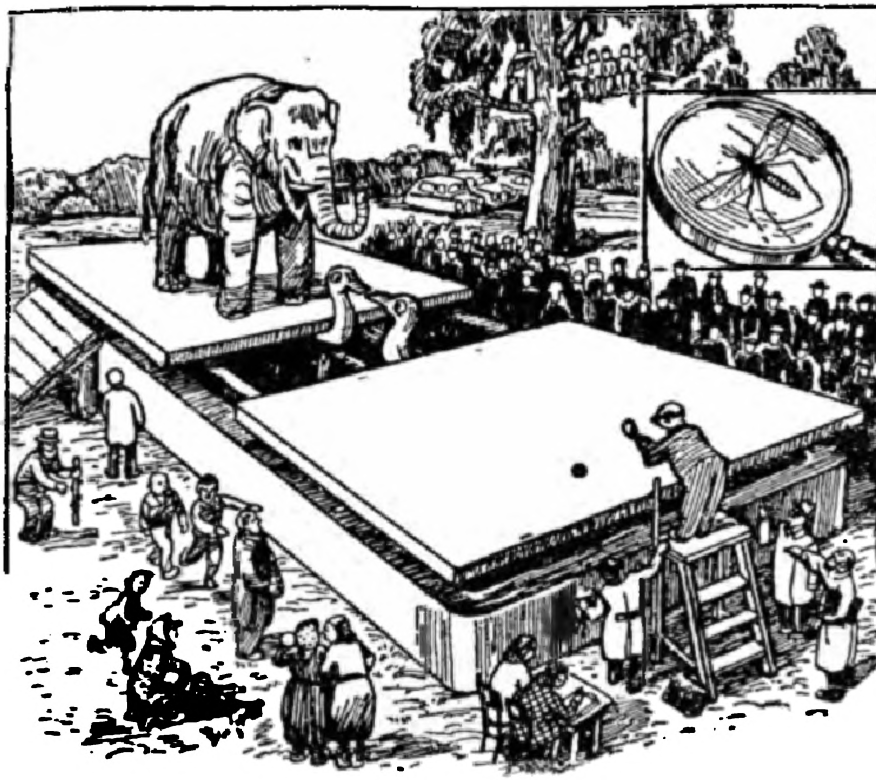
— Aš padėsiu 1 *kg* svarstį į kairę svarstyklių lėkštę, nenustatęs svarstyklių pusiausvyros, o cukrų — į dešinę; po to atvirkščiai: svarstį į dešinę, o cukrų į kairę. Aš manau, kad tai bus teisinga, nes jei pirmame cukraus pakelyje bus truputį mažiau kaip 1 *kg*, tai antrame — tiek pat daugiau.

Ar gali pirkėjas sutikti su tokiu svėrimo būdu?

251. Dramblys ir uodas

Vienas matematinių pramogų mėgėjas, kartą užsiiminėdamas įvairių algebrinių reiškinių pertvarkymu, priėjo keistą išvadą, kad dramblio svoris lygus uodo svoriui (163 pieš.)! Jis samprotavo taip:

Tegul x — dramblio svoris, o y — uodo svoris.



163 pieš.

Abiejų svorių sumą pažymėkime $2v$:

$$x + y = 2v.$$

Iš šios lygybės galima gauti dar dvi:

$$x - 2v = -y,$$
$$x = -y + 2v.$$

Sudauginkime pastarąsias dvi lygybes panariui:

$$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy.$$

Pridėję prie abiejų šios lygybės pusių po v^2, gausime: $x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$ arba $(x - v)^2 = (y - v)^2$. Ištraukę iš abiejų pastarosios lygybės pusių kvadratinę šaknį, gausime: $x - v = y - v$, arba $x = y$, tai yra dramblio svoris (x) lygus uodo svoriui (y).

Nagi išaiškinkite, kaip čia yra?

252. Penkiaženklis skaičius

Kartą man pasitaikė įdomus penkiaženklis skaičius A. Prirašęs vienetą to skaičiaus priekyje, aš gavau, žinoma, šešiaženklį skaičių: [1][A]; prirašęs vienetą iš galo, aš taip pat gavau šešiaženklį skaičių: [A][1]. Tačiau antrasis šešiaženklis skaičius buvo trigubai didesnis už pirmąjį: $\frac{[A][1]}{[1][A]} = 3$. Raskite tą skaičių.

253. Šimtą metų jums nesenti

Uždavinys būna patrauklus vienu atveju savo kraštutiniu sąlygos aiškumu ir lakoniškumu, kitu, atvirkščiai, — sąlygos įmantrumu, «painumu», panašiu į ploną raštuotą nėrinį.

Ar nenorite jūs, pavyzdžiui, nustatyti ryšį tarp mano ir jūsų amžių pagal tokią «raštuotą» sąlygą:

Šiuo metu man ir jums drauge 86 metai. Mano metų skaičius sudaro $\frac{15}{16}$ amžiaus, kurį jūs turėsite tada, kai mano amžius sudarys $\frac{9}{16}$ to metų skaičiaus, kurį jūs turėtumėte, jei išgyventumėte iki tokio amžiaus, kuris du kartus didesnis už mano metų skaičių tuo metu, kada aš galėsiu būti dvigubai už jus vyresnis.

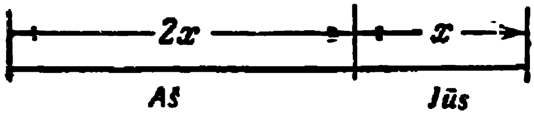
Kiek man metų ir kiek jums?

Šį uždavinį galima išspręsti tokiu, gana sąmojingu, būdu.

S p r e n d i m a s. Įsižiūrėkite į uždavinio sąlygos «nėrinį» ir jūs išskirsite tam tikrą «raštą», einantį nuo uždavinio pabaigos prie jo pradžios.

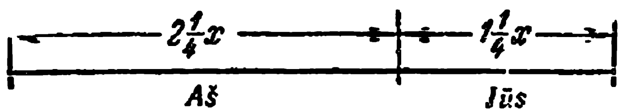
1) Tam tikru laiko momentu aš galiu būti už jus dvigubai vyresnis. Jei tuo metu jūsų amžius x, tai mano — $2x$.

Kad būtų vaizdingiau, atvaizduokime šį amžių santykį dviem atkarpomis, kurių viena dvigubai ilgesnė už antrą:

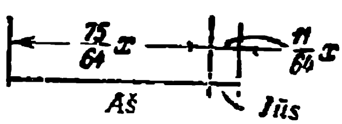


Iš čia seka, kad aš už jus vyresnis x metų ir tas skirtumas tarp mūsų amžių bus visada.

2) Tam tikru kitu laiko momentu mano amžius sudaro $\frac{9}{4}$ jūsų amžiaus, kuris buvo momentu 1); atkarpa, vaizduojanti mano amžių, dabar turi būti $2\frac{1}{4}x$ ilgio, o jūsų, kaip visada, x-su trumpesnė, tai yra $1\frac{1}{4}x$:



3) Šiuo metu mano amžius sudaro $\frac{15}{16}$-to jūsų amžiaus, kuris buvo momentu 2), tai yra $\frac{15}{16}\cdot\frac{5}{4}x=\frac{75}{64}x$, o jums, kaip ir pirmiau, x metų mažiau: $\frac{75}{64}x-x=\frac{11}{64}x$:



Kadangi dabar mums drauge 86 metai, tai $\frac{75}{64}x+\frac{11}{64}x=$ $=86$. Iš čia $x=64$. Vadinasi, man šiuo metu yra $\frac{75}{64}\cdot 64=$ $=75$ metai, o jums $\frac{11}{64}\cdot 64=11$ metų.

Taip gauname pagal uždavinį. Iš tikrųjų man dar toli iki 75 metų, o jums, tur būt, daugiau kaip 11.

Išspręskite savarankiškai dar vieną analoginį uždavinį.

Dabar man dukart daugiau metų, nei buvo Jums tada, kada man buvo tiek metų, kiek jums dabar. Kai jums bus tiek metų, kiek man dabar, tada mums drauge bus 63 metai. Kiek kiekvienam iš mudviejų dabar metų?

254. Senovinis uždavinys

Kiekvieną vidurdienį iš Havro į Niujorką išvyksta laivas, ir tuo pačiu metu tos pačios kompanijos laivas išvyksta iš Niujorko į Havrą. Perplaukimas tiek viena, tiek ir kita kryptimi trunka lygiai 7 dienas. Kiek savo kompanijos laivų, plaukiančių priešinga kryptimi, sutiks laivas, išvykęs šiandien vidurdienį iš Havro?

255. Savotiškas pasivažinėjimas

Du berniukai išsirengė pasivažinėti dviračiais. Kelyje vienam jų sulūžo dviratis, ir teko jį palikti taisymui. Tuo tarpu berniukai nusprendė pasivažinėjimo nenutraukti, o tęsti jį, iš dalies pėsčiomis, iš dalies dviračiu, šiuo būdu:

Išvyksta abu vienu metu: vienas — dviračiu, antras — pėsčiomis. Tam tikroje vietoje dviratininkas paliks dviratį, o savo kelionę toliau tęs pėsčiomis. Jo bendrakeleivis, priėjęs prie sutartos vietos, sės ant dviračio ir, prisivijęs savo draugą, vėl užleis jam dviratį, o pats tęs kelionę pėsčiomis.

Kuriame atstume nuo galinio jų pasivažinėjimo punkto reikia palikti paskutinį kartą dviratį, kad abu berniukai vienu laiku pasiektų galinį punktą, jei nuo avarijos vietos iki tikslo jiems liko 60 *km*; pėsčiomis jie keliauja po 5 *km*, o dviračiu — po 15 *km* per val.

Ar buvo naudingas berniukams toks keliavimo būdas?

256. Viena paprastųjų trupmenų savybė

Parašykite kiek norite skirtingų paprastųjų trupmenų, kurių skaitikliai ir vardikliai teigiami.

Sudarykite naują trupmeną, kurios skaitiklis būtų lygus visų skaitiklių sumai, o vardiklis — visų jūsų parašytų trup-

menų vardiklių sumai. Ta nauja trupmena būtinai bus didesnė už pačią mažiausią, tačiau mažesnė už pačią didžiausią iš jūsų parašytų trupmenų.

Patikrinkite šią savybę kokiu nors pavyzdžiu ir įrodykite, kad ji teisinga kiekvienam bet kurių teigiamų trupmenų skaičiui.

DEVINTASIS SKYRIUS

MATEMATIKA BEMAŽ BE SKAIČIAVIMŲ

Įvairių uždavinių sprendimas daugiau ar mažiau remiasi samprotavimais, bet ypatingai patrauklūs yra tokie uždaviniai, kuriuose pagrindinį, sprendžiamą vaidmenį vaidina teisingas griežtų, retkarčiais labai subtilių, samprotavimų grandinėlės sudarymas.

Kai kurie panašios rūšies uždaviniai net nėra matematiški ta prasme, kad jiems spręsti nereikalingi skaičiavimai, bet ir tokie uždaviniai ugdo «matematinį protavimą», moko «galvoti», «analizuoti», verčia ieškoti nešabloninių sprendimo būdų.

257. Tamsiame kambaryje

Aš įėjau į kambarį savo batų ir kojinių iš spintos pasiimti. Kambaryje miegojo sesuo, ir buvo visiškai tamsu. Aš gerai žinojau, kurioje spintos vietoje yra mano trys poros batų — visos skirtingų fasonų — ir 12 porų juodų ir rudų kojinių. Nenorėjau uždegti šviesos, kad nepažadinčiau sesers.

Iš tikrųjų, ir kojines, ir batus aš radau savo vietose, tačiau, turiu prisipažinti, netvarkoje — tiesiog didelę krūvą, susidedančią iš 6 batų ir 24 kojinių.

Kiek batų ir kojinių (mažiausia) aš turiu išnešti iš tamsaus kambario į šviesą, kad apsirūpinčiau vieno fasono batų pora ir vienos spalvos kojinių pora? Be to, man buvo visvien, koks avalynės fasonas ir kokia kojinių spalva bus.

258. Obuoliai

Dėžėje sumaišyti trijų rūšių obuoliai. Kokį mažiausią obuolių skaičių reikia spėtinai, nepažvelgiant į dėžę, išimti iš jos, kad tarp išimtųjų obuolių būtų: 1) bent 2 obuoliai vienos rūšies; 2) bent 3 obuoliai vienos rūšies?

259. Oro prognozė

Jei 12-tą valandą nakties lyja, tai ar galima laukti, kad po 72 valandų bus saulėtas oras?

260. Medelių sodinimo diena

«Medelių sodinimo dieną» dviem mūsų pionierių būriams — mūsų mokyklos IV ir VI klasių mokiniams — buvo pavesta pasodinti medelius abiejose gatvės pusėse, po vienodą skaičių kiekvienoje pusėje.

Kad nesusikompromituotų prieš šeštaklasius, IV klasės pionieriai išėjo į darbą anksčiau ir, kol atėjo šeštaklasiai, suspėjo pasodinti 5 medelius, deja, paaiškėjo, kad jie pasodino medelius ne savo pusėje.

Teko IV klasės pionieriams eiti į savo pusę ir iš naujo pradėti darbą. Šeštaklasiai, žinoma, savo darbą baigė anksčiau. Tada būrio tarybos pirmininkas pasiūlė:

— Einame, vyručiai, padėsime IV klasės komandai!

Visi sutiko. Perėjo į kitą gatvės pusę, pasodino 5 medelius, vadinasi, atidavė skolą, be to, suspėjo pasodinti dar 5 medelius, ir visas darbas buvo užbaigtas.

— Nors jūs atėjote anksčiau už mus, vis dėlto mes jus aplenkėme, — pasijuokė vienas šeštaklasis, kreipdamasis į IV klasės komandą.

— Pagalvok, aplenkė! Tiktai 5 medeliais, — kažkuris atsikirto.

— Ne penkiais, o dešimčia, — suūžė šeštaklasiai. Ginčas užvirė. Vieni užsispyrę teigė, kad «penkiais», o kiti stengėsi kaip nors įrodyti, kad «dešimčia».

Teisybę, žinoma, pasiekė, tačiau ginčijosi ilgai.

Kurie gi teisūs?

261. Majoro argumentai

— Štai trijų tarybinių berniukų fotografijos: Burovo, Gridniovo ir Klimenkos, kurie šiuo metu yra jūsų zonoje, — tarė majoras Krylovas, kreipdamasis į amerikiečių pulkininką Haroldą.

— Neprieštarauju. Pasakykite jų vardus.

— Šių berniukų vardai: Kolia, Petia, Griša.

— Taip, bet kuris gi iš jų Burovas, kuris Gridniovas ir Klimenka?

— Na, Burovo vardas, sakysim, Kolia...

— Tai netiesa. Be to, jūs ne tvirtinate, o spėjate. Aš nesutinku su tokia reikalo išaiškinimo forma. Jūs privalote tiksliai pasakyti Burovo vardą, Gridniovo vardą ir Klimenkos vardą, o taip pat kiekvieno amžių.

— Aš priverstas spręsti apie tų berniukų vardus tiktai iš nedaugelio netiesioginių pranešimų, kuriuose man kaip tik trūko vienos grandies. Tačiau dabar aš turiu visus duomenis ir galiu tiksliai nustatyti kiekvieno iš trijų berniukų vardą ir amžių.

— Įdomu.

— Visų pirma, malonėkite, pulkininke Haroldai, patvirtinti, kad teisingos tokios žinios.

1) Nadios Sierovos, neseniai pabėgusios iš jūsų vaikų stovyklos «A» prie Dortmundo, tėvas — tikras Burovo motinos brolis.

2) Petia kurį laiką vedė dienyną, kurio vienas puslapis — mano rankose. Jis rašo: «Aš į mokyklą įstojau 7 metų... Šiais metais tėvynėje aš būčiau jau mokęsis algebros, geometrijos ir fizikos...» Tame pačiame dienyno puslapyje pasakyta, kad Petia turi tikrą senelį — Semioną Zacharovičių Mokrousovą.

3) Gridniovas vyresnis už Petią 1 metais.

4) Griša vyresnis už Petią 1 metais.

— Tai viskas?

— Taip. Ir, jei jūs patvirtinate, kad šios žinios teisingos...

— Šį kartą jūs niekur nesuklydote, majore Krylovai, tačiau ar ne mažoka duomenų, kad teisingai atsakytumėte į mano klausimus?

— Visiškai pakanka, pone pulkininke.

Ir majoras Krylovas visiškai tiksliai nurodė kiekvieno berniuko vardą ir amžių.

Pulkininkas Haroldas buvo priverstas sutikti su majoro Krylovo argumentais.

Kaip samprotavo majoras Krylovas?

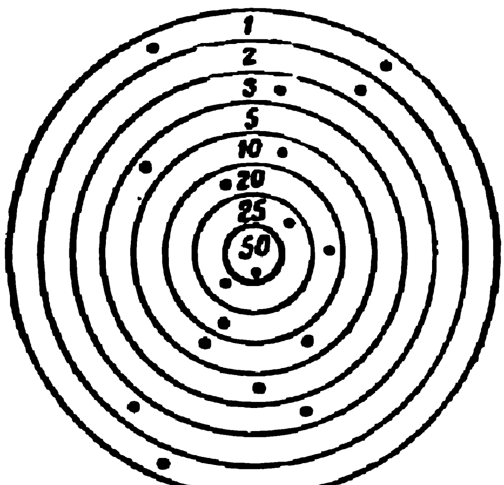
262. Kurios vienmetės?

Penktoje klasėje mokosi 4 mergaitės: Mania, Tania, Pania ir Sania. Dvi iš jų vienmetės. Jei Mania nebūtų jaunesnė už Sanią ir būtų Panios amžiaus, tai ji būtų vyresnė už Tanią. Jei Pania nebūtų vyresnė už Sanią ir būtų Manios amžiaus, tai ji būtų jaunesnė už Tanią.

Kuri yra Tanios vienmetė: Mania, Pania ar Sania?

263. Taiklumo varžybos

Trys berniukai — Andriuša, Boria ir Volodia — šaudė mažo kalibro šautuvėliu į specialų taikinį, atvaizduotą



164 pieš.

164 piešinyje. Kiekvienas berniukas iššovė po 6 šūvius. Piešinyje pažymėtos taškais kliudymo vietos. Apskaičiavus rezultatus, paaiškėjo, kad kiekvienas berniukas surinko po 71 tašką. Be to, iš visų 18 šūvių tik vienu buvo pataikyta į taikinio centrinį apskritimą (50 taškų).

Kuriam iš berniukų — Andriušai, Boriai ar Volodiai — priklauso tas sėkmingiausias šūvis,— aš pamiršau. Tačiau jūs tai galite sužinoti iš tokių duomenų: pirmieji du šūviai Andriušai davė 22 taškus, pirmas Volodios šūvis jam davė tiktai 3 taškus.

Kuris gi iš berniukų pataikė į centrinį taikinio ratą?

264. Pirkinys

Mergaitė pirko krautuvėje 42 pieštukus: 15 paprastų po 16 kapeikų, 7 spalvotus po 28 kapeikas, 12 braižymui ir 8 cheminius. Jai išrašė 8 rub. 90 kap. čekį. Cheminių pieštukų ir braižymo pieštukų kainų mergaitė neprisiminė, tačiau žinojo tų pieštukų skaičių, todėl ji tuoj pat čekyje aptiko klaidą ir apie tai pareiškė pardavėjui. Pardavėjas perskaičiavo sumą, atsiprašė ir ištaisė čekį.

Kaip mergaitė pastebėjo klaidą?

265. Žolių rinkėjai

Vasarą, žygio metu, dvi pionierių grandys rinko tos pačios rūšies vaistažoles. Farmacijos valdyba už surinktas žoles sumokėjo berniukams tam tikrą pinigų sumą, kurios didesnė dalis priklausė pirmajai grandžiai, nes pirmosios grandies pionieriai surinko vaistažolių daugiau, negu antrosios grandies pionieriai.

Jei be bendros farmacijos valdybos sumokėtos pinigų sumos taip pat yra žinoma, kiek kilogramų žolių surinko kiekviena grandis, tai paskirstyti pinigus abiem grandims yra visiškai nesudėtingas uždavinys. Tačiau visus reikiamus aritmetinius veiksmus vaikai sušifravo, kiekvieną skaičių, išskyrus 7, pakeitę žvaigždute, ir siūlo jums iššifruoti jų sprendimą.

Štai tas sušifruotas sprendimas:

1) Kiek iš viso surinkta žolių?

```
 +*
  *
 --
 **
```

2) Kiek rublių kainuoja vienas kilogramas žolių?

```
-***|*7
 ** |**
 **
 **
 **
```

3) Kokia pinigų suma priklauso pirmajai grandžiai?

```
  **
x  *
----
  **
```

4) Kokia pinigų suma priklauso antrajai grandžiai?

```
  **
x  *
----
  **
```

266. Paslėpta dalyba

Klubo stalo žaidimų kambaryje prie vieno staliuko vyksta dviejų jaunųjų šachmatininkų tyli «kova».

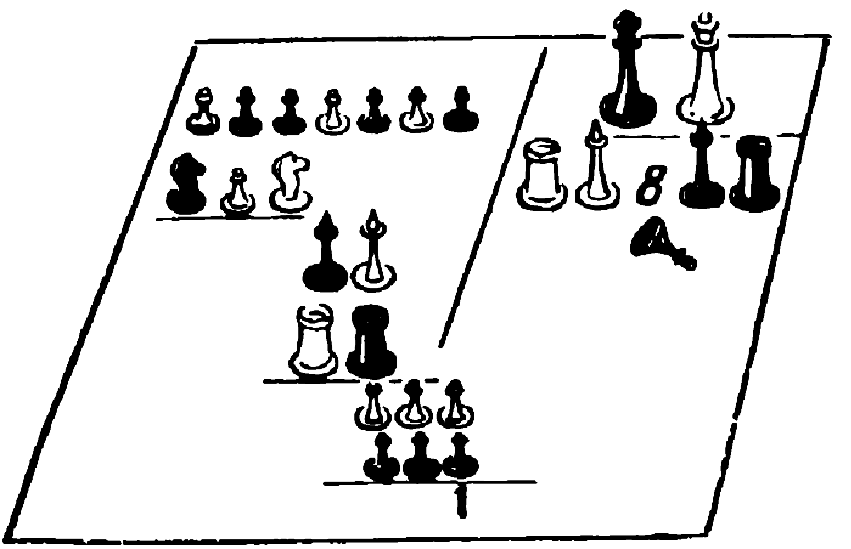
Greta įsitaisė Olia — matematinio sienlaikraščio «Galvok!» redaktorius. Šiuo metu ji sudaro eiliniam laikraščio numeriui uždavinį.

Pabaigusi septyniaženklio skaičiaus dalybą iš dviženklio, Olia padėjo lapą su skaičiavimais į šalį ir griebėsi brėžimo. Tada greta sėdintieji šachmatininkai, nenutraukdami lošimo, pradėjo tuo pačiu metu pramogauti: kiekvieną šachmatų figūrą, nuimtą nuo lentos, statė, nesilaikydami jokios sistemos, ant Olės lapo skaitmenų. Baigus partiją, visi dalijamojo, daliklio, dalmens ir visų tarpinių sandaugų bei liekanų skaitmenys, išskyrus patį paskutinį, lygų vienetui, buvo uždengti šachmatų figūromis.

— Olia, štai tau ir uždavinys laikraščiui,— tarė vienas šachmatininkas,— nupiešk arba nufotografuok šią «figūrinę dalybą» ir pasiūlyk skaitytojams surasti visus skaitmenis, paslėptus po figūromis.

— O juk iš tikrųjų tai įdomus uždavinys,— apsidžiaugė Olia,— tiktai palaukite; iš pradžių pagalvokime, ar jį galima išspręsti.

Neilgai galvoję, vaikai priėjo išvadą, kad tokiu pavidalu uždavinys nelabai patrauklus, nes gaunama daug skir-



165 pieš.

tingų sprendinių, tačiau, jei būtų nuimta figūra nuo dalmens vidurinio skaitmens (tas skaitmuo 8), tai uždavinys būtų visiškai apibrėžtas ir turėtų vienintelį sprendinį.

Raskite pagal 165 piešinį dalijamąjį, daliklį ir dalmenį.

267. Sušifruoti veiksmai (skaitmeniniai rebusai)

Daugybos ir dalybos veiksmai sušifruoti: skaitmenys pakeisti raidėmis ir žvaigždutėmis. Vienodomis raidėmis pakeisti vienodi skaitmenys, o skirtingomis raidėmis — nevienodi skaitmenys; žvaigždutės parašytos vietoje visokių skaitmenų: tiek vienodų, tiek ir nevienodų. Kiekvienas rebusas gali būti iššifruotas tikslių ir nuoseklių samprotavimų keliu. Atstatykite vietoje raidžių ir žvaigždučių skaitmenis.

Pirmas rebusas

```
  ABC
× BAC
 ****
 **A
***B
******
```

Antras rebusas

```
   ***
 × *2*
   ***
  ****
  *8*
**9*2*
```

Trečias rebusas

```
VĖJO | JO
JO   | ĖJO
AJ
OI
ĖJO
ĖJO
 =
```

Ketvirtas rebusas

```
**7******* | ****7*
******     | **7**
****7**
*******
 *7****
 *7****
*******
****7**
 ******
 ******
    =
```

Penktas rebusas

(turi keturis sprendinius)

```
******4 | ***
***     | *4**
**4*
****
 ****
  *4*
  ****
  ****
    =
```

Šeštas rebusas. Šis rebusas sunkesnis tuo, kad nežinomas yra net daliklio skaitmenų skaičius, ir vis dėlto rebusas turi vienintelį sprendinį.

Raskite jį.

```
*********** | ?
***         | *****8**
 ***
 ***
  ***
  ***
    **
    **
     ***
     ***
      =
```

268. Vienos kupės keleiviai

Traukinio Maskva—Odesa vieno vagono kupėje važiavo maskvietis, leningradietis, tulietis, kijevietis, charkovietis ir odesietis. Jų pavardės prasidėjo raidėmis A, B, C, D, E ir F.

Kelyje paaiškėjo, kad A ir maskvietis — gydytojai, E ir leningradietis — mokytojai, o tulietis ir C — inžinieriai. B ir F — Tėvynės karo dalyviai, o tulietis armijoje visai netarnavo. Charkovietis vyresnis už A, odesietis vyresnis už C. B ir maskvietis išlipo Kijeve, o C ir charkovietis Vinicoje. Nustatykite kiekvieno iš tų šešių keleivių profesiją ir kiekvieno iš jų gyvenamąją vietą.

269. Sekmadienio talka

Prieš mokslo metų pradžią komjaunuoliai suorganizavo sekmadienio talką paruošti mokyklai malkų. Šešetas iš jų ėmė piaustyti įvairių ilgių rąstus į pusmetrinius gabalus. Komjaunuoliai išsiskirstė į 3 poras. Vienas iš kiekvienos poros buvo laikomas brigadininku. Brigadininkų vardai buvo Volodia, Petia ir Vasia. Volodia su Miša piovė dvimetrinius vidutinio storumo rąstus. Petia su Kostia — pusantro metro ilgio rąstus, truputį storesnius, kaip dvimetriniai. Vasia su Fedia piovė metrinius, labai storus rąstus.

Po keleto valandų nuo darbo pradžios mokyklos sienlaikraščio redkolegija išleido «Kovos lapelį», kuriame, tarp kitko, buvo atžymėtas ir sėkmingas trijų piovėjų brigadų darbas: Lavrovo brigados, Galkino brigados ir Medvedevo brigados.

Buvo pranešta, kad Lavrovas ir Kotovas jau pripiovė 26 gabalus, Galkinas ir Pastuchovas — 27 gabalus, Medvedevas ir Jevdokimovas — 28 gabalus.

Koks Pastuchovo vardas?

270. Kokia mašinisto pavardė?

Traukiniu Maskva—Leningradas važiuoja keleiviai Ivanovas, Petrovas ir Sidorovas. Tokias pat pavardes turi traukinio brigados mašinistas, pečkurys ir palydovas.

1) Keleivis Ivanovas gyvena Maskvoje.
2) Palydovas gyvena pusiaukelyje tarp Maskvos ir Leningrado.
3) Keleivis, palydovo bendrapavardis, gyvena Leningrade.
4) Tas keleivis, kuris gyvena arčiau palydovo gyvenamosios vietos, negu kiti keleiviai, uždirba per mėnesį lygiai triskart daugiau už palydovą.
5) Keleivis Petrovas uždirba per mėnesį 2 000 rublių.
6) Sidorovas (iš brigados) neseniai laimėjo bilijardo partiją prieš pečkurį.

Kokia mašinisto pavardė?

271. Kriminalinė istorija

Vienos Niujorko valstijos pradžios mokyklos mokytojai dingo piniginė. Pavogti piniginę galėjo tiktai kuris nors iš 5 mokinių: Liliana, Džudi, Deividas, Teo ir Margarita (jie dažniau už kitus žiūri holivudinius kinofilmus).

Apklausinėjant šiuos vaikus, kiekvienas iš jų davė po 3 parodymus:

Liliana: 1) aš piniginės neėmiau; 2) aš niekuomet savo gyvenime nieko nevogiau; 3) tai padarė Teo.

Džudi: 4) aš piniginės neėmiau; 5) mano tėtis pakankamai turtingas, ir aš turiu savo nuosavą piniginę; 6) Margarita žino, kas tai padarė.

Deividas: 7) aš piniginės nepaėmiau; 8) Margaritos nepažinojau, kol įstojau į mokyklą; 9) tai padarė Teo.

Teo: 10) aš nekaltas; 11) tai padarė Margarita; 12) Liliana meluoja, tvirtindama, kad aš pavogiau piniginę.

Margarita: 13) aš neėmiau mokytojos piniginės; 14) kalta Džudi; 15) Deividas gali laiduoti už mane, nes mane žino nuo gimimo dienos.

Toliau apklausinėjant, kiekvienas mokinių prisipažino, kad iš jų padarytų trijų pareiškimų du yra teisingi, o vienas melagingas.

Nustatykite, kuris iš mokinių pavogė savo mokytojos piniginę.

272. Motociklininkas ir raitelis

Prieš atvykstant lėktuvui, iš pašto skyriaus į aerodromą buvo pasiųstas motociklininkas. Lėktuvas atvyko anksčiau nustatyto laiko, ir atvežtas paštas buvo pasiųstas su raiteliu į pašto skyrių. Pusvalandį pajojėjęs, raitelis sutiko motociklininką, kuris priėmė paštą ir negaišdamas pasuko atgal.

Į pašto skyrių motociklininkas atvyko 20 min. anksčiau, negu reikėjo.

Keliomis minutėmis anksčiau nustatyto laiko atvyko lėktuvas į aerodromą?

273. Pėsčiomis ir automobiliu

Tam, kas surado 272 uždavinio sprendimo kelią, bus nesunku savarankiškai rasti kito tokios pat rūšies uždavinio sprendimą.

Inžinierius, dirbąs už miesto, kasdien atvyksta į stotį 8 val. 30 min. Tiksliai tuo pačiu laiku prie stoties privažiuoja «Pobieda» ir negaišdama nuveža inžinierių į gamyklą.

Kartą inžinierius atvyko į stotį 8 val. ir, nelaukdamas automobilio, nuėjo į gamyklą pėsčias. Sutikęs kelyje «Pobiedą», jis įsėdo į ją ir atvyko į gamyklą 10 min. anksčiau, negu paprastai.

Sužinokite, kurią valandą rodė laikrodis inžinieriaus su «Pobieda» susitikimo metu ir kiek kartų lėčiau jis eina pėsčias, negu važiuoja automobiliu.

274. «Pagal priešingą prielaidą»

Įsivaizduokite, kad yra du teiginiai «A» ir «B», kurie tarpusavyje vienas kitą neigia. Iš jų teisingas, aišku, tiktai vienas kuris nors. Sakysime, reikia įrodyti, kad teiginys «A» yra teisingas.

Užuot betarpiškai, tiesiog įrodinėjus teiginio «A» teisingumą, retkarčiais griebiamasi netiesioginio įrodymo, t. y. įrodinėjama, kad prieštaraujantis teiginys «B» neteisingas, nes atveda prie prieštaravimo neginčijamiems faktams. Šis

samprotavimų metodas, vadinamas «įrodymu pagal priešingą prielaidą», plačiai pritaikomas geometrijoje, rečiau — algebros ir aritmetikos mokykliniame kurse. Tačiau jį sėkmingai galima pritaikyti ne tiktai teoremoms įrodinėti, bet net uždaviniams spręsti.

Išnagrinėkime samprotavimų «pagal priešingą prielaidą» metodo pritaikymą tokio uždavinio pavyzdžiu.

Dviejų skaičių suma 75. Pirmasis iš jų 15 vienetų didesnis už antrąjį. Įrodyti samprotavimų «pagal priešingą prielaidą» būdu, kad antrasis skaičius lygus 30.

Sprendimas. Sakykime, kad antrasis skaičius nelygus 30, tada jis arba didesnis už 30, arba mažesnis už 30. Tačiau, jei antrasis skaičius didesnis už 30, tai pirmasis didesnis už 45, ir suma jų didesnė už 75, o tai prieštarauja sąlygai. Jeigu antrasis skaičius mažesnis už 30, tai pirmasis mažesnis už 45, ir jų suma mažesnė už 75, o tai irgi prieštarauja sąlygai.

Vadinasi, antrasis skaičius lygus 30.

Išspręskite dar 2 uždavinius samprotavimais «pagal priešingą prielaidą»:

1) Yra žinoma, kad dviejų sveikų skaičių sandauga didesnė už 75. Įrodyti, kad bent vienas iš dauginamųjų didesnis už 8.

2) Yra žinoma, kad kažkurio dviženklio skaičiaus sandauga iš 5 — taip pat dviženklis skaičius. Įrodyti, kad pirmas to skaičiaus skaitmuo yra 1.

275. Surasti netikrą monetą

Vargu ar tikrovėje gali prireikti tarp vienodų monetų ieškoti netikros, svarstant ant lėkštelinių svarstyklių be svarsčių, tačiau savo mintijimo treniravimui šias sąlygas priimkime kaip išeities sąlygas tolesniems trims uždaviniams spręsti samprotavimų keliu.

Pirmas uždavinys (lengvas). Turime 9 vienodos vertės monetas. Yra žinoma, kad 8 iš jų yra vienodo svorio, o viena yra netikra — truputį lengvesnė už kitas. Reikia, du kartus pasveriant lėkštelinėmis svarstyklėmis be svarsčių, išskirti netikrą monetą.

Antras uždavinys (sunkesnis). Esant toms pačioms sąlygoms, išskirti netikrą (lengvesniąją) monetą, taip pat tiktai d v i e m pasvėrimais, iš 8 vienodų monetų.

Trečias uždavinys (sunkus). Tarp 12 monetų yra viena netikra. Yra žinoma, kad netikroji moneta skiriasi nuo tikrųjų savo svoriu, tačiau nežinoma, ar ji lengvesnė už tikrąsias, ar sunkesnė. Tikrosios monetos — visos vienodo svorio. Ne daugiau kaip t r i s kartus pasveriant lėkštelinėmis svarstyklėmis be svarsčių, išskirti netikrą monetą ir tuo pačiu metu nustatyti, ar lengvesnė ji, ar sunkesnė už kitas.

276. Tarybinės Armijos šachmatininkų turnyro finalas

Tarybinės Armijos šachmatininkų turnyro finale susitiko aštuonių karinių laipsnių atstovai: pulkininkas, majoras, kapitonas, leitenantas, viršila, seržantas, jefreitorius ir kareivis. Visi — iš skirtingų kariuomenės rūšių: vienas pėstininkas, kitas lakūnas, toliau tankistas, artileristas, kavaleristas, minosvaidininkas, pionierius ir ryšininkas.

Teisingai samprotaudami, jūs galite nustatyti kiekvieno iš 8 šachmatininkų karinę specialybę pagal šiuos duomenis:

P i r m a m e rate pulkininkas lošė su kavaleristu. Lakūnas atvyko tik į antrą ratą.

A n t r a m e rate pėstininkas lošė su jefreitoriumi ir majoras su viršila.

Po a n t r o rato kapitonas dėl ligos pasitraukė iš turnyro. Dėl to trečiame rate nereikėjo lošti seržantui, 4-me rate — tankistui, 5-me rate — majorui.

T r e č i a m e rate leitenantas laimėjo prieš pėstininką, o pulkininko ir artileristo partijos baigėsi lygiomis.

K e t v i r t a m e rate pionierius laimėjo prieš leitenantą, o viršila — prieš pulkininką.

Prieš p a s k u t i n į ratą buvo baigiama iš 6-to rato likusi nebaigta kavaleristo ir minosvaidininko partija.

P a s t a b a. Šiam uždaviniui išspręsti nebūtina mokėti lošti šachmatais. Reikia tik žinoti, kad turnyre tas pats šachmatininkas du kartus laisvas nebūna ir su kiekvienu partneriu lošia po vieną partiją.

277. Logikos lygiosios

Uždavinių ir galvosūkių mėgėjų konkurse itin išsiskyrė 3 žmonės. Siekiant išaiškinti iš jų patį išmaningiausiąjį, buvo nuspręsta padaryti dar vieną bandymą. Buvo parodyti jiems 5 popierėliai: 3 balti ir 2 juodi. Po to visiems trims buvo užrištos akys ir kiekvienam užklijuota ant kaktos po baltą popierėlį, o juodi popierėliai buvo sunaikinti. Po to raiščiai buvo nuimti, ir paskelbta, kad laimėtojas bus tas, kuris pirmasis nustatys savo popierėlio spalvą. Suprantama, niekas iš besivaržančių negalėjo matyti savo popierėlio spalvos, tačiau matė savo draugų baltus popierėlius. Po kai kurio galvojimo visi trys vienu metu padarė išvadą, kad kiekvieno iš jų popierėlis b a l t a s. Kaip jie samprotavo?

278. Trys išminčiai

Nuvargę nuo ginčų ir vasaros kaitros, trys senovės graikų filosofai prigulė po Akademijos sodo medžiu truputį pailsėti ir užsnūdo. Kol jie snaudė, juokdariai anglimi ištepė jų kaktas. Prabudę ir pažvelgę vienas į kitą, visi linksmai nusiteikė ir pradėjo juoktis, tačiau tai nė vieno nejaudino, nes kiekvienam atrodė natūralu, kad du kiti juokiasi vienas iš kito.

Staiga vienas išminčius nustojo juoktis, nes jis suvokė, jog jo kakta taip pat ištepta.

Kaip jis samprotavo?

279. Penki klausimai mokiniams

Grynai matematinis formulavimas turi būti pakankamai pilnas, bet ir be nereikalingų žodžių. Matematinės kalbos trumpumas ir tikslumas yra jai būdingas ir tuo pačiu metu puikus bruožas.

1) Raskite nereikalingus žodžius tokiuose jums pažįstamuose matematiniuose sakiniuose:

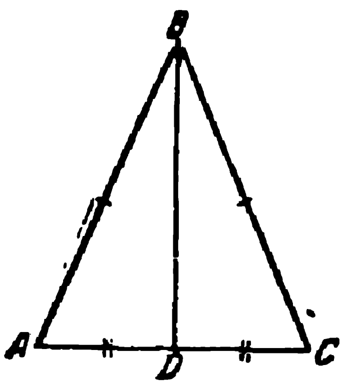
a) Stačiojo trikampio dviejų smailiųjų kampų suma lygi 90°.

b) Jei stačiojo trikampio statinis lygus pusei įžambinės, tai priešais jį esąs smailusis kampas yra 30°.

2) Naudojantis atitinkamais matematiniais terminais, suprastinti šiuos išsireiškimus:

a) Kertamosios dalis, esanti apskritimo viduje.

b) Daugiakampis su mažiausiu kraštinių skaičiumi.



166 pieš.

c) Styga, einanti per apskritimo centrą.

d) Lygiašonis trikampis, kurio pagrindas lygus šoninei kraštinei.

e) Du nelygių spindulių apskritimai, turintieji bendrą centrą.

3) Trikampyje *ABC* (166 pieš.) $AB = BC$, $AD = DC$. Raskite ne mažiau kaip 5 terminus, apibūdinančius atkarpą *BD*.

4) Štai 7 giminingi terminai: lygiagretainis, geometrinė figūra, kvadratas, daugiakampis, plokščioji figūra, rombas, iškilasis daugiakampis.

Surašykite tuos žodžius paeiliui taip, kad sąvoka, kurią reiškia pirmesnis žodis, apimtų sąvoką, kurią reiškia paskesnis žodis.

5) Žinodami, kad bet kurio iškilojo daugiakampio priekampių suma lygi 4 statiesiems kampams, suvokite, koks didžiausias s m a i l i ų j ų vidaus kampų skaičius gali būti iškilajame daugiakampyje.

280. Vietoje lygčių samprotavimai

Kiekvienam žmogui, kuris nors kiek mokėsi matematikos, yra pažįstami vieni ar kiti aritmetikos ar, gal būt, algebros bei kitų matematikos šakų metodai, kurių pagalba jis ir sprendžia matematinius uždavinius.

Yra, žinoma, uždavinių visiškai ne pagal jėgas žmogui, nemokančiam nors ir algebros, bet yra, suprantama, ir tokių uždavinių, kuriems neturi nusileisti net tas, kuris nemoka sudaryti ir spręsti lygčių. Juk čia dar gali padėti pats paprasčiausias sveikas protas, pastabumas, galvotumas. Tai — taip pat teisėti uždavinių sprendimo būdai. Štai ir išspręskite samprotavimais šiuos 2 uždavinius:

1 uždavinys. Jei tam tikrą dviženklį skaičių perskaitytume iš dešinės į kairę, tai gautasis «apsuktas» skaičius bus $4\frac{1}{2}$ karto didesnis už duotąjį. Koks tai skaičius?

Uždavinio sąlygoje nedaug duomenų, tačiau, sumaniai juos panaudojant, galima išspręsti šį uždavinį vien samprotavimais, pavyzdžiui, taip:

a) Ieškomas skaičius didesnis už 10, nes jis dviženklis.

b) Tačiau jis mažesnis už 25, nes $25 \times 4\frac{1}{2}$ — triženklis skaičius.

c) Ieškomas skaičius lyginis, nes, padauginus jį iš $4\frac{1}{2}$, gaunamas sveikas skaičius.

d) Apsuktas skaičius pagal sąlygą 9 kartus didesnis už pusę duotojo skaičiaus, vadinasi, apsuktas skaičius dalus 9.

e) Kadangi apsuktas skaičius dalus 9, tai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9, o duotasis skaičius susideda iš tų pačių skaitmenų, kaip ir apsuktasis, vadinasi, ir jis dalus 9.

Raskite šių samprotavimų tęsinį ir užbaikite uždavinio sprendimą.

2 uždavinys. Keturių iš eilės einančių sveikų skaičių sandauga lygi 3 024. Raskite tuos skaičius.

«Logiškam» šio uždavinio sprendimui galima pasiūlyti šią samprotavimų schemą:

a) Įrodyti, kad ieškomų skaičių tarpe nėra skaičiaus 10.

b) Ieškomų skaičių tarpe turi būti skaičiai, mažesni už 10.

c) Iš punktų a) ir b) ir iš uždavinio sąlygos išvesti, kad visi ieškomi skaičiai mažesni už 10, tai yra vienaženkliai.

d) Įrodyti, kad ieškomų skaičių tarpe nėra skaičiaus 5.

e) Suskirstyti visus likusius vienaženklius skaičius, sutinkamai su uždavinio sąlyga, į 2 grupes ir išaiškinti, kuri grupė patenkina uždavinio sąlygą.

281. Sveiku protu

Galia Karpova, pedagoginio instituto studentė, ruošėsi savo «bandomajai» matematikos pamokai vidurinės mokyklos 8-je klasėje.

— Parodyk man, Galia, kokius uždavinius tu sumanei pasiūlyti savo mokiniams,— pasidomėjo Galios tėvas, žinomas mašinistas.

«Vaiko amžius, padidintas 3 metais, yra skaičius, iš kurio tiksliai galima ištraukti kvadratinę šaknį. Jei iš to skaičiaus ištrauksime kvadratinę šaknį, gausime vaiko amžių, sumažintą trimis metais.

Kiek vaikui metų?»

— Na, ką gi, neblogas uždavinys žodinėms pratyboms. Nuovokūs berniukai išspręs jį per vieną minutę.

— Kaip tai žodinėms pratyboms? Kaip tai per vieną minutę? Šiuo uždaviniu aš ketinau dar kartą parodyti mokiniams, kad uždavinio sprendimas algebrinių lygčių sudarymo būdu yra pranašesnis už aritmetinį.

— Tokiu atveju šis uždavinys ne visai tinkamas. Kiekvienas, kuris įsigilins į tavo uždavinio prasmę, išspręs jį «mintinai», beveik be jokių skaičiavimų.

Kaip senas mašinistas — Galios tėvas išsprendė šį uždavinį?

Papildomas klausimas tiems, kurie moka sudaryti ir spręsti kvadratines lygtis:

Kaip Galia ketino aritmetiškai ir algebriškai išspręsti šį uždavinį?

282. Taip arba ne?

Įsivaizduokite, kad jūsų draugas pasirinko kokį nors sveiką skaičių tarp 1 ir 1 000. Kad atspėtumėte pasirinktąjį skaičių, jūs duokite klausimus. Susitarkime, kad į visus klausimus jūsų draugas atsakinės tiktai «taip» arba «ne».

Gali pasirodyti neįtikėtina, jog pakanka tik dešimties klausimų, norint neklystamai atspėti bet kurį pasirinktą sveiką skaičių tarp 1 ir 1 000. Vis dėlto taip yra.

Suvokite, kokius klausimus reikia pateikti.

DEŠIMTASIS SKYRIUS

MATEMATINIAI ŽAIDIMAI IR POKŠTAI

A. ŽAIDIMAI

Yra žaidimų, kurių sėkminga baigmė priklauso ne nuo atsitiktinio palankių aplinkybių susidėstymo, o nuo žaidėjo nuovokos ir parengtinio skaičiavimo. Tas, kas moka atlikti skaičiavimus, kuriais pagrįstas žaidimas, tampa savininku žaidimo «paslapties», laiduojančios jam pergalę prieš partnerius, dar neįsisavinusius jos matematinio pagrindo. Tokie žaidimai įgyja uždavinių savybes. Antra vertus, žaidimo elementai būdingi beveik kiekvienam «matematinių pramogų» tipo uždaviniui.

283. Vienuolika daiktų

Ant stalo — vienuolika vienodų daiktų, pavyzdžiui, degtukų. Pirmasis žaidėjas pasiima pagal savo nuožiūrą iš to skaičiaus 1, 2 ar 3 daiktus, paskui antrasis žaidėjas pasiima iš likusių daiktų tarpo taip pat pagal savo nuožiūrą 1, 2 ar 3. Po to vėl ima pirmasis ir t. t. Taip paeiliui abu žaidėjai pasiima kiekvieną kartą ne daugiau kaip po tris daiktus. P r a l a i m i tas, kuriam tenka paimti paskutinį daiktą. Ar gali pradedantysis žaidimą pastatyti savo partnerį į tokią padėtį, kad pastarasis būtų priverstas paimti paskutinį daiktą?

Kaip reikia žaisti, kad būtų laimėta tais atvejais, kai pradinis daiktų skaičius — 30?

Ž a i d i m o a p i b e n d r i n i m a s. Dviese paeiliui ima nuo stalo degtukus.

Kaip reikia žaisti, kad partneris būtų priverstas paimti paskutinį degtuką, jei iš pradžių ant stalo guli *n* degtukų, o vienu kartu leidžiama paimti nuo 1 iki *p* degtukų (*p* žymiai mažesnis už *n*)?

284. Paimk degtukų paskutinis

Pakeisime pirmesnio uždavinio pagrindinę sąlygą. Tegul dabar žaidėjas, paėmęs degtukų paskutinis, ne pralaimi, o laimi žaidimą.

Žaidžiama dviese; paeiliui ima kiekvienas pagal savo nuožiūrą bet kurį degtukų skaičių ribose nuo vieno iki šešių.

Kaip reikia žaisti, norint degtukų paimti paskutiniam, jei iš pradžių ant stalo yra 30 degtukų?

285. Czianšiczi

«Czianšiczi» — kinų nacionalinis žaidimas. Žodžio «Czianšiczi» pažodinis vertimas — «akmenėlių išrinkimas».

Žaidžiama dviese. Pabėrę ant žemės d v i k r ū v e l e s akmenėlių, žaidžiantieji ima paeiliui iš tų krūvelių akmenėlius, prisilaikydami tokių taisyklių:

a) iš vienos krūvelės galima imti bet kurį skaičių akmenėlių (net visą krūvelę iš karto),

b) galima imti akmenėlius vienu metu iš abiejų krūvelių, tačiau būtinai p o v i e n o d ą skaičių iš kiekvienos krūvelės.

Laimi tas, kuris, laikydamasis tų taisyklių, sugebės paimti v i s u s gulinčius ant žemės akmenėlius.

Akmenėlius, suprantama, galima pakeisti bet kuriais kitais daiktais.

Žaidimas «Czianšiczi» yra tolesnis vystymas ką tik aprašyto žaidimo su degtukais. Žaidime «Czianšiczi» neapribojamas pradinis daiktų skaičius; jie sudėstomi į dvi krūveles, ir žaidėjui leidžiama imti iš anksto nenustatytą skaičių daiktų.

Matematiškai žaidimas įdomus tuo, kad reikia sudaryti jo teoriją, t. y. rasti ir pagrįsti tokį žaidimo būdą, kuris tam tikram žaidėjui užtikrintų partijos laimėjimą.

Aišku, pavyzdžiui, kad padėtyje (1, 0), o tai reiškia: vienoje krūvelėje 1 akmenėlis, antroje — 0 akmenėlių, ir pa-

dėtyje (n, n), o tai reiškia: abiejose krūvelėse yra po vienodą skaičių akmenėlių,— laimi žaidimą tas, kuris daro eilinį «ėjimą». Jis iš karto paima visus akmenėlius [pirmu atveju remdamasis taisyklių a) punktu, antru — remdamasis b) punktu].

Padėtyje (1, 2) žaidėjas, darantis eilinį ėjimą, pralaimi. Tuo lengva įsitikinti, surašius visų žaidimo tęsimo iš padėties (1, 2) atvejų lentelę:

Akmenėlių skaičius	Žaidžia *A*	*B*	Akmenėlių skaičius	Žaidžia *A*	*B*	Akmenėlių skaičius	Žaidžia *A*	*B*	Akmenėlių skaičius	Žaidžia *A*	*B*
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
2	2	0	2	0	0	2	1	0	2	1	0

Pirmame lentelės stulpelyje nurodytas akmenėlių skaičius kiekvienoje krūvelėje. Skaitmenys po *A* ir *B* nurodo, kiek akmenėlių l i k o krūvelėse po eilinio ėjimo (žaidėjas *A* «ėjimą» daro pirmas).

Tokiu būdu, akmenėlių derinys (1, 2) atneša pralaimėjimą žaidėjui, darančiam eilinį «ėjimą». Pažymėkime šį derinį «PP» («pradedantysis pralaimi»).

Tęsiame nagrinėjimą toliau. Jeigu pirmoje krūvelėje 1 akmenėlis, o antroje — 3 akmenėliai (ir daugiau), tai žaidėjas *A*, pradedantis žaidimą, būtinai laimi: iš antros krūvelės jis paima visus, išskyrus du akmenėlius; tada susidarys padėtis (1, 2), tai toks akmenėlių santykis, kuriam esant žaidėjas *B*, darantis eilinį «ėjimą», pralaimi.

Iš čia seka, kad padėtis $(1, n)$ yra derinys «PP» tiktai kai $n = 2$; visais atvejais ji yra derinys «PL» — «pradedantysis laimi».

Žaidėjas, norįs laimėti žaidimą, turi vadovautis tokiu principu: savo «ėjimu» akmenėlių santykį krūvelėse privesti prie derinio «PP».

Kokie gi dar akmenėlių santykiai, išskyrus (1, 2), bus deriniai «PP»?

Detaliai išnagrinėkite visus žaidimo tęsimo atvejus padėtyje $(2, n)$, kai $n > 1$, paskui padėtyje $(3, n)$ ir t. t., ir jūs, be abejonės, rasite dar visą eilę derinių «PP»,

kuriuos reikia žinoti, norint pasiekti pergalę žaidime «Cziansiczi».

Toliau galite pamėginti nustatyti derinių «PP» sekoje dėsningumą ir savo jėgomis užbaigti žaidimo «Czianšiczi» matematinę teoriją. Tačiau tai, suprantama, nelengvas ir rimtas uždavinys, kurio detalus sprendimas buvo neseniai paskelbtas kinų matematiniame žurnale «Čžungo šusjuė czačži»*.

286. Kas pirmas pasakys «šimtas»?

Žaidžiama dviese. Pirmasis pasako bet kurį sveiką skaičių, neviršijantį d e š i m t i e s, t. y. jis gali pasakyti 10 arba bet kurį mažesnį skaičių. Antrasis prideda prie pasakyto skaičiaus savo pasirinktą sveiką skaičių, taip pat neviršijantį dešimties, ir paskelbia sumą. Prie tos sumos pirmasis prideda kurį nors sveiką skaičių, bet ir vėl neviršijantį dešimties, ir paskelbia naują sumą. Prie naujosios sumos antrasis prideda skaičių, ne didesnį kaip dešimt, ir t. t., kol galutinė suma bus 100.

Pirmasis gali pasakyti, pavyzdžiui, 7, antrasis 12, pirmasis 22 ir t. t.

Laimi tas, kuris pirmas pasiekia šimtą.

Kaip pasiekti pergalę?

Po to, kai rasite raktą į pergalę, apgalvokite žaidimo vedimo planą kitomis sąlygomis, pavyzdžiui, su ribiniais dėmenimis, lygiais ne dešimčiai, o kuriam nors kitam skaičiui, ir su ribine suma, lygia ne 100, o kitam iš anksto nurodytam skaičiui.

287. Nugali lyginis

Iš 27 ant stalo gulinčių degtukų, du žaidėjai paeiliui nurenka ne mažiau kaip vieną ir ne daugiau kaip keturis degtukus. Laimėtoju laikomas tas, kuris, pasibaigus žaidimui, turi l y g i n į degtukų skaičių.

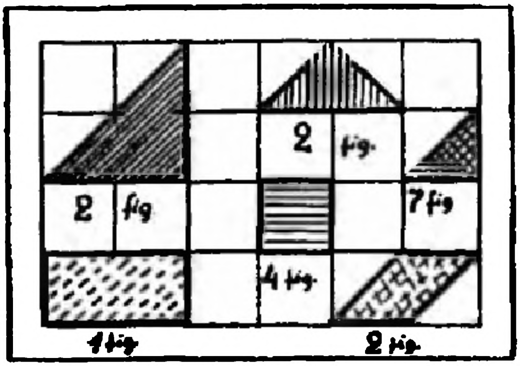
Kaip laimėti žaidimą?

---

* M i n S y - c h a o. Teoremos, išplaukiančios iš kinų nacionalinio žaidimo «Czianšiczi». Čžungo šusjuė czačži, Nr. 2, 1952.

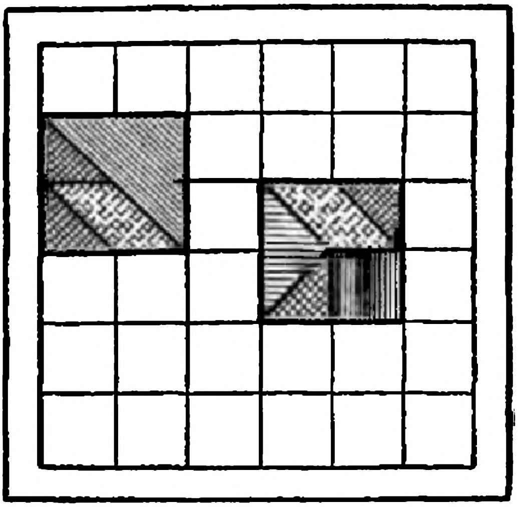
288. Sudėti kvadratą

Šis žaidimas — mažasis konstruktorius. Dviem žaidėjams reikia turėti po 18 plokščių kartoninių figūrų (167 pieš.). Vieno komplekto figūrų spalva turi skirtis nuo kito komplekto figūrų spalvos. Žaidimo tikslas: uždedant paeiliui ant bendro lauko, susidedančio iš 36 langelių, figūras, sudėti iš savo figūrų kvadratinę figūrą, susidedančią iš keturių langelių. Trukdyti partneriui savomis figūromis nedera. Žaidimo prasmė — apgalvotai panaudoti savo figūras, kad būtų sudėtas didžiausias skaičius kvadratų. Laimi tas, kuris daugiau už kitą sudės tokių kvadratų.



167 pieš

Vienas iš galimų figūrų sudėstymų parodytas, kaip pavyzdys, 168 piešinyje. Žaidimo lauką pageidautina taip pat paruošti iš kartono. Figūrų matmenys, suprantama, turi atitikti lauko langelių matmenis.



168 pieš.

289. Žaidimas kvadratais

Žaidimo laukas yra iš anksto ant languoto popieriaus nubrėžta stačiakampė figūra, susidedanti iš tam tikro kvadratinių langelių skaičiaus (geriau nelyginio). Figūros matmenys ir kontūrai gali būti bet kokie. Du žaidėjai pieštuku ar plunksna paeiliui brėžia vidaus langelių kraštines

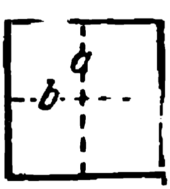
(kiekvienu ėjimu po vieną kraštinę). Tų vidaus langelių kraštinių, kurios yra ant žaidimo lauko ribos, nereikia nubrėžti — jos laikomos jau nubrėžtomis. Tas, kuris nubrėš langelio paskutinę kraštinę, laiko jį savu, pažymi langelį kokiu nors ženklu ir būtinai daro dar vieną ėjimą be eilės, tai yra nubrėžia naują brūkšnį. Dėl to galima iš eilės «paimti» keletą langelių.

Žaidimą laimi tas, kuris didžiausią skaičių kartų pabaigė kvadratinių langelių brėžimą, tai yra «paėmė» daugiau langelių, negu partneris. Laimėjimo «kokybė» nustatoma skirtumu tarp paimtų langelių ir atiduotų langelių skaičiaus.

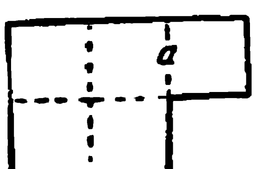
Šio žaidimo teorija žymiai sudėtingesnė, negu gali atrodyti iš pirmo žvilgsnio. Jei žaidimo laukas susideda iš daug langelių, tai galimų kombinacijų gaunama tiek daug, kad iš anksto jas išmokti, o juo labiau įsiminti beveik neįmanoma.

Apsiribokime išnagrinėdami vos keletą paprasčiausių atvejų, kuriems žaidimo baigmė gali būti iš anksto apskaičiuota. Šių teorijos elementų žinojimas suteiks jums pranašumą prieš «priešininką».

1) Kiekvieną keturių langelių kvadratą (169 pieš.) pilnutinai pralošia tas, kas jį pradeda. Ir tikrai, jei žaidėjas, darantis ėjimą, nubrėš bet kurią kurio nors vidaus kvadrato kraštinę, pavyzdžiui, kraštinę *a*, tai jo «priešininkas», nubrėžęs kraštinę *b*, paims vieną langelį, o paskui, turėdamas ėjimo teisę, pasiims ir likusius tris langelius.



169 pieš.



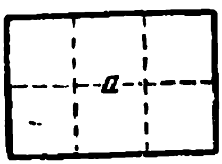
170 pieš.

2) Jei figūros-lauko ribose yra 5 langeliai (170 pieš.), tai, esant teisingam pradiniam ėjimui, galima pralošti tiktai 3 langelius (vieną paimti, keturis atiduoti); po klaidingo ėjimo pralošiami visi 5 langeliai. Norint paimti vieną langelį ir atiduoti «priešininkui» likusius keturis langelius, reikia pradiniu ėjimu nubrėžti kraštinę *a*.

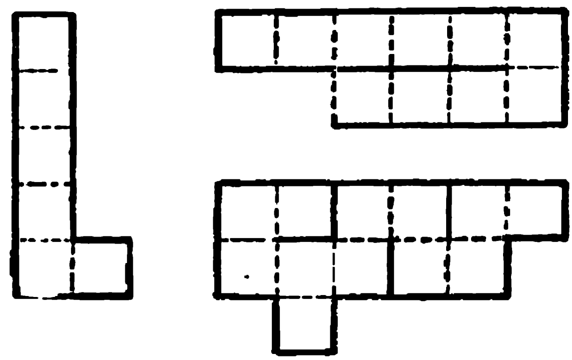
Po bet kurio kito pradinio ėjimo «priešininkas» iš eilės paims visus 5 langelius.

3) Šešių langelių stačiakampį pilnutinai išlošia tas, kuris pirmu ėjimu nubrėš kraštinę *a* (171 pieš.).

4) Vieno langelio pločio «kanalą» — tiesų, laužytą, su vienu arba dviem uždarais galais (172 pieš.) pilnutinai išlošia tas, kuris pirmas «įeina» į tą figūrą. Jeigu kanalas yra



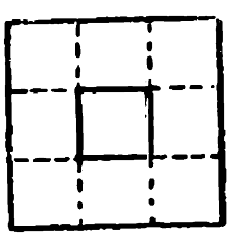
171 pieš.



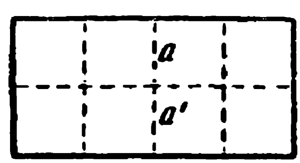
172 pieš.

žiedinio pavidalo (be galų) arba su abiem atvirais galais, tai «įeiti» pirmam į jį nenaudinga — bet kuris ėjimas veda prie visų langelių pralaimėjimo (173 pieš.).

5) Įeinant į 8 langelių stačiakampį (174 pieš.), gali būti pasiektos lygiosios, jei pirmu ėjimu bus nubrėžta



173 pieš.



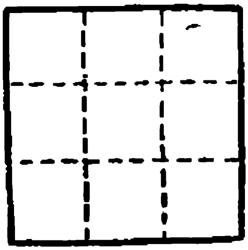
174 pieš.

kraštinė *a* arba *a'*. Bet kuri kita pradžia veda prie pralaimėjimo.

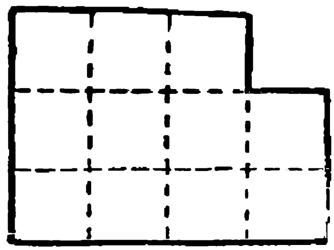
6) Įeinant į 9 langelių kvadratą (175 pieš.), galima laimėti ne mažiau kaip septynis langelius (8 langelius paimti ir 1 atiduoti). Suraskite, kurią kraštinę apvedant pastaruoju atveju (žr. 175 pieš.) reikia pradėti žaidimą, ir

išnagrinėkite galimus tolesnio žaidimo variantus. Kontrolei pažvelkite į atsakymus.

Iš pateiktų pavyzdžių matyti, kad žaidimo menas yra apgalvotais ėjimais, sumaniai paskirsčius iš pradžių duotą



175 pieš.



176 pieš.

figūrą į paprastas išnagrinėto tipo figūras, priversti «priešininką» pradėti brėžti kaip tiktai tas iš jų, kurios veda į pralaimėjimą, o pačiam tuo metu pradėti tas, kurios duoda neabejotiną laimėjimą. Kartu, žinoma, be paliovos reikia sekti paimtų langelių skaičių.

Sudarykite savarankiškai ant daugiakampės formos lauko, susidedančio iš 11 langelių, atvaizduoto 176 piešinyje, žaidimo planą. Ar turi pradedantis būtinai laimėti, ar pralošti ir keliais, visų mažiausiai, langeliais?

290. «Matematiko» (italų žaidimas)

Žaidimui išpiaukite iš kartono ar storo popieriaus 52 nedideles korteles ir ant kiekvienos iš jų užrašykite po vieną skaičių: ant keturių kortelių po 1, ant kitų keturių po 2, paskui ant keturių po 3 ir t. t. Paskutinis užrašytas skaičius, aišku, bus 13.

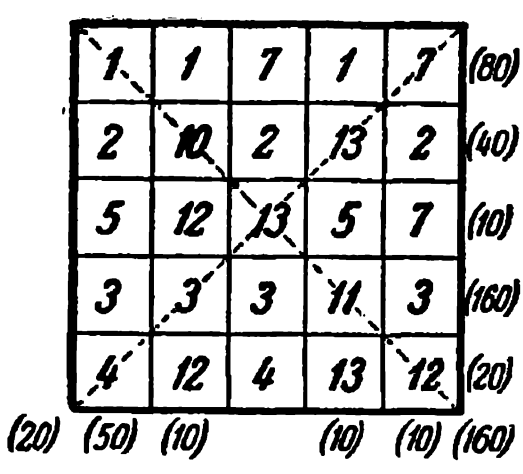
Žaidėjų skaičius neribojamas.

Kiekvienas žaidėjas pasiima kvadrato formos popieriaus lapelį su 25 langeliais (5×5) ir pieštuką. Vienas iš žaidėjų (vadovaująs) ima paruoštas korteles su skaičiais, sumaišo jas, po to atidengia pirmąją kortelę ir paskelbia ant jos užrašytą skaičių. Kiekvienas žaidėjas parašo tą skaičių į vieną iš savo lapelio langelių. (Įrašytą skaičių perkelti į kitą langelį draudžiama.) Paskui vadovaująs žaidimui paskelbia skaičių, užrašytą ant kitos kortelės, žaidžiantieji vėl įrašo jį į bet kurį laisvą savo lapelio langelį ir t. t.

Žaidimas nutraukiamas, kai yra užpildyti visi 25 langeliai. Žaidimo pabaigoje kiekvieno dalyvio «produkcija» įvertinama tam tikru skaičiumi taškų, priklausančiu nuo skaičių kvadrato langeliuose išdėstymo būdo.

Žaidimo tikslas — išdėstyti skaičius langeliuose tokia tvarka, kad prisirinktų didžiausias taškų kiekis sutinkamai su žemiau nurodyta lentele:

Skaičių kombinacijos	Eilutėje arba stulpelyje	Įstrižainėje
Už 2 vienodus skaičius . . .	10 taškų	20 taškų
Už 2 poras vienodų skaičių .	20 taškų	30 taškų
Už 3 vienodus skaičius	40 taškų	50 taškų
Už 3 vienodus skaičius ir 2 kitokius vienodus skaičius	80 taškų	90 taškų
Už 4 vienodus skaičius	160 taškų	170 taškų
Už 5 iš eilės einančius skaičius, tačiau nebūtinai išdėstytus paeiliui	50 taškų	60 taškų
Už tris kartus po 1 ir du kartus po 13	100 taškų	110 taškų
Už skaičius 1, 13, 12, 11 ir 10, tačiau nebūtinai išdėstytus paeiliui . . .	150 taškų	160 taškų
Už 4 vienetus	200 taškų	210 taškų



177 pieš.

177 piešinyje parodytas pavyzdinis langelių užpildymas ir atliktas taškų skaičiaus apskaičiavimas.

291. Žaidimas magiškais kvadratais

Šis žaidimas gali būti pramoga vienam žmogui, tačiau jame gali dalyvauti ir tarp savęs varžytis bet kuris norinčiųjų skaičius.

Kiekvienas žaidėjas pasiima popieriaus lapelį ir nubrėžia ant jo 16 arba 25, arba 36 ir t. t. lygių langelių kvadratą (dėl langelių skaičiaus žaidžiantieji iš anksto susitaria).

Kiekvienam žaidimo ratui iš anksto numatomas sveikų skaičių rinkinys; kiekvieną iš tų skaičių reikia pavartoti bent vieną kartą; reikia surašyti juos į paruošto kvadrato langelius taip, kad kiekvienoje kvadrato eilutėje bei kiekviename stulpelyje skaičių sumos būtų vienodos; kitais žodžiais: sudaryti vadinamąjį magišką kvadratą. Griežtai tariant, tokiu būdu sudarytas kvadratas bus tik beveik magiškas, nes tikrame magiškame kvadrate turi būti vienodos skaičių sumos ne tiktai kiekvienoje eilutėje ir stulpelyje, bet ir kiekvienoje įstrižainėje (žr. XII skyrių). Žaidimo sąlygos, kaip matote, truputį palengvinamos, ir tokiu pavidalu žaidimas yra visiškai prieinamas kiekvienam, mokančiam sudėti ir atimti.

Sprendimo procese leidžiama perkelti skaičius iš langelio į langelį ir vieną skaičių pakeisti kitu to paties rinkinio skaičiumi.

Skaičius reikia arba įrašinėti į kvadrato langelius pieštuku, arba iš anksto paruošti daug kvadratukų ir ant jų užrašyti skaičius, o po to tuos kvadratukus išdėlioti į langelius.

Skirtingų skaičių kiekis rinkinyje neturi būti labai didelis. Visi tie skaičiai ar dalis jų gali būti, pavyzdžiui, vienaženkliai skaičiai.

Keliese žaidžiant, galimi du laimėtojai: vienas, kuris uždavinį pirmas išsprendė, kitas — tas, kuris sugebėjo iš duotų skaičių sudaryti kvadratą su didesne kiekvienoje eilutėje skaičių suma, negu partneriai.

1 pavyzdys. Kvadrate 25 langeliai. Duoti skaičiai: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9. Panaudojant tuos skaičius, kiekvieną ne mažiau kaip vieną kartą, užpildyti jais, sutinkamai su žaidimo reikalavimais, visus kvadrato langelius. Vienas

iš galimų sprendinių pateiktas 178 piešinyje. Kiekvienoje eilutėje ir stulpelyje skaičių suma vienoda, kiekviena iš jų lygi 30.

6	8	7	0	9
6	5	8	9	2
9	2	7	9	3
5	7	7	4	7
4	8	1	8	9

178 pieš.

7	3	4	2
3	4	4	5
5	4	4	3
1	5	4	6

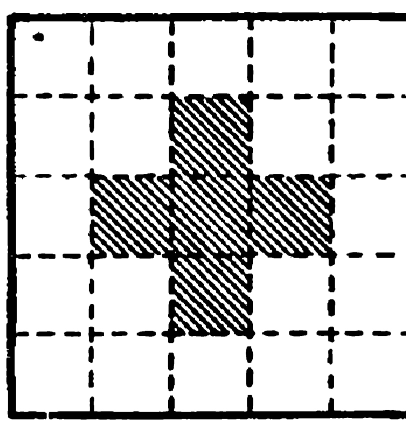
179 pieš.

2 pavyzdys. Kvadrate 16 langelių. Sugalvoti skaičiai: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7. Sutinkamai su žaidimo sąlyga reikia užpildyti kvadrato langelius duotais skaičiais. Papildomas reikalavimas: keturiuose centriniuose duoto kvadrato langeliuose skaičių suma turi būti tokia pat, kaip ir kiekvienoje eilutėje bei stulpelyje.

Vienas iš galimų sprendinių pateiktas 179 piešinyje.

Tema žaidimui. Kvadrate 25 langeliai (180 pieš.). Duoti skaičiai:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8.



180 pieš.

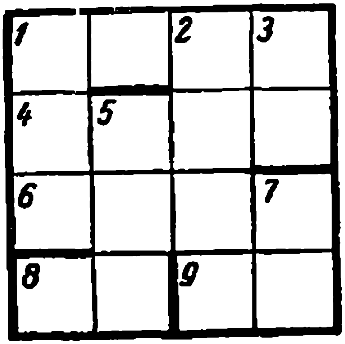
Sutinkamai su žaidimo sąlyga reikia užpildyti kvadrato langelius duotais skaičiais. Papildomi reikalavimai:

a) penkiuose užbrūkšniuotuose langeliuose skaičių suma turi būti tokia pat, kaip ir kiekvienoje eilutėje bei stulpelyje;

b) skaičius 0 ir 6 pavartoti tik po vieną kartą.

292. Skaičių susikirtimas

Kurios nors figūros užpildymą žodžiais, kaip reikalaujama kryžiažodžiuose, galima pakeisti laisvų šios figūros kvadratų užpildymu skaičiais, parenkant juos sutinkamai su nurodytais reikalavimais.



181 pieš.

Pirmasis ieškomojo skaičiaus skaitmuo turi būti patalpintas į numeruotą langelį, o paskutinis jo skaitmuo — į paskutinį eilutės ar stulpelio langelį arba prie kliūčių, piešiniuose atvaizduotų storu brūkšniu arba subrūkšniuotu langeliu. Čia skaičiai, kaip ir žodžiai kryžiažodžiuose, skaitomi horizontaliai (iš kairės į dešinę) ir vertikaliai (iš viršaus žemyn). Į kiekvieną langelį gali būti įrašytas tiktai vienas skaitmuo.

Štai keletas skaičių susikirtimo uždavinių pavyzdžių:

1 uždavinys. Užpildyti visus kvadrato (181 pieš.) langelius skaičiais, patenkinančiais šiuos reikalavimus:

Horizontaliai:

1. Keturių paeiliui einančių skaitmenų skaičiaus ir apsukto skaičiaus skirtumas.

4. Skaičius su paeiliui didėjančiais skaitmenimis.

6. Dviejų skaičių: Nr. 3 vertikaliai ir Nr. 8 horizontaliai, sandauga.

8. Pirminis skaičius (dalijasi tiktai iš 1 ir iš savęs).

9. Dalus skaičiui 13.

Vertikaliai:

1. Skaičiaus Nr. 1 horizontaliai vieno skaitmens kubas.

2. Skaičius, kurio paskutiniai trys skaitmenys sutampa su paskutiniais skaitmenimis sandaugos dviejų skaičių: Nr. 1 horizontaliai ir Nr. 7 vertikaliai.

3. Skaičių Nr. 6 ir Nr. 8 — abu horizontaliai — dalmuo.

5. Skaičius iš trijų paeiliui einančių skaitmenų.

7. Skaičiaus Nr. 3 vertikaliai daugiklio ir skaičiaus Nr. 1 horizontaliai daugiklio sandauga.

Kaip ir kryžiažodžiuose, sprendimą reikia pradėti nuo labiausiai aiškios sąlygos. Pavyzdžiui, nedidelis apskaičiavimas leis tiksliai atsakyti į klausimą Nr. 1 horizontaliai. Kadangi apsuktas skaičius pagal sąlygos prasmę mažesnis už pradinį, tai aišku, kad pradinio skaičiaus skaitmenys sudaro mažėjančią seką:

$$a,\ a-1,\ a-2,\ a-3.$$

Laikydami tas raides skaitmenimis, keturženklį skaičių parašykime aritmetiniu būdu:

$$[a]\,[a-1]\,[a-2]\,[a-3].$$

Rasime skirtumą tarp to skaičiaus ir apsuktojo:

$$\begin{array}{r} [a]\,[a-1]\,[a-2]\,[a-3] \\ -\ [a-3]\,[a-2]\,[a-1]\,[a] \\ \hline \end{array}$$

$a-3$ vienetų yra mažiau už a vienetų; pasiskoliname dešimtį, kurią suskaidome į vienetus; tada $(10+a-3)-a=7$. Dešimčių buvo $a-2$, vieną pasiskolinome, vadinasi, liko $a-3$, mažiau, negu $a-1$. Pasiskoliname šimtą, suskaidome jį į dešimtis; tada $(10+a-3)-(a-1)=8$. Šimtų liko lygiai tiek, kiek reikia atimti, vadinasi, šimtų vietoje bus nulis, o tūkstančių vietoje $a-(a-3)=3$. Galutinai:

$$\begin{array}{cccc} [a] & [a-1] & [a-2] & [a-3] \\ -\ [a-3] & [a-2] & [a-1] & [a] \\ \hline 3 & 0 & 8 & 7 \end{array}$$

[1] 3	0	[2] 8	[3] 7
[4] 4	[5] 5	6	7
[6] 3			[7]
[8]		[9]	

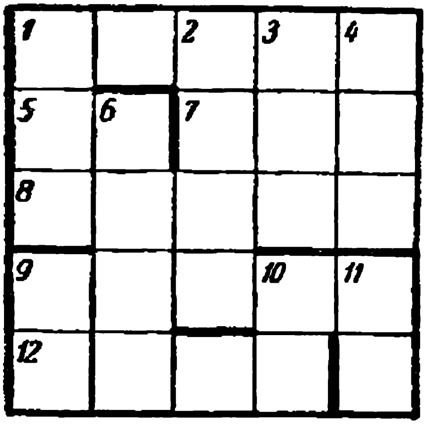
182 pieš.

Parašome tą skaičių duotojo kvadrato pirmoje eilutėje (182 pieš.).

Dabar nesunku atsakyti ir į klausimą Nr. 1 vertikaliai. Pagal sąlygą — tai kubas kurio nors iš trijų skaičių: 3, 7 ar 8. Tinka 343 (skaičiaus 7 kubas). Klausimo Nr. 4 horizontaliai sąlygą, aišku, patenkina skaičius 4 567. Dabar pats savaime nusistatė ir skaičius Nr. 3 vertikaliai.

Kitus skaičius parinkite savarankiškai (žr. sprendimą).

2 uždavinys. Užpildyti visus kvadrato, atvaizduoto 183 piešinyje, langelius skaičiais, patenkinančiais šiuos reikalavimus:



183 pieš.

Horizontaliai:

1. Skaičius, kurio visi skaitmenys skirtingi ir kuriame nėra skaitmenų, bendrų su skaičiumi Nr. 8 horizontaliai, kurio visi skaitmenys savo ruožtu taip pat skirtingi.

5. Skaičiaus Nr. 3 vertikaliai daugiklis.

7. Skaičius, gautas apsukus skaičių Nr. 3 vertikaliai.

8. Žr. Nr. 1 horizontaliai.

9. Viena devintoji sumos skaičių Nr. 1 ir Nr. 8 horizontaliai.

12. Sandauga trijų pirminių dviženklių skaičių, iš kurių du yra apsukto skaičiaus Nr. 6 vertikaliai daugikliai.

Vertikaliai:

1. Pirmas skaitmuo lygus kitų dviejų sumai.

2. Aštuon.oliktoˑšimtmečio antrosios pusės metai.

3. Skaičių Nr. 1 ir Nr. 8 horizontaliai skirtumas.

4. Paskutinis skaičiaus skaitmuo yra jo pirmų dviejų skaitmenų sandauga.

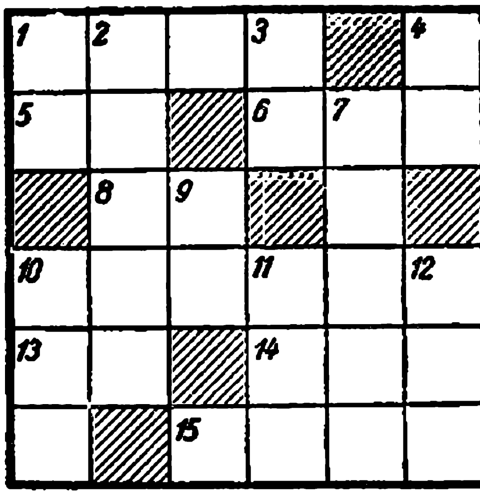
6. Apsuktas skaičius yra dalus skaičiui Nr. 3 vertikaliai ir susideda iš trijų dviženklių pirminių daugiklių.

9. Vienas iš apsukto skaičiaus Nr. 6 daugiklių.

10. Tas pats, kaip ir Nr. 5 horizontaliai.

11. Mažiausias dviženklis skaičiaus Nr. 3 vertikaliai daugiklis.

3. uždavinys. Užpildyti visus 184 piešinyje atvaizduoto kvadrato langelius skaičiais, patenkinančiais šiuos reikalavimus:



184 pieš.

Horizontaliai:

1. Pirminio skaičiaus kvadratas.

5. Pusė bendro didžiausio daliklio skaičių Nr. 10 ir Nr. 11 vertikaliai.

6. Sveiko skaičiaus kubas.

8. Kvadratinė šaknis iš skaičiaus Nr. 1 horizontaliai.

10. Sveiko skaičiaus kvadratas. Jis yra toks skaičius, kuris vienodai skaitomas tiek iš kairės į dešinę, tiek iš dešinės į kairę.

13. Vienetu didesnis už skaičių Nr. 9 vertikaliai.

14. Penkis kartus didesnis už skaičių Nr. 8 horizontaliai.

15. Skaičiaus, vienetu didesnio už Nr. 13 horizontaliai, kvadratas.

Vertikaliai:

1. 8 vienetais mažesnis už mažiausią sveiką skaičių, kurį padaliję iš 2, 3, 4, 5 ir 6, gauname liekanas atitinkamai 1, 2, 3, 4 ir 5.

2. Jo skaitmenų suma lygi 29.

3. Pirminis skaičius.

4. Pirminis skaičius, kuris yra skaičiaus Nr. 11 vertikaliai daugiklis.

7. Vienos dešimtosios skaičiaus Nr. 15 horizontaliai ir skaičiaus Nr. 13 horizontaliai keturguba sandauga.

9. Padvigubintas skaičius Nr. 4 vertikaliai.

10. Apsuktas skaičius Nr. 11 vertikaliai.

11. Kvadratinė šaknis iš skaičiaus Nr. 10 horizontaliai.

12. Dalus didžiausiam skaičiaus Nr. 13 horizontaliai daugikliui (tik ne pačiam skaičiui Nr. 13).

B. POKŠTAI

Pagrindinė aritmetinių pokštų tema yra pasirinktųjų skaičių arba jų veiksmų rezultatų atspėjimas. Visa šių pokštų «paslaptis» yra ta, kad «spėjikas» žino ir moka panaudoti ypatingas skaičių savybes, o «pasirinkėjas» tų savybių nežino*.

Kiekvienas pokštas įdomus matematiniu požiūriu tuo, kad reikia «demaskuoti» jo teorinius pagrindus, kurie daugumą atvejų gana paprasti, tik kartais būna gudriai užmaskuoti.

Kad pokštas įvykdomas, galima patikrinti bet kuriuo pavyzdžiu, tačiau daugumai aritmetinių pokštų pagrįsti visų patogiausia griebtis algebros. Iš pradžių jūs galite praleisti pokštų «įrodymus» ir apsiriboti tik jų turinio įsisavinimu, kad galėtumėte parodyti savo draugams. Tačiau ir įrodymai neapsunkins tų, kurie mėgsta pagalvoti ir yra susipažinę su algebros pradmenimis.

Čia duodami tiktai pagrindiniai pokštų griaučiai, nes jų praktinis apiforminimas gali būti įvairus, priklausomai nuo sąlygų ir vietos, taip pat nuo jūsų skonio, sąmojingumo ir išmonės.

293. Pasirinkite valandą

Pasirinkite valandą (pavyzdžiui 5). Aš stuksensiu pirštu, o jūs po kiekvieno stuktelėjimo «mintyje» prie pasirinktojo skaičiaus pridėkite po vienetą iki 20 (pavyzdžiui, 6, 7, 8 ir t. t.). Kada gausite 20, pasakykite «stop». Aš atspėsiu jūsų pasirinktą valandą.

Atspėjimo būdas. Aštuntą kartą stuktelėjęs, atspėjantis pažvelgia į laikrodžio ciferblato skaičių 12. Sekantį kartą stuktelėjęs, perkelia žvilgsnį ant skaičiaus 11, dar kartą, — ant skaičiaus 10 ir t. t., visą laiką prieš laikrodžio rodyklę (jei nėra prieš akis laikrodžio ciferblato, įsivaizduokite jį «mintyje»). Tas skaičius, ties kuriuo atspėjančiojo žvilgsnis bus komandos «stop» metu, ir bus pasirinkta valanda.

---

* Daugelį matematinių pokštų arba temų jiems jūs rasite ir kituose šios knygos skyriuose. Pokštai, pagrįsti panaudojimu ne dešimtainių skaičiavimo sistemų, pateikiami J. I. Perelmano knygoje «Įdomioji aritmetika».

Sakykime, pasirinkta 11. Pasirinkusis «sau» skaičiuoja: 12, 13, 14, ..., 20. Tuo momentu, kai pasirinkusis skaičiuoja: 19, spėjikas (praleidęs 7 stuktelėjimus) įsidėmi: 12. Pasirinkusis: 20 («stop»). Spėjikas: 11!

Įrodymas. Pasirinktąjį skaičių pažymėkime raide x. Po septynių stuktelėjimų pasirinkusis suskaičiuoja iki skaičiaus $x+7$. Kiek lieka stuktelėjimų iki skaičiaus 20?

$$20-(x+7)=13-x.$$

O kiek reikia stuktelėjimų, kad būtų suskaičiuota mažėjančia eile nuo 12 iki x imtinai?

$$12-(x-1)=13-x,$$

tai yra tiek pat.

Pastaba. Paįvairinimui pasirinkusį prašykite skaičiuoti ne iki 20, o iki kurio nors kito skaičiaus A (pavyzdžiui, iki 25). Tada spėjikas savo skaičiavimą kiekvieną kartą turi pradėti nuo stuktelėjimo, kurio numeris yra $A-12$ (nuo trylikto, jei $A=25$).

294. Pasirinktojo skaičiaus atspėjimas (7 pokštai)

1 pokštas. Pasirinkite skaičių. Atimkite 1. Liekaną padvigubinkite ir pridėkite iš pradžių pasirinktąjį skaičių. Pasakykite rezultatą. Aš atspėsiu pasirinktąjį skaičių.

Atspėjimo būdas. Pridėkite prie rezultato 2, o sumą padalykite iš 3. Dalmuo — pasirinktasis skaičius.

Pavyzdys. Pasirinkta 18; $18-1=17$; $17\cdot2=34$; $34+18=52$. Spėjame: $52+2=54$; $54:3=18$.

Įrodymas. Pasirinktąjį skaičių pažymėkime raide x. Atlikime reikalaujamus veiksmus:

$$x-1; \quad 2(x-1); \quad 2(x-1)+x.$$

Rezultatas:

$$2x-2+x=3x-2.$$

Pridėję 2, gauname $3x$, o padaliję iš 3, gauname pasirinktąjį skaičių x.

2 pokštas. Paprašykite savo draugą pasirinkti kurį nors skaičių. Paskui liepkite jam kelis kartus paeiliui padauginti ir padalyti jo pasirinktąjį skaičių iš įvairių jūsų nurodytų skaičių. Tegul jis jums veiksmų rezultato nepasako.

Po keleto daugybos ir dalybos veiksmų sustokite ir paprašykite pasirinkusį gautąjį rezultatą padalyti iš to skaičiaus, kurį jis pasirinko, paskui prie to dalmens pridėti pasirinktąjį skaičių ir pasakyti jums rezultatą. Iš to rezultato jūs tuojau pat atspėjate pasirinktąjį jūsų draugo skaičių.

Paslaptis labai paprasta. Pats atspėjantis turi pasirinkti bet kurį skaičių (pavyzdžiui, 1) ir su juo atlikti visus jo nurodomus daugybos ir dalybos veiksmus ligi pat dalybos iš pradžioje pasirinkto skaičiaus. Tada dalmenį jis gaus tokį pat, kokį ir pasirinkusis, nors iš pradžių jų pasirinkti skaičiai ir būtų buvę skirtingi. Po to atspėjantis iš jam pasakyto rezultato turi atimti savo rezultatą. Skirtumas ir bus ieškomasis skaičius.

Pavyzdys. Pasirinktasis skaičius 7. Padauginamas iš 12. Rezultatas (84) padalijamas iš 2. Gautas skaičius (42) padauginamas iš 5. Rezultatas (210) padalijamas iš 3. Gaunama 70; padalijus iš pasirinktojo skaičiaus ir pridėjus pasirinktąjį skaičių, — 17.

Kartu jūs «sau» pasirenkate skaičių 1. Padauginate iš 12, gaunate 12. Dalijate iš 2, gaunate 6. Dauginate iš 5, gaunate 30. Dalijate iš 3, gaunate 10. Atėmę 10 iš 17, gaunate ieškomąjį skaičių 7.

1 pastaba. Efektui pastiprinti jus galite leisti skaičių pasirinkusiam pačiam nurodyti skaičių, iš kurio jis norėtų padauginti ar padalyti gautąjį rezultatą, tik jis turi kiekvieną kartą jums tuos skaičius pranešti.

2 pastaba. Nebūtina kaitalioti daugybą ir dalybą. Galima iš pradžių nurodyti keletą daugybų, o paskui keletą dalybų, arba atvirkščiai.

Įrodymas. Tegul jūsų draugas pasirinko skaičių n, o jūs — skaičių p. Atlikę su vienu ir kitu skaičiumi eilę vienodų daugybos ir dalybos veiksmų, gauname tokio pavidalo rezultatus:

$$n\frac{a\cdot b\cdot c\ldots}{x\cdot y\cdot z\ldots};\quad p\frac{a\cdot b\cdot c\ldots}{x\cdot y\cdot z\ldots}.$$

Abu tuos rezultatus padaliję: pirmąjį iš n, o antrąjį iš p, gauname, aišku, tą patį skaičių:

$$\frac{a\cdot b\cdot c\ldots}{x\cdot y\cdot z\ldots}.$$

Žinant šį skaičių ir sumą $\frac{a\cdot b\cdot c\ldots}{x\cdot y\cdot z\ldots}+n$, pakanka iš pastarosios atimti tą skaičių, kad gautume skaičių n.

3 pokštas. Susitarkime vadinti didesniąja nelyginio skaičiaus dalimi tą jo dalį, kuri vienetu didesnė už kitą dalį. Pavyzdžiui, skaičiaus 13 didesnioji dalis lygi 7, skaičiaus 21 didesnioji dalis lygi 11.

Pasirinkite skaičių. Prie jo pridėkite to skaičiaus pusę arba, jei jis nelyginis,— didesniąją jo dalį. Prie tos sumos pridėkite jos pusę arba, jei ji nelyginė,— didesniąją jos dalį. Gautą skaičių padalykite iš 9, pasakykite dalmenį, o jei bus gauta liekana, tai pasakykite, ar ji didesnė, ar lygi, ar mažesnė už p e n k i s. Priklausomai nuo atsakymo į šį klausimą, pasirinktasis skaičius lygus:

keturgubam dalmeniui $\begin{cases} & \text{jei nėra liekanos;} \\ +1, & \text{jei liekana mažesnė už penkis;} \\ +2, & \text{jei liekana lygi penkiems;} \\ +3, & \text{jei liekana didesnė už penkis.} \end{cases}$

P a v y z d y s. Pasirinkta 15. Atlikę reikalaujamus veiksmus, turime: $15+8=23$, $23+12=35$; $35:9=3$ (liekana 8). Pranešta: «dalmuo trys, liekana didesnė už penkis».

Spėjame: $3\cdot 4+3=15$. Pasirinkta 15.

Į r o d y m a s. Pasirinktasis skaičius, kaip bet koks sveikas skaičius, gali būti parašytas vienos iš toliau pateikiamų formų pavidalu:

$$4n,\quad 4n+1,\quad 4n+2,\quad 4n+3,$$

kur raidei n galima duoti reikšmes: 0, 1, 2, 3, 4, ...

a) Pasirinktasis skaičius yra $4n$ pavidalo.

Atliekame reikalaujamus veiksmus:

$$4n+2n=6n,\quad 6n+3n=9n,\quad 9n:9=n$$

(liekanos nėra). Pasirinktasis skaičius $4n$.

b) Pasirinktasis skaičius yra tokio pavidalo: $4n+1$. Jo didesnioji dalis $2n+1$. Turime:

$$(4n+1)+(2n+1)=6n+2;\quad (6n+2)+(3n+1)=9n+3;$$
$$(9n+3):9=n \text{ (liekana 3)}.$$

Liekana mažesnė už 5. Pasirinktasis skaičius $4n+1$.

c) Pasirinktasis skaičius yra $4n+2$ pavidalo. Turime:

$$(4n+2)+(2n+1)=6n+3.$$

Pridėję prie to rezultato jo didesniąją dalį, t. y. $3n+2$, gauname: $(6n+3)+(3n+2)=9n+5$, $(9n+5):9=$ $=n$ (liekana 5). Liekana lygi penkiems. Pasirinktasis skaičius $4n+2$.

d) Pasirinktasis skaičius yra $4n+3$ pavidalo. Jo didesnioji dalis $2n+2$. Turime:

$$(4n+3)+(2n+2)=6n+5.$$

Jo didesnioji dalis $3n+3$, todėl

$$(6n+5)+(3n+3)=9n+8,$$
$$(9n+8):9=n \text{ (liekana 8)}.$$

Liekana didesnė už penkis. Pasirinktasis skaičius $4n+3$.

4 pokštas. Iš pradžių elkitės, kaip ir 3 pokšte, tai yra paprašykite pasirinkti skaičių ir prie jo pridėti jo pusę ar jo didesniąją dalį, paskui vėl pridėti gautos sumos pusę ar jos didesniąją dalį. Tačiau dabar, užuot prašę padalyti rezultatą iš 9, paprašykite pasakyti pagal skiltis visus gauto rezultato skaitmenis, išskyrus vieną. Tas atspėjančiam nepasakytas skaitmuo neturi būti nulis. Taip pat būtina, kad pasirinkęs skaičių pasakytų, kurios skilties skaitmenį nuo atspėjančio nuslėpė ir kuriais atvejais (pirmu ar antru, arba pirmu ir antru, arba nė karto) pasirinkusiam teko pridėti didesniąją skaičiaus dalį. Po to, norint sužinoti pasirinktąjį skaičių, reikia sudėti visus skaitmenis, kurie pasakyti, ir pridėti:

0, jei nė karto neteko pridėti didesniosios skaičiaus dalies;

6, jei tik pirmu atveju teko pridėti didesniąją skaičiaus dalį;

4, jei tik antru atveju teko pridėti didesniąją skaičiaus dalį;

1, jei abiem atvejais teko pridėti didesniąją skaičiaus dalį.

Toliau, visais atvejais gautąją sumą reikia papildyti iki artimiausio dalaus devyniems skaičiaus. Tas papildinys ir bus nuslėptasis skaitmuo. Dabar, žinant visus rezultato skaitmenis, vadinasi, ir visą rezultatą, nesunku rasti ir pasirinktąjį skaičių. Tam reikia gautą rezultatą padalyti iš 9, dalmenį padauginti iš 4 ir, priklausomai nuo liekanos dydžio, prie sandaugos pridėti 1, 2 ar 3 (žr. pokšto Nr. 4 taisyklę).

1 p a v y z d y s. Pasirinkta 28. Atlikus reikalaujamus veiksmus, gauta 63. Nuslėptas skaitmuo 3. Tada atspėjantis papildo jam praneštą dešimčių skaitmenį 6 iki 9 ir gauna vienetų skaitmenį 3. Rezultatas 63 surastas. Ieškomasis skaičius $(63 : 9) \cdot 4 = 28$.

2 p a v y z d y s. Pasirinkta 125. Atlikus visus reikalaujamus veiksmus, gauta 282. Nuslėptas, sakysime, šimtų skaitmuo 2. Pranešta: dešimčių ir vienetų skaitmenys yra atitinkamai 8 ir 2, o didesnioji skaičiaus dalis buvo pridėta tik pirmu atveju.

Spėjame: $8 + 2 + 6 = 16$. Artimiausias dalus devyniems skaičius 18. Vadinasi, nuslėptas šimtų skaitmuo $18 - 16 = 2$.

Surandame pasirinktąjį skaičių: $282 : 9 = 31$ (liekana 3); $31 \cdot 4 + 1 = 125$.

3 p a v y z d y s. Sakykime, pasirinkęs skaičių pasako, kad paskutinis jo gautas rezultatas susideda iš trijų skaitmenų, pirmas skaitmuo 1, paskutinis — 7 ir didesniąją skaičiaus dalį teko pridėti dviem atvejais.

Spėjame pasirinktąjį skaičių: $1 + 7 + 1 = 9$. Papildinys iki skaičiaus, dalaus devyniems, lygus n u l i u i arba d e v y n i e m s, tačiau pagal sąlygą nulio nuslėpti negalima, vadinasi, nuslėptas skaitmuo 9, taigi, visas rezultatas 197. Dalijame 197 iš 9; $197 : 9 = 21$ (liekana 8). Pasirinktasis skaičius $21 \cdot 4 + 3 = 87$.

Į r o d y m a s. Pažvelgę į pokšto Nr. 4 įrodymą, matome, kad $4n$ pavidalo skaičiams galutinis skaičiavimų rezultatas yra $9n$, t. y. skaičius, dalus devyniems. Vadinasi, šio skaičiaus skaitmenų suma turi pasidalyti iš 9, o tai parodo, kad nuslėptas skaitmuo papildo kitų skaitmenų sumą iki

skaičiaus, dalaus devyniems. Jeigu žinomų skaitmenų suma pati dali devyniems, tai nuslėptas skaitmuo — 9 arba 0, tačiau nulis jis negali būti pagal sąlygą.

$4n+1$, $4n+2$ ir $4n+3$ pavidalų skaičiams skaičiavimo rezultatas yra atitinkamai: $9n+3$, $9n+5$, $9n+8$. Šių skaičių skaitmenų suma tampa dali devyniems, tiktai pridėjus pirmu atveju 6, antru 4 ir trečiu 1.

Vadinasi, ir šiais atvejais nuslėptas skaitmuo turi papildyti kitų skaitmenų sumą iki skaičiaus, dalaus devyniems.

5 pokštas. Pasirinkite kokį nors skaičių (mažesnį už šimtą, kad skaičiavimai būtų paprastesni) ir pakelkite jį kvadratu. Prie pasirinktojo skaičiaus pridėkite bet kurį skaičių (tiktai pasakykite kurį) ir gautąją sumą taip pat pakelkite kvadratu. Raskite gautųjų kvadratų skirtumą ir pasakykite rezultatą. Norint atspėti pasirinktąjį skaičių, pakanka pusę to rezultato padalyti iš skaičiaus, pridėto prie pasirinktojo, o iš dalmens atimti pusę daliklio.

Pavyzdys. Pasirinkta 53; $53^2 = 2\,809$. Prie pasirinktojo skaičiaus pridėta 6:

$$53+6=59, \quad 59^2=3\,481, \quad 3\,481-2\,809=672.$$

Šis rezultatas praneštas.

Spėjame:

$$672:12=56, \quad 6:2=3, \quad 56-3=53.$$

Pasirinktasis skaičius 53.

Įrodymas. Pažymėkime pasirinktąjį skaičių raide x, o pridedamąjį — raide y. Atlikę reikalaujamus veiksmus, gausime:

$$(x+y)^2-x^2=2xy+y^2=2y\left(x+\frac{y}{2}\right)=z.$$

Iš čia matyti, kad pasirinktasis skaičius (x) lygus pusei rezultato $\left(\frac{z}{2}\right)$, padalyto iš pridedamojo skaičiaus (y), minus pusė daliklio $\left(\frac{y}{2}\right)$.

6 pokštas. Paprašykite savo draugą pasirinkti bet kurį skaičių ribose nuo 6 iki 60. Tegul jis pasirinktąjį skaičių padalija pradžioje iš 3, paskui vėl jį iš 4, o po to

ir iš 5 ir pasako dalybų liekanas. Pagal tas liekanas raktinės formulės pagalba jūs rasite pasirinktąjį skaičių.

Tegul liekanos r_1, r_2 ir r_3. Įsiminkite dabar tokią formulę:

$$S = 40r_1 + 45r_2 + 36r_3.$$

Dalybos S iš 60 liekana ir bus pasirinktasis skaičius. Jūsų draugui, pasirinkusiam skaičių, ne taip jau lengva bus pačiam susekti atspėjimo paslaptį, kurią jūs žinote.

P a v y z d y s. Pasirinkta 14. Praneštos liekanos: $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 4$.

Spėjame:

$S = 40 \cdot 2 + 45 \cdot 2 + 36 \cdot 4 = 314$; $314 : 60 = 5$ (liekana 14).

Pasirinktasis skaičius 14.

Į r o d y m a s. Pažymėkime pasirinktąjį skaičių raide x, dalybų x iš 3, 4 ir 5 dalmenis atitinkamai raidėmis a, b ir c, o liekanas raidėmis r_1, r_2 ir r_3. Turime tris tapatybes:

$$x = 3a + r_1,$$
$$x = 4b + r_2,$$
$$x = 5c + r_3.$$

Iš čia

$$r_1 = x - 3a, \quad r_2 = x - 4b; \quad r_3 = x - 5c.$$

Apskaičiuokime:

$$S = 40r_1 + 45r_2 + 36r_3 =$$
$$= 40(x - 3a) + 45(x - 4b) + 36(x - 5c) =$$
$$= 121x - 120a - 180b - 180c.$$

Daugikliai 40, 45 ir 36 taip ir buvo parinkti, kad visi gautos algebrinės sumos nariai dalytųsi iš 60 be liekanos, išskyrus pirmąjį ($121x$), kurį dalydami iš 60 kaip tik ir gauname liekaną, lygią pasirinktajam skaičiui x. Taisyklės teisingumas įrodytas.

7. pokštas. Išsiaiškinę čia išdėstytų pokštų matematinį pagrindą, jūs galite juos visaip keisti, sugalvoti kitas skaičių atspėjimo taisykles, paįvairinti duodamus klausimus.

Štai, pavyzdžiui, tokia tema. Pokšte Nr. 6 pasirinktasis skaičius buvo atspėjamas pagal liekanas, gaunamas

dalijant jį iš 3, 4 ir 5. Pakeiskime šiuos daliklius kitais dalikliais, pavyzdžiui, 3, 5, 7 ir imkime pasirinktinų skaičių ribas nuo 7 iki 100. Daugikliai raktinėje formulėje, aišku, taip pat pasikeis. Parinkite juos naujai raktinei formulei, tinkamai šiuo atveju.

A t s a k y m a s: $S = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3$, kur r_1, r_2 ir r_3 — liekanos, gaunamos dalijant pasirinktąjį skaičių atitinkamai iš 3, 5 ir 7. Pasirinktasis skaičius yra lygus liekanai, kurią gauname padaliję S iš 105.

295. Iš anksto numatau rezultatą

Matematikoje yra ir tokių dėsningumų, kurie garantuoja, kad, atlikę tam tikrus veiksmus su bet kokiais pradiniais skaičiais, gausime iš anksto numatytą rezultatą.

Tolesni du pokštai iliustruoja šį teiginį. Šiuos pokštus galima atlikti su vienu dalyviu, o taip pat ir su visa dalyvių grupe.

1 pokštas. Paskirkite kiekvienam pokšto dalyviui po kokį nors skaičių (su n e l y g i n i u skaitmenų skaičiumi), kurio centrinis skaitmuo nebūtų devyniukė, o likusių skaitmenų suma dalytųsi iš 9 be liekanos. Vienam jūs galite paskirti, pavyzdžiui, skaičių 435, antram 46 853 ir t. t. Dabar kiekvieną dalyvį paprašykite sudėti visus jo skaičiaus skaitmenis ir, jei skaitmenų suma nebus vienaženklė, sudėti šios sumos skaitmenis, ir taip kartoti tol, kol skaitmenų suma liks vienaženklė.

Jūs apsiimate atspėti, ką gavo kiekvienas dalyvis, arba net iš anksto kiekvienam išpranašauti, kokią jie gaus galutinę skaitmenų sumą.

Mat, galutinė tokių skaičių skaitmenų suma visada bus lygi iš pradžių paskirtojo skaičiaus v i d u r i n i a m s k a i t m e n i u i. Skaičiaus 435 vidurinis skaitmuo 3; tokia pat ir galutinė skaitmenų suma:

$$4 + 3 + 5 = 12, \quad 1 + 2 = 3.$$

Skaičiaus 46 853 vidurinis skaitmuo 8, tokia pat ir jo skaitmenų suma:

$$4 + 6 + 8 + 5 + 3 = 26, \quad 2 + 6 = 8.$$

Žinoma, rezultato sutapimą su jūsų paskirtojo skaičiaus viduriniu skaitmeniu pokšto dalyviai gana greit pastebės ir džiaugsis, kad atidengė pokšto paslaptį, o jūs juos «apvilkite», pasiūlę pabūti kuriam nors spėjiku. Aišku, kad jei tas savanoris spėjikas nepastebėjo pagrindinio dėsningumo, rišančio iš anksto duodamų skaičių skaitmenis («visų skaitmenų suma be vidurinio dalijasi iš 9»), tai bet kuris jo parašytas skaičius tiktai atsitiktinai gali būti toks, kokio reikia, taigi, aplamai kalbant, spėjikas turi pralaimėti. Sakykime, spėjikas užrašo 72 813. Randame visų skaitmenų sumą: $7+2+8+1+3=21$, toliau, $2+1=3$. Galutinė suma, kaip ir reikėjo laukti, nelygi duotojo skaičiaus viduriniam skaitmeniui.

Į r o d y m a s. Iš pradžių prisiminkime, kad jei koks nors skaičius S dalijasi iš 9, tai, sudėję visus jo skaitmenis, mes gausime naują skaičių (S_1), kuris taip pat dalysis iš 9. Toliau, jei skaičius S_1 — ne vienaženklis, tai, sudėję jo skaitmenis, mes gausime dar vieną skaičių (S_2), kuris taip pat būtinai dalysis iš 9, ir t. t. Tęsdami šį procesą, mes būtinai prieisime prie vienaženklio skaičiaus, dalaus 9. Tačiau vienintelis vienaženklis skaičius, kuris dalijasi iš 9, yra patys 9.

Dabar imkime tokį skaičių: $\overline{\ldots cbaxmnp \ldots}$, kurio visų skaitmenų be viduriniojo suma

$$S=\ldots c+b+a+m+n+p\ldots$$

pagal sąlygą dalijasi iš 9.

Jei skaičius S vienaženklis, tai jis 9, o jei nevienaženklis, tai jo skaitmenų suma arba kuri nors iš paskesnių tokiu pat būdu gautų skaičių skaitmenų sumų, kaip buvo sakyta, būtinai yra 9. Vadinasi, pąkartoję keletą kartų v i s ų skaitmenų, iš pradžių duoto skaičiaus $\overline{\ldots cbaxmnp \ldots}$, paskui jo skaitmenų sumos ir t. t., sudėties procesą, mes būtinai prieisime prie skaičiaus $9+x$, kur x — duotojo skaičiaus vidurinis skaitmuo. Galutinė skaičiaus $9+x$ skaitmenų suma lygi x. Ir tikrai, parašykime skaičių $9+x$ tokiu pavidalu: $10+(x-1)$. Jo skaitmenų suma: $1+0+$ $+x-1=x$.

2 pokštas. Parašykite ant popieriaus gabaliuko kokį nors skaičių tarp 1 ir 50 ir, neparodydami jo pokšto dalyviams, popieriuką paslėpkite. Savo ruožtu, tegul visi dalyviai parašo kokį jie nori skaičių, didesnį už 50, tačiau neviršijantį 100, ir tegul jums nerodydami atlieka šiuos veiksmus:

1) prideda prie savo skaičiaus $99 - x$, kur x — skaičius, jūsų užrašytas ant popieriaus gabaliuko (tą skirtumą apskaičiuokite mintinai ir pokšto dalyviams pasakykite tiktai galutinį rezultatą);

2) gautoje sumoje nubraukia kraštinį kairįjį skaitmenį ir jį prideda prie likusio skaičiaus;

3) gautąjį skaičių atima iš pradžioje jų parašyto skaičiaus.

Tą atlikę, visi dalyviai gaus tą patį skaičių, kaip tik tą, kurį iš anksto jūs paslėpėte.

P a v y z d y s. Jūsų parašytas ir paslėptas skaičius: 18; vieno dalyvio parašytas skaičius: 64. Pasiūlote pridėti $99 - 18 = 81$. Gaunama $64 + 81 = 145$.

Skaitmuo 1 nubraukiamas ir pridedamas prie likusio skaičiaus: $45 + 1 = 46$. Skirtumas tarp pasirinktojo skaičiaus (64) ir gautojo (46) : $64 - 46 = 18$ kaip tik ir yra jūsų paslėptas skaičius (18).

Į r o d y m a s. Pažymėkime iš anksto jūsų parašytą skaičių raide x, o dalyvio parašytą skaičių — raide y. Pirmas dalyvio atliktas veiksmas atveda prie skaičiaus $y + 99 - x$. Kadangi pagal sąlygą x ne didesnis kaip 50, o y — ribose nuo 51 iki 100, tai $y + 99 - x$ ne mažesnis kaip 100, tačiau ir ne didesnis kaip 199, t. y. būtinai triženklis skaičius, kurio šimtų skaitmuo 1. Tokiame skaičiuje nubraukti 1 — reiškia sumažinti jį šimtu; todėl antras dalyvio atliktas veiksmas atveda prie skaičiaus $y + 99 - x - 100 + 1 = y - x$. Paskutinis veiksmas, $y - (y - x) = x$, atveda prie skaičiaus x, o tai ir reikėjo įrodyti.

P a s t a b a. Jūs galite leisti pokšto dalyviams pasirinkti skaičių kitame diapazone, pavyzdžiui, tarp 201 ir 1 000, bet tada ir paslėptas skaičius turi būti ne mažesnis kaip 100 ir ne didesnis kaip 200, o tolesniuose skaičiavimuose vietoje 99 turi būti vartojamas skaičius 999.

296. Atspėti skaičiavimo rezultatą, nieko neklausiant

Ta pati galimybė numatyti skaičiavimo rezultatą, pasirinkusiojo nieko neklausiant, pagrindžia labai įdomų to rezultato atspėjimo būdą.

Paprašykite padauginti pasirinktąjį skaičių iš laisvai jūsų parinkto skaičiaus, o prie gautos sandaugos pridėti skaičių, taip pat laisvai jūsų parinktą. Paprašykite sumą padalyti iš trečio laisvai jūsų parinkto skaičiaus. Tuo metu padalykite mintinai pirmąjį jūsų pasakytą skaičių iš trečiojo ir kokį skaičių jūs gausite, pasiūlykite pokšto dalyviui tiek kartų atimti iš jo gauto dalmens pasirinktąjį skaičių. Šį paskutinį rezultatą jūs ir atspėjate. Jis bus lygus antrojo jūsų pasiūlyto skaičiaus dalybos iš trečiojo dalmeniui.

Pavyzdys. Sakysime, pasirinkta 6. Jūs paprašote padauginti pasirinktąjį skaičių iš 4 (įsidėmėkite tą skaičių kaip pirmąjį). Gaunama 24. Paprašote pridėti 15 (antrasis skaičius); gaunama 39. Paprašote padalyti iš 3 (trečiasis skaičius); gaunama 13. Skaičiavimas mintinai: $4:3=1\frac{1}{3}$. Pokšto dalyviui pasiūlote atimti iš jo gauto dalmens (iš 13) pasirinktąjį skaičių ir dar jo vieną trečdalį (tai yra šešis ir dar du — viso aštuonis): $13-8=5$.

Tiek pat gaunate ir antrąjį jūsų pasiūlytą skaičių padaliję iš trečiojo: $15:3=5$.

Įrodymas. Veiksmus, kurie atliekami šiuo atveju su pasirinktuoju skaičiumi n, galima išreikšti taip: $\frac{na+b}{c}$, o šią išraišką galima pakeisti $\frac{na}{c}+\frac{b}{c}$ pavidalu.

Aišku, kad, atėmę $n\cdot\frac{a}{c}$, gausime liekaną $\frac{b}{c}$.

Pastaba. Visada galima parinkti skaičius taip, kad nebūtų gaunama trupmenų.

297. Sužinojau, kiek kas paėmė

Tegul pirmasis pokšto dalyvis paima bet kurį daiktų (degtukų, monetų ar pan.) skaičių, dalų 4. Tegul antrasis paima tiek pat kartų po 7 daiktus, kiek pirmasis

paėmė po 4. O trečiojo dalyvio paprašykite paimti tiek pat kartų po 13 daiktų.

Dabar tegul trečiasis dalyvis iš jo paimtų daiktų atiduos pirmajam ir antrajam tiek, kiek kiekvienas iš pastarųjų jau turi. Paskui tegul antrasis dalyvis atiduos trečiajam ir pirmajam tiek daiktų, kiek kiekvienas iš jų dabar turi. Pagaliau ir pirmasis tegul tą patį padaro.

Paklauskite bet kurį pokšto dalyvį, kiek jis turi daiktų. Skaičių, kurį jis jums pasakys, padalykite iš 2. Dalmuo parodys daiktų skaičių, kurį iš pradžių paėmė pirmasis dalyvis. Ką tik rastą skaičių (tai yra pirmojo dalyvio paimtų daiktų skaičių) padalykite iš 4 ir padauginkite iš 7. Tai bus antrojo dalyvio paimtų daiktų skaičius. O trečiasis paėmė tiek kartų po 13 daiktų, kiek antrasis paėmė po 7.

Įrodymas:	Pirmasis	Antrasis	Trečiasis
Turėjo iš pradžių	4 *k*	7 *k*	13 *k*
Po pirmo perdavimo	8 *k*	14 *k*	2 *k*
Po antro perdavimo	16 *k*	8 *k*	4 *k*
Po trečio perdavimo	8 *k*	4 *k*	8 *k*

Po trečio perdavimo kiekvienas turėjo dukart daugiau daiktų, negu iš pradžių turėjo pirmasis. Visa kita aišku.

298. Vienas, du, trys mėginimai... ir atspėjau

Pasirinkite kuriuos nors du teigiamus sveikus skaičius. Sudėkite jų sumą su jų sandauga ir pasakykite man rezultatą. Kaip sportininkas peršoka kartelę po vieno, dviejų mėginimų, taip ir aš apsiimu atspėti jūsų pasirinktąjį skaičių, bet, gal būt, taip pat ne iš pirmo karto.

Metodas paprastas, nors neakivaizdus. Aš pridedu prie jūsų rezultato 1, gautąjį skaičių suskaidau į du daugiklius ir iš kiekvieno daugiklio atimu po 1.

1 pavyzdys. Man pasakė rezultatą: 34. Skaičiuoju: $34 + 1 = 35$; toliau: $35 = 5 \cdot 7$, o taip pat: $35 = 35 \cdot 1$. Va-

dinasi, pasirinkti skaičiai 4 ir 6, arba 34 ir 0. Pastarasis atvejis netinka (0 nėra teigiamas skaičius).

Galiu paprašyti jus a t i m t i pasirinktųjų skaičių sumą iš jų sandaugos. Dabar, kad sužinočiau jūsų pasirinktus skaičius, vėl pridedu prie jūsų rezultato 1, gautąjį skaičių suskaidau į du daugiklius ir prie kiekvieno p r i d e d u po 1.

2 p a v y z d y s. Pasakė rezultatą: 64. Skaičiuoju: $64 + 1 = 65$; $65 = 13 \cdot 5$ arba $65 = 65 \cdot 1$. Vadinasi, pasirinkti skaičiai 14 ir 6, arba 66 ir 2.

Į r o d y m a s. Tegul pasirinkti skaičiai a ir b. Tada pagal sąlygą turime: $(a+b)+ab$. Pridėję 1, mes gauname tokį skaičių, kuris lengvai suskaidomas daugikliais:

$$(a+b)+ab+1=a+1+b(a+1)=(a+1)(b+1).$$

Kaip matyti, kiekvienas daugiklis vienetu didesnis už atitinkamą pasirinktą skaičių.

Galima paruošti analoginius pokštus, kurie būtų paremti pasirinktųjų skaičių ir jų sandaugos s k i r t u m ų sudėtimi arba atimtimi.

299. Kas paėmė trintuką, o kas pieštuką

Nusigręžkite ir paprašykite du pokšto dalyvius, tegul tai bus Ženia ir Šura, vieną paimti pieštuką, o antrąjį — trintuką. Toliau pasakykite:

— Turinčiam pieštuką paskiriu skaičių 7, turinčiam trintuką — skaičių 9 (skaičiai gali būti ir kiti, tačiau būtinai vienas p i r m i n i s, o antras s u d ė t i n i s ir nedalus pirmajam).

— Ženia, padaugink savo skaičių iš 2, o tu, Šura, iš 3 (vienas iš tų skaičių turi sveiką skaičių kartų įeiti į jūsų nurodytą sudėtinį skaičių, pavyzdžiui, kaip 3 į 9, o antrasis turi būti su juo reliatyviai pirminis*, pavyzdžiui 3 ir 2).

— Sudėkite rezultatus ir pasakykite man sumą arba pasakykite, ar ši suma dalijasi be liekanos iš 3 (iš to jūsų duoto skaičiaus, kuris yra nurodyto sudėtinio skaičiaus daugiklis).

---

* R e l i a t y v i a i p i r m i n i a i s vadiname tokius sveikus skaičius, kurių bendras didžiausias daliklis lygus 1. *Red.*

Tai sužinoję, jūs tuoj pat galite nustatyti, kas paėmė pieštuką, o kas trintuką.

Ir tikrai, jei gautoji suma dalijasi iš 3, tai iš 3 buvo padaugintas skaičius, nedalus trims, tai yra 7. Žinodami, kuris padaugino savo skaičių iš 3 (Šura) ir kad skaičius 7 buvo paskirtas turinčiam pieštuką, jūs padarote išvadą, kad pieštukas yra pas Šurą. Atvirkščiai, jei gautoji suma nesidalija iš 3, tai iš 3 buvo padaugintas skaičius, dalus trims, tai yra 9. Šiuo atveju pas Šurą — trintukas.

Įrodymas. Tegul A — pirminis skaičius, B — sudėtinis, bet nesidalijantis iš A. Du kiti skaičiai x ir y — reliatyviai pirminiai, be to, y — vienas iš skaičiaus B daliklių. Atlikus reikalaujamus padauginimus, gali gautis suma $Ax + By$ arba $Ay + Bx$. Aišku, kad pirmoji suma nesidalija iš y, o antroji dalijasi. Vadinasi, pagal tai, ar galutinis rezultatas dalijasi iš y, ar ne, vienareikšmiai nustatome, ar iš y buvo padaugintas skaičius A, ar skaičius B.

300. Trijų pasirinktųjų skaičių ir rezultato atspėjimas

Paprašykite savo svečių parašyti kokius nors tris iš eilės einančius skaičius, kiekvieną ne didesnį už 60 (pavyzdžiui, jie parašys: 31, 32, 33). Paprašykite, kad jie garsiai pasakytų dar vieną skaičių, dalų 3 ir mažesnį už 100 (pavyzdžiui, jie pasakys: 27). Tą skaičių jums reikia įsiminti. Paprašykite jų sudėti visus 4 skaičius ($31 + 32 + 33 + 27 = 123$) ir sumą padauginti iš 67 ($123 \times 67 = 8\,241$).

Tegul dabar jūsų svečiai pasakys garsiai paskutinius du rezultato skaitmenis. Jūs tuojau galite išvardyti pasirinktus tris skaičius ir visą rezultatą.

Atspėjimo būdas. Padalyti 27 iš 3. Bus gauta 9. Prie 9 pridėti 1, bus gauta 10 — raktinis skaičius. Atėmę jį iš skaičiaus, sudaryto iš dviejų jums žinomų rezultato skaitmenų, $41 - 10 = 31$, jūs ir gausite mažiausiąjį iš trijų pasirinktųjų skaičių. Padvigubinę 41, gausite 82 — pirmuosius rezultato skaitmenis.

Įrodymas. Trijų pasirinktųjų skaičių ir skaičiaus, dalaus trims, suma bus:

$$a + (a + 1) + (a + 2) + 3k = 3a + 3k + 3 = 3(a + k + 1).$$

Padauginę šią sumą iš 67, gausime:

$$201(a+k+1).$$

Pagal sąlygą $a < 60$, $3k < 100$, arba $k < 34$. Vadinasi, $a+k+1$ yra ne daugiau kaip dviejų ženklų skaičius, o bet kurio vienaženklio ar dviženklio skaičiaus sandauga iš 201, kaip lengva suvokti, visada baigiasi tuo pačiu vienaženkliu ar dviženkliu skaičiumi, o prasideda dvigubai didesniu skaičiumi.

Pavyzdžiui,

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 41 \\ 201 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 41 \\ 82 \end{array} \\ \hline 8241 \end{array}$$

Taigi, $a+k+1$ yra skaičius, sudarytas iš dviejų paskutiniųjų sandaugos skaitmenų. Atėmę iš šio žinomo skaičiaus taip pat žinomą skaičių $k+1$, randame skaičių a - mažiausią iš trijų pasirinktųjų.

301. Atspėti keletą pasirinktųjų skaičių

Yra paprastas keleto pasirinktųjų vienaženklių skaičių atspėjimo būdas. Pirmąjį iš pasirinktųjų skaičių padauginti iš 2 ir prie sandaugos pridėti 5. Gautą sumą padauginti iš 5 ir prie rezultato pridėti 10. Prie gauto skaičiaus pridėti a n t r ą pasirinktąjį skaičių ir viską padauginti iš 10. Prie gauto rezultato pridėti t r e č i ą pasirinktąjį skaičių ir vėl padauginti iš 10; paskui pridėti k e t v i r t ą pasirinktąjį skaičių ir vėl padauginti iš 10 ir taip elgtis tol, kol bus pridėtas p a s k u t i n i s pasirinktasis skaičius. Pastaroji suma bei pasirinktųjų skaičių k i e k i s turi būti paskelbti.

Pasirinktiesiems skaičiams atspėti reikia iš paskelbtosios sumos atimti:

35, jei pasirinkti 2 skaičiai;
350, jei pasirinkti 3 skaičiai;
3500, jei pasirinkti 4 skaičiai;

. . . .

Visi skirtumo skaitmenys ir bus pasirinktieji.

P a v y z d y s. Pasirinkti skaičiai: 3, 5, 8 ir 2. Padvigubiname pirmąjį: $3 \cdot 2 = 6$, pridedame 5:

$$6 + 5 = 11;$$

padauginame iš 5:

$$11 \cdot 5 = 55;$$

pridedame 10:

$$55 + 10 = 65;$$

pridedame antrą pasirinktąjį skaičių:

$$65 + 5 = 70;$$

padauginame iš 10:

$$70 \cdot 10 = 700;$$

pridedame trečią pasirinktąjį skaičių:

$$700 + 8 = 708$$

ir toliau:

$$708 \cdot 10 = 7\,080; \quad 7\,080 + 2 = 7\,082.$$

Iš galutinės sumos atimame 3 500; gauname 3 582. Visi šio skirtumo skaitmenys — pasirinktieji.

Į r o d y m a s.

1) Pasirinkti du skaičiai: a ir b. Atlikime reikalaujamus veiksmus:

$$(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25, \quad 10a + 25 + 10 = 10a + 35,$$
$$10a + 35 + b = 10a + b + 35.$$

Atėmę 35, gauname dviženklį skaičių $10a + b$, susidedantį iš pasirinktųjų skaitmenų.

2) Pasirinkti 3 skaičiai: a, b ir c. Atlikime reikalaujamus veiksmus:

$$(10a + b + 35) \cdot 10 + c = 100a + 10b + c + 350.$$

Atėmę 350, gauname triženklį skaičių $100a + 10b + c$, susidedantį iš pasirinktųjų skaitmenų.

Analogiškai nagrinėjami ir kiti atvejai.

P a s t a b a. Šį pokštą galima apiforminti kaip atsivertusių ant paridentų lošimo kauliukų akių skaičiaus atspėjimą (apie kauliukus žr. VI skyriuje) arba kaip atspėjimą pas ką, ant kurios rankos, kurio piršto ir narelio uždėtas žiedelis (pavyzdžiui, iš siūlo, medžiagos skutelio arba popierinės juostelės).

Pastaruoju atveju reikia visus pokšto dalyvius sunumeruoti, susitarti, kurią ranką laikyti pirma, kurią antra, sunumeruoti rankas, pirštus ir pirštų narelius. Tegul, pavyzdžiui, dalyvis numeris k e t u r i žiedelį užsidėjo ant a n t r o s rankos p e n k t o piršto t r e č i o narelio.

Paprašykite paėmusio žiedelį padvigubinti savo numerį (gausis 8), pridėti 5, rezultatą padauginti iš 5, pridėti 10, pridėti rankos numerį, padauginti iš 10, pridėti rankos piršto numerį, vėl padauginti iš 10, pridėti narelio numerį ir pasakyti galutinę sumą.

Šio pavyzdžio atveju jums pasakys: 7 753. Atimkite 3 500, gausite 4 253. Šio skaičiaus skaitmenys papasakoja: žiedelį turi dalyvis numeris k e t u r i ant a n t r o s rankos p e n k t o piršto t r e č i o narelio.

302. Kiek jums metų?

— Nenorite pasakyti? Na, gerai, pasakykite man tiktai: kiek gausite, jei iš skaičiaus, 10 kartų didesnio už jūsų metų skaičių, atimsite kurio nors vienaženklio skaičiaus sandaugą iš 9. Dėkoju jums, dabar aš žinau, kiek jums metų.

A t s p ė j i m o b ū d a s. Atskirti nuo paskelbtojo rezultato vienetų skaičių ir jį pridėti prie likusio skaičiaus.

P a v y z d y s. Iš skaičiaus 170, kuris 10 kartų didesnis už metų skaičių, atėmė, sakysime 27. Paskelbė rezultatą: 143. Nustatome amžių: $14 + 3 = 17$ metų.

Į r o d y m a s. Jei ieškomasis amžius x, tai reikalaujamų veiksmų rezultatas bus $10x - 9k$, kur k — bet kuris vienaženklis skaičius. Pertvarkome gautą skirtumą:

$$10x - 9k = 10x - 10k + k = 10(x - k) + k.$$

Mūsų pašnekovas, tur būt, vis dėlto turi daugiau kaip devynerius metus ($x > 9$), o k, pagal sąlygą, ne daugiau kaip devyni ($k \leq 9$), vadinasi, $x - k$ — teigiamas skaičius. Tokiu atveju skaičius $10(x - k) + k$ turi k vienetų, ir jei tuos k vienetų atmesime, tai tuo pačiu pasikeis likusių skaitmenų skiltis, tai yra dešimtys pasidarys vienetais, šimtai — dešimtimis ir t. t., žodžiu, skaičius sumažės 10 kartų ir bus lygus $x - k$. Prie jo pridėję atmestą skaičių k, gauname ieškomąjį amžių x.

303. Atspėti amžių

Paįvairinimui galima paprašyti padauginti metų skaičių iš 2, pridėti 5, o sumą vėl padauginti iš 5; paprašyti pasakyti rezultatą. Paskutinis rezultato skaitmuo, aišku, bus 5. Reikia jį atmesti, o iš likusio skaičiaus atimti 2. Skirtumas — ieškomasis amžius.

Pavyzdys. Tegul amžius yra 21 metai. Atlikime reikalaujamus veiksmus:

$$21 \cdot 2 = 42; \quad 42 + 5 = 47; \quad 47 \cdot 5 = 235.$$

Spėjame amžių: $23 - 2 = 21$.

Įrodymas. Ieškomasis amžius x. Atliekame veiksmus:

$$(2x + 5) \cdot 5 = 10x + 25.$$

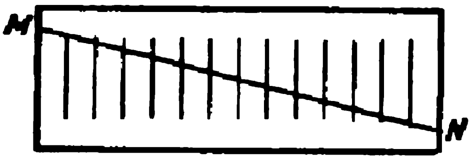
Pertvarkome:

$$10x + 25 = 10x + 20 + 5 = 10(x + 2) + 5.$$

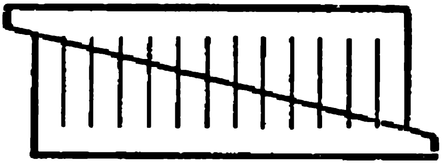
Atmetę 5, gauname skaičių (žr. uždavinio Nr. 302 įrodymą) $x + 2$. Atėmę 2, gauname ieškomąjį amžių x.

304. Geometrinis pokštas (paslaptingas išnykimas)

Nubrėžkite ant stačiakampio kartono gabalėlio 13 vienodų, vienodais atstumais išdėstytų lazdelių, kaip parodyta 185 piešinyje. Dabar perpiaukite stačiakampį pagal pasvirusią tiesę MN, jungiančią viršutinį pačios kairiosios



185 pieš.



186 pieš.

lazdelės galą su apatiniu pačios dešiniosios galu. Perstumkite abi stačiakampio puseles išilgai piūvio linijos, kaip parodyta 186 piešinyje.

Įvyko įdomus reiškinys: vietoj 13 lazdelių liko 12! Kur išnyko viena lazdelė?

VIENUOLIKTASIS SKYRIUS

SKAIČIŲ DALUMAS

Iš visų aritmetikos veiksmų pats aikštingiausias — dalyba. Ji turi ypatingas savybes, galima sakyti, ypatingą «charakterį». Paimkime nors ir nulio vartojimą. Visiems kitiems aritmetikos veiksmams nulis — lygiateisis skaičius. Jį galima ir pridėti, ir atimti; jis gali būti daugiklis daugybos veiksme, tačiau daliklis — niekuomet. Iš nulio iš viso negalima padalyti jokio skaičiaus, jokio algebrinio reiškinio. Tai — svarbi dalybos ypatybė ir, su ja neatidžiai elgiantis, lengva patekti į keblią padėtį; galima, sakysim, «įrodyti» bet kurį aiškiai netikrą teiginį — «paradoksą».

Kaip jūs pažiūrėsite, pavyzdžiui, į tokį teiginį.

Kiekvienas dydis lygus pusei savo dydžio.

«Įrodymas». Tegul a ir b — du lygūs dydžiai: $a = b$. Padauginame abi šios lygybės puses iš a:

$$a^2 = ab.$$

Dabar iš kairės ir dešinės lygybės pusių atimame po b^2. Gautieji skirtumai $a^2 - b^2$ ir $ab - b^2$ taip pat bus lygūs:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Suskaidome daugikliais:

$$(a + b)(a - b) = b(a - b).$$

Dalijame abi lygybės puses iš $a - b$; gauname tokią lygybę:

$$a + b = b.$$

Kadangi $b = a$, tai paskutiniojoje lygybėje b galima pakeisti dydžiu a, tada $a + a = a$, arba $2a = a$. Padaliję iš 2, gauname $a = \frac{a}{2}$, o tai parodo, kad visas skaičius lygus savo pusei (?).

Pažiūrėti, arba, kaip sakoma, «formaliai», viskas teisinga, o iš esmės kažkur pateiktuose skaičiavimuose yra klaida. Jūs, žinoma, buvote atidūs ir pastebėjote, kurioje pertvarkymų vietoje yra klaida.

Dalybos «charakteris» pasireiškia ne tiktai nulio atžvilgiu. Matematika skiria daug dėmesio sveikų skaičių savybėms ir jų veiksmų dėsniams. Taigi, jei apsiribotume vien tik sveikų (teigiamų ir neigiamų) skaičių aibe, tai ir vėl «ožiuotųsi» tiktai vienas veiksmas: dalyba. Ji, kaip jūs žinote, ne visuomet įvykdoma sveikų skaičių srityje. Priimta laikyti, kad sveikas skaičius a dalijasi iš sveiko skaičiaus b, jeigu yra toks sveikas skaičius c, kurio sandauga iš b būtų lygi skaičiui a; jeigu tokio skaičiaus nėra, tai a nesidalija iš b.

Visos tos dalybos ypatybės ir padėjo atsirasti tokioms sąvokoms, kaip pirminiai skaičiai, bendras didžiausias daliklis (B. D. D.), bendras mažiausias kartotinis (B. M. K.), skaičių dalumo požymiai, o laipsniškas skaičių dalumo teorijos vystymas privedė prie gilaus visos skaičių teorijos išplėtimo.

Manau, kad darbas su šio skyriaus uždaviniais tam tikru laipsniu papildys jūsų mokyklines žinias apie skaičių dalumą, o gal būt paskatins jus sistemingai studijuoti ir visą skaičių teoriją.

305. Skaičius ant antkapio

Vienoje egiptiečių piramidėje mokslininkai ant antkapio akmeninės plokštės atrado jeroglifais išgraviruotą skaičių 2 520. Sunku tiksliai pasakyti, už ką tokia garbė šiam skaičiui. Gal būt, už tai, kad jis be liekanos dalijasi iš visų be išimties sveikų skaičių nuo 1 iki 10. Iš tikrųjų, nėra skaičiaus, mažesnio už 2 520, turinčio tokią savybę. Nesunku įsitikinti, kad šis skaičius yra pirmosios dešimties sveikų skaičių bendras mažiausias kartotinis.

306. Naujųjų Metų dovanos

Mūsų organizacijos profesinės sąjungos vietos komitetas nutarė surengti Naujųjų Metų eglutę vaikams. Ruošdami dovanėles, mes saldainius ir sausainius greitai sudėliojome į popierinius maišelius. Tačiau, kai priėjome prie mandarinų, mes susidūrėme su įdomiu sunkumu: iš pradžių norėjome dėti į maišelius po 10 mandarinų (o į kitus maišelius — obuolius) — tada atliko 9 mandarinai; jei būtume dėję po 9 mandarinus, būtų likę 8; pabandėme išdėlioti po 8 mandarinus, liko 7; pradėjome dėlioti po 7, liko 6; įdėjome po 6, liko 5.

— Kas per istorija?! Nejaugi ir toliau taip tęsis? Paėmėme popieriaus, pieštuką ir pradėjome skaičiuoti. Ką jūs galvojate: dalijame mūsų turimų mandarinų skaičių iš 5, lieka 4; dalijame iš 4, lieka 3; dalijame iš 3, lieka 2; dalijame iš 2, lieka 1. Šit kokį nuostabų mandarinų skaičių mes turėjome.

O vis dėlto kiek?

307. Ar gali būti toks skaičius?

Ar gali būti toks skaičius, kurį dalijant iš 3, liekana būtų 1, dalijant iš 4, liekana būtų 2, dalijant iš 5, liekana 3, o dalijant iš 6, liekana būtų 4?

308. Pintinė kiaušinių
(iš senovinio prancūziško uždavinyno)

Moteriškė nešė į turgų pintinę kiaušinių. Praeivis pastūmė moteriškę, pintinė iškrito, kiaušiniai sudužo. Nelaimės kaltininkas, norėdamas atlyginti nuostolius, paklausė:

— Kiek iš viso kiaušinių buvo pintinėje?

— Tiksliai nepamenu,— atsakė moteriškė,— bet žinau, kad, kai aš išimdavau iš pintinės po 2, po 3, po 4, po 5 ar po 6 kiaušinius, pintinėje likdavo vienas kiaušinis, o kai aš išimdavau po 7, pintinėje nieko nelikdavo.

Kiek kiaušinių buvo pintinėje?

309. Triženklis skaičius

Jei iš mano pasirinktojo triženklio skaičiaus atimtume 7, tai jis dalytųsi iš 7, o jei iš jo atimtume 8, tai jis dalytųsi iš 8, jei iš jo atimtume 9, tai jis dalytųsi iš 9. Kokį skaičių aš pasirinkau?

310. Keturi laivai

Uoste stovėjo 4 laivai. 1953 metų vasario 2 dienos vidurdienį jie kartu išplaukė iš uosto. Pirmasis laivas sugrįžta į tą uostą kas 4 savaitės, antrasis — kas 8 savaitės, trečiasis — kas 12 savaičių, o ketvirtasis — kas 16 savaičių. Kada jie pirmą kartą vėl visi kartu susitiks tame uoste?

311. Kasininko klaida

Kreipdamasis į parduotuvės kasininką, pirkėjas tarė:

— Prašau paimti iš manęs už 2 pakelius druskos po 90 kapeikų, už 2 gabalus muilo po 2 rub. 70 kap., už 3 pakelius cukraus ir už 6 dėžutes degtukų, bet pakelio cukraus ir dėžutės degtukų kainos aš nepamenu.

Kasininkas išdavė pirkėjui 29 rb 17 kap. čekį. Pažvelgęs į čekį, pirkėjas grąžino jį kasininkui ir tarė:

— Jūs, be abejo, apskaičiuodamas bendrą sumą, suklydote.

Kasininkas patikrino ir atrado klaidą. Teko atsiprašyti pirkėją ir išduoti jam kitą čekį.

Kokiu būdu pirkėjas rado klaidą?

312. Skaitmeninis rebusas

Aritmetiškai samprotaujant, rasti skaičių t ir skaitmeninę reikšmę raidės a, pakeitusios trūkstamą skaitmenį šioje lygybėje:

$$3(230+t)^2 = 492a04.$$

313. Dalumo iš 11 požymis

Vienas iš svarbiausių uždavinių sprendimo būdų yra šis: duotojo uždavinio sprendimą suvesti į kito, paprastesnio uždavinio sprendimą.

Reikia, sakysim, sužinoti, ar dalijasi tam tikras daugiaženklis skaičius iš kito duotojo skaičiaus. Tam daugeliu atvejų pavyksta išvengti betarpiškos duotojo skaičiaus dalybos ir suvesti duoto uždavinio sprendimą į dalumo nustatymą tam tikro kito, nedaugiaženklio skaičiaus, sudaryto pagal vieną ar kitą taisyklę iš duotojo skaičiaus skaitmenų. Taip ir atsiranda skaičių dalumo požymiai.

Ar pažįstamas jums, pavyzdžiui, toks nesudėtingas skaičiaus dalumo iš 11 požymis?

Jei duotojo skaičiaus skaitmenų, imant k a s a n t r ą, *suma lygi kitų skaitmenų, imant kas antrą, sumai arba tų sumų skirtumas* d a l i j a s i *iš 11, tai ir duotasis skaičius dalijasi iš 11. Jei tas skirtumas nesidalija iš 11, tai ir duotasis skaičius nesidalija iš 11.*

P a v y z d y s. Ar dalijasi 3 528 041 iš 11?

Pritaikome požymį:

$$S_1 = 3 + 2 + 0 + 1 = 6,$$
$$S_2 = 5 + 8 + 4 = 17,$$
$$S_2 - S_1 = 11.$$

$S_2 - S_1$ dalijasi iš 11. Požymis iš anksto nurodo: skaičius 3 528 041 būtinai turi dalytis iš 11. Jei pasistengsite dalybą atlikti betarpiškai, tai įsitikinsite, jog požymis jūsų neapgavo.

Šį dalumo požymį nesunku pagrįsti, jei tik iš pradžių įsidėmėtume, kad skaičiai $10 + 1$, $100 - 1$, $1\,000 + 1$, $10\,000 - 1$, $100\,000 + 1$ ir t. t. dalijasi iš 11.

Pradžioje išnagrinėkime skirtumus: $100 - 1 = 99$, $10\,000 - 1 = 9\,999$ ir t. t.; visi jie parašomi lyginiu skaičium devyniukių ir, vadinasi, dalijasi iš 11; dalijasi iš 11 ir visos nurodyto pavidalo sumos: $10 + 1 = 11$, $1\,000 + 1 = 99 \cdot 10 + 11$, $100\,000 + 1 = 9\,999 \cdot 10 + 11$ ir t. t., nes kiekviena suma susideda iš dviejų dėmenų, kurių kiekvienas dalijasi iš 11.

Grįžkime dabar prie dalumo iš 11 požymio nustatymo. Imkime kurį nors daugiaženklį skaičių, pavyzdžiui 3 516 282, ir suskaidykime jį šiuo būdu:

$$2+8\cdot 10+2\cdot 100+6\cdot 1\,000+1\cdot 10\,000+ \\ +5\cdot 100\,000+3\cdot 1\,000\,000.$$

Visus antruosius dauginamuosius (vienetus su nuliais) perdirbkime taip, kad susidarytų aukščiau išnagrinėtos sumos ir skirtumai: $10+1$, $100-1$ ir t. t. Turime:

$$3\,516\,282=2+8(10+1-1)+2(100-1+1)+ \\ +6(1\,000+1-1)+1(10\,000-1+1)+ \\ +5(100\,000+1-1)+3(1\,000\,000-1+1)= \\ =2+8(10+1)-8+2(100-1)+2+6(1\,000+1)- \\ -6+(10\,000-1)+1+5(100\,000+1)-5+ \\ +3(1\,000\,000-1)+3=(2-8+2-6+1-5+3)+ \\ +[8(10+1)+2(100-1)+6(1\,000+1)+ \\ +(10\,000-1)+5(100\,000+1)+3(1\,000\,000-1)].$$

Visi dėmenys, suskliausti laužtiniais skliaustais, dalijasi iš 11. Vadinasi, nagrinėjamo skaičiaus dalumas iš 11 pilnutinai priklauso nuo dalumo iš 11 skaičiaus, suskliausto pirmuose lenktiniuose skliaustuose: jei jis $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 11, tai ir nagrinėjamasis skaičius $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 11. Tačiau pirmuose skliaustuose parašytas duotojo skaičiaus skaitmenų, imant kas antrą, sumų skirtumas: $(2+2+1+3)-(8+6+5)=-11$. Kadangi šis skirtumas, lygus -11, dalijasi iš 11, tai ir duotasis skaičius dalijasi iš 11.

Jeigu tiriamojo skaičiaus skaitmenų, imant kas antrą, sumų skirtumas nesidalytų iš 11, tai negalėtų iš 11 dalytis ir tiriamasis skaičius. Ir tikrai, išnagrinėtas pavyzdys nurodo būdą, kurio pagalba galima bet kurį sveiką skaičių (N) suskaidyti į du dėmenis (x ir y), $N=x+y$, taip, kad vienas iš jų (x) būtinai dalytųsi iš 11, o antrasis (y) būtų tiriamojo skaičiaus skaitmenų, imant kas antrą, sumų skirtumas.

Aišku, kad jei abu dėmenys x ir y dalijasi iš 11, tai N taip pat dalijasi iš 11; jeigu x dalijasi iš 11, o y nesidalija, tai ir N nesidalija.

Atvirkščiai, jei N ir x dalijasi iš 11, tai ir y turi dalytis iš 11; jeigu N nesidalija iš 11, o x dalijasi, tai y negali dalytis iš 11.

Tuo būdu, norint sužinoti, ar koks nors daugiaženklis skaičius dalijasi iš 11, tenka išspręsti daug lengvesnį klausimą: sužinoti, ar skaičiaus skaitmenų, imant kas antrą, sumų skirtumas dalijasi iš 11.

Išspręskite savarankiškai dar vieną aritmetinį r e b u s ą. Kaip galima greitai surasti trūkstamąjį aštuoniaženkliame skaičiuje 37 a10 201 skaitmenį a ir kuriuo skaičiumi pakeisti raidę x reiškinyje $[11(492+x)]^2$, kad lygybė

$$[11(492+x)]^2 = 37\,a\,10\,201$$

būtų teisinga?

314. Jungtinis dalumo iš 7, 11 ir 13 požymis

Pirminių skaičių, tai yra tokių, kurie dalijasi tik iš 1 ir iš savęs, lentelėje skaičiai 7, 11 ir 13 surašyti greta (žr. pirminių skaičių lentelę 369 puslapyje). Jų sandauga lygi $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1\,001 = 1\,000 + 1$. Kol kas įsidėmėkime, kad $1\,000 + 1$ dalijasi ir iš 7, ir iš 11, ir iš 13. Toliau, jei bet kurį triženklį skaičių padaugintume iš 1 001, tai sandauga būtų užrašoma tokiais pat skaitmenimis, kaip ir dauginamasis, tiktai pakartotais du kartus.

Tegul $\overline{abc}$ — kuris nors triženklis skaičius (a, b ir c — šio skaičiaus skaitmenys). Padauginkime jį iš 1 001:

$$\begin{array}{r} \times\ \overline{abc} \\ 1001 \\ \hline \overline{abc} \\ \overline{abc} \\ \hline \overline{abc\,abc}. \end{array}$$

Vadinasi, visi $\overline{abc\,abc}$ pavidalo skaičiai dalijasi iš 7, iš 11 ir iš 13. Skyrium imant, iš 7, 11 ir 13 dalijasi skaičius 999 999, arba, kitaip, $1\,000\,000 - 1$.

Nurodytas dėsningumas padeda klausimą apie daugiaženklio skaičiaus dalumą iš 7 arba iš 11, arba iš 13 suvesti į klausimą apie tam tikro kito skaičiaus, ne didesnio kaip triženklis, dalumą iš tų skaičių.

Reikia, sakysim, sužinoti, ar dalijasi skaičius 42 623 295 iš 7, 11 ir 13. Duotąjį skaičių iš dešinės į kairę suskaidykime į skiltis po 3 skaitmenis. Kairioji kraštinė skiltis gali ir neturėti trijų skaitmenų. Dabar duotąjį skaičių parašykime tokiu pavidalu:

$$42\,623\,295 = 295 + 623 \cdot 1\,000 + 42 \cdot 1\,000\,000,$$

arba (analogiškai, kaip mes elgėmės, nagrinėdami dalumo iš 11 požymį):

$$\begin{aligned} &42\,623\,295 = \\ &= 295 + 623(1\,000 + 1 - 1) + 42(1\,000\,000 - 1 + 1) = \\ &= (295 - 623 + 42) + [623(1\,000 + 1) + 42(1\,000\,000 - 1)]. \end{aligned}$$

Skaičius, esantis laužtiniuose skliaustuose, dalijasi ir iš 7, ir iš 11, ir iš 13. Vadinasi, tiriamojo skaičiaus dalumas iš 7, 11 ir 13 pilnutinai priklauso nuo skaičiaus, suskliausto pirmuose lenktiniuose skliaustuose, dalumo.

Išnagrinėję kiekvieną tiriamojo skaičiaus skiltį kaip savarankišką skaičių, galime suformuluoti šį jungtinį dalumo iš trijų skaičių: 7, 11 ir 13, požymį:

Jei duotojo skaičiaus skilčių, paimtų kas antra, *sumų skirtumas dalijasi iš 7, arba iš 11, arba iš 13, tai ir duotasis skaičius atitinkamai dalijasi iš 7, arba iš 11, arba iš 13.*

Grįžkime prie skaičiaus 42 623 295. Sužinokime, iš kurio šių skaičių: 7, 11 ar 13 dalijasi duotojo skaičiaus skilčių sumų skirtumas: $(295 + 42) - 623 = -286$. Skaičius -286 dalijasi iš 11 ir iš 13, o iš 7 jis nesidalija. Vadinasi, skaičius 42 623 295 dalijasi iš 11 ir iš 13, tačiau iš 7 nesidalija.

Aišku, kad keturženklio, penkiaženklio ir šešiaženklio skaičių, tai yra skaičių, suskaidomų iš viso tik į 2 skiltis (praktiškai dažniausiai pasitaikantis atvejis), dalumas iš 7, 11 ir 13 nustatomas duotojo skaičiaus skilčių skirtumo dalumu iš 7, 11 ir 13. Taip, pavyzdžiui, lengva nustatyti, kad 29 575 dalijasi iš 7 ir iš 13, tačiau nesidalija iš 11.

Iš tikrųjų, skilčių skirtumas lygus 575 — 29 = 546, o skaičius 546 dalijasi ir iš 7, ir iš 13, bet nesidalija iš 11.

Uždavinys. Nustatydami jungtinį dalumo iš 7, 11 ir 13 požymį, mes operavome suskaidomu į 3 skiltis skaičiumi. Pagrįskite šį požymį skaičiui, suskaidomam iš dešinės kairėn į 4 skiltis po 3 skaitmenis.

315. Dalumo iš 8 požymio suprastinimas

Mokykloje paprastai duodamas toks dalumo iš 8 požymis:

Jei duotojo skaičiaus paskutiniųjų trijų skaitmenų sudaromas skaičius dalijasi iš 8, tai ir visas duotasis skaičius dalijasi iš 8.

Vadinasi, klausimas suvedamas į tam tikro triženklio skaičiaus dalumą iš 8, bet visai nekalbama apie tai, kaip savo ruožtu greitai sužinoti, ar dalijasi tas triženklis skaičius iš 8. Juk triženklio skaičiaus dalumas iš 8 taip pat ne visuomet iš karto matomas, todėl tenka faktiškai atlikti dalybą.

Dalumo iš 4 požymis paprastesnis. Čia reikalaujama, kad iš 4 dalytųsi skaičius, sudarytas tiktai iš dviejų paskutinių tiriamojo skaičiaus skaitmenų.

Savaime iškyla klausimas: ar negalima suprastinti ir dalumo iš 8 požymį? Galima, jei tik papildytume jį specialiu triženklio skaičiaus dalumo iš 8 požymiu.

Iš 8 dalijasi bet kuris triženklis skaičius, iš kurio šimtų ir dešimčių skaitmenų sudarytas dviženklis skaičius, sudėtas su vienetų skaičiaus puse, dalijasi iš 4.

Pavyzdys. Duotasis skaičius 592. Norėdami išspręsti klausimą, ar jis dalijasi iš 8, atskiriame vienetus ir pusę jų skaičiaus pridedame prie skaičiaus iš kitų dviejų skaitmenų (šimtų ir dešimčių). Gauname 59 + 1 = 60. Skaičius 60 dalijasi iš 4, vadinasi, skaičius 592 iš 8 dalijasi.

Įrodykite, kad čia suformuluotas triženklio skaičiaus dalumo iš 8 požymis teisingas, ir suformuluokite suprastintą bet kurio skaičiaus dalumo iš 8 požymį.

1 pastaba. Aišku, kad skaičius, kuris baigiasi nelyginiu skaitmeniu, negali pasidalyti iš 8.

2 pastaba. Dažniausiai požymyje paminėto dviženklio skaičiaus ir duotojo skaičiaus vienetų pusės suma bus taip pat dviženklis skaičius. Suma bus triženklė tiktai skaičiams nuo 984 iki 998, tačiau ir šiais atvejais ji neviršys skaičiaus 103 $(99+4=103)$.

316. Nepaprasta atmintis

Paskelbkite savo draugams, kad jūs žinote visus šešiaženklius ir devyniaženklius skaičius, pasidalijančius iš 37, nors jų yra labai daug.

Efektui sustiprinti pasakykite, kad jūs apsiimate momentaliai prirašyti prie bet kurio iš anksto nurodyto triženklio skaičiaus dar 3 ar net 6 skaitmenis taip, kad gautas šešiaženklis arba devyniaženklis skaičius būtinai pasidalytų iš 37.

Sakykime, jums nurodė skaičių 412. Prie jo iš dešinės ar kairės (nesvarbu) prirašykite 143. Gausite skaičių 143 412 arba 412 143, kurių kiekvienas dalijasi iš 37.

Tam, suprantama, nėra reikalinga fenomenali atmintis. Atmintį jūs galite turėti pačią paprasčiausią, bet reikia žinoti gana paprastą žemiau pateikiamą dalumo iš 37 požymį.

Duotąjį skaičių suskaidome iš dešinės į kairę į skiltis po 3 skaitmenis (paskutinioji skiltis kairėje gali būti nepilna). Laikydami kiekvieną skiltį savarankišku skaičiumi, sudėkime šiuos skaičius. Jei gautoji suma dalijasi iš 37, tai ir duotasis skaičius dalysis iš 37.

Pavyzdžiui, skaičius 153 217 dalijasi iš 37, nes $153+$ $+217=370$ taip pat dalijasi iš 37.

Įrodymas. Tegul N — skaičius, suskaidomas į 2 skiltis. Parašysime jį tokia forma: $N=1\,000a+b$, kur a — skaičius, sudarantis kairiąją skiltį, b — triženklis skaičius, sudarantis dešiniąją duotojo skaičiaus skiltį. Jei N dalijasi iš 37, tai $1\,000a+b=37k$ (k — sveikas teigiamas skaičius). Įrodysime, kad tokiu atveju $a+b$ taip pat dalijasi iš 37.

Tuo tikslu išreikšime b iš pirmos lygybės ir įstatysime į $a+b$. Tada

$$a+b=a+(37k-1\,000a)=37k-999a=37(k-27)$$

dalijasi iš 37.

Atvirkščiai, tegul $a + b$ dalijasi iš 37, tada $a + b = 37k$. Išreikšime iš čia b ir įstatysime į lygybę $N = 1\,000\,a + b$. Gausime:

$$N = 1\,000\,a + 37k - a = 999a + 37k = 37(27 + k),$$

t. y. N dalijasi iš 37.

Skaičiams, suskaidomiems į didesnį kiekį skilčių, samprotavimai analogiški.

Vadinasi, pokšto paslaptis ta, kad reikia mokėti prie jūsų draugų nurodyto triženklio skaičiaus prirašyti vieną (šešiaženkliams skaičiams) arba du (devyniaženkliams skaičiams) tokius triženklius skaičius, kad jų visų suma dalytųsi iš 37.

Kaipgi tai atlikti?

Labai paprastai. Prirašykite, pavyzdžiui, tokius skaičius, kurių suma su nurodytaisiais būtų t r i ž e n k l i s skaičius iš v i e n o d ų skaitmenų: 111 arba 222, arba 333 ir t. t. iki 999, nes bet kuris triženklis skaičius, susidedantis iš vienodų skaitmenų, būtinai dalijasi iš 37.

Jei nurodytas skaičius, sakysim, 341, tai prirašykite 103 (papildinys iki 444) arba 214 (papildinys iki 555) ir t. t. Tokį papildymą atlikti mintyje labai lengva. Tai ir padės jums atlikti pokštą pažadėtu greitumu.

Tuo atveju, kai draugai reikalauja parašyti devyniaženklį skaičių, pasidalijantį iš 37, prirašykite tris skaitmenis bet kokius, tačiau tokius, kad paskutiniai trys skaitmenys sudarytų skaičių, papildantį visą sumą iki kurio nors triženklio skaičiaus iš vienodų skaitmenų.

Pavyzdžiui, prie nurodyto skaičiaus 412 galima prirašyti, sakysim, iš pradžių 101, o paskui 042 kaip kontrolinės sumos papildinį iki 555. Gautas skaičius 412 101 042.

Prisiminkite, kad paįvairinimui skaičius galima prirašyti prie nurodyto skaičiaus iš abiejų pusių.

Jei pats nurodytasis skaičius susideda iš vienodų skaitmenų, pavyzdžiui 333, tai prie jo prirašyti taip pat susidedantį iš vienodų skaitmenų skaičių rizikinga — galima lengvai demaskuotis.

Kad to išvengtumėte, prie skaičiaus, kurį jūs norėjote prirašyti, mintyje pridėkite 37 arba 74, arba atvirkščiai, atimkite iš jo 37 arba 74.

Galima leisti draugams nurodyti dviženklį arba vienaženklį skaičių. Tokiu atveju pradžioje prie jo prirašykite bet kurį trečią arba antrą ir trečią skaitmenis, o toliau elkitės, kaip nupasakota.

Uždavinys. Įrodykite skaičiui, suskaidomam į 3 skiltis, dalumo iš 37 požymį.

317. Jungtinis dalumo iš 3, 7 ir 19 požymis

Pirminių skaičių 3, 7 ir 19 sandauga lygi 399. Pastebėta įdomi savybė:

Jei skaičius $100a+b$ (kur b — dviženklis skaičius, a — bet kuris sveikas teigiamas skaičius) dalijasi iš 399 arba iš kurio nors jo daugiklių, tai kartu su juo iš to paties skaičiaus dalijasi ir $a+4b$.

Įrodykite tą teiginį.

Suformuluokite ir įrodykite atvirkštinę teoremą.

Remdamiesi tuo, ką įrodysite, nustatykite jungtinį skaičių dalumo iš 3, 7 ir 19 požymį.

318. Dvinario dalumas

Keletas parengtinių pastabų.

1) Daugianariu vadinamas algebrinis reiškinys tokio pavidalo:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kur n — sveikas teigiamas skaičius; koeficientai $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — bet kurie tikrieji skaičiai; raide x taip pat pažymėtas bet kuris realusis skaičius.

2) Jei vienas nurodyto pavidalo daugianaris (p) lygus dviejų kitų (m_1 ir m_2) sandaugai ($p = m_1 m_2$), tai mes sakome, kad daugianaris p d a l i j a s i iš daugianario m_1 (arba m_2), o dalmuo yra daugianaris m_2 (arba m_1).

Pavyzdžiui, $x^2 - 9$ dalijasi iš $3x+9$, o dalmuo yra $\frac{1}{3}x - 1$. Iš tikrųjų, $(3x+9)\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = x^2 - 9$.

Tarp kitko matome, kad dalis dalmens koeficientų — trupmeniniai skaičiai, kai tuo tarpu visi dalijamojo ir daliklio koeficientai — sveiki.

3) Iš fakto, kad vienas daugianaris su sveikais koeficientais dalijasi iš kito daugianario taip pat su sveikais koeficientais, dar **n e s e k a**, kad dalijasi skaičiai, kuriais pavirsta dalijamasis ir daliklis, pakeitus x bet kuriais sveikais skaičiais, jeigu, suprantama, dalumas yra nagrinėjamas sveikų skaičių aritmetikos požiūriu.

Pavyzdžiui, kaip matėme aukščiau, $(x^2 - 9):(3x + 9) = \frac{1}{3}x - 1$. Kai $x = 6$, dalijamasis pavirsta skaičiumi $6^2 - 9 = 27$, daliklis — skaičiumi $3 \cdot 6 + 9 = 27$; dalijamasis čia dalijasi iš daliklio: $27 : 27 = 1$. Tačiau, kai $x = 7$, dalijamasis pavirsta skaičiumi $49 - 9 = 40$, daliklis — skaičiumi $3 \cdot 7 + 9 = 30$; dabar dalijamasis, sveikų skaičių aritmetikos požiūriu, nesidalija iš daliklio.

4) Jeigu visi daugianarių — dalijamojo, daliklio ir dalmens — koeficientai yra sveiki skaičiai, tai skaičius, kuriuo pavirsta daugianaris-dalijamasis, būtinai dalijasi iš skaičiaus, kuriuo pavirsta daugianaris-daliklis, pakeitus x-ą bet kuriuo sveiku skaičiumi, išskyrus tuos, kurie paverčia daliklį nuliu.

Pavyzdžiui,

$$(2x^3 - 3x^2 - 8x + 12):(x^2 - 4) = 2x - 3.$$

Visi koeficientai sveiki, vadinasi, dalysis ir skaitinės dalijamojo ir daliklio reikšmės, pakeitus x-ą bet kuriuo sveiku skaičiumi, išskyrus $x = \pm 2$, nes tada daliklis pavirsta nuliu ir dalyba nebeįmanoma. Pavyzdžiui, kai $x = 3$, turime:

dalijamojo reikšmė: $2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 12 = 15$,
daliklio reikšmė: $3^2 - 4 = 5$.

Įsitikiname, kad pirmoji reikšmė dalijasi iš antrosios: $15 : 5 = 3$. Tam pačiam skaičiui 3 lygi ir dalmens reikšmė: $2 \cdot 3 - 3 = 3$.

Kai kuriems uždaviniams spręsti, ypač skaičių dalumo požymiams įrodinėti, naudinga žinoti, kada dviejų skaičių laipsnių suma ir skirtumas ($x^m + a^m$ ir $x^m - a^m$, kur m — sveikas teigiamas skaičius) dalijasi iš jų pagrindų sumos ir skirtumo ($x + a$ ir $x - a$).

Į šį klausimą atsakymas duodamas mokykliniame algebros kurse (paprastai 10-je klasėje). Tačiau ir skaitytojui, dar nepasiekusiam savo išsimokslinimu 10-tos klasės, nebus labai sunku suprasti iškelto klausimo sprendimą.

Algebriniai reiškiniai $x^m + a^m$ ir $x^m - a^m$ — tai atskiri daugianario

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (*)$$

pavidalai (čia daugianario visos raidės suprantamos tiktai kaip sveiki skaičiai, įskaitant ir nulį).

Jei, pavyzdžiui, $m = 4$, $a_m = 1$, $a_{m-1} = a_{m-2} = \ldots = a_1 = 0$, $a_0 = 16$, tai gaunamas toks atskiras daugianario pavidalas: $x^4 + 16$, arba $x^4 + 2^4$.

Dabar pamėginkime padalyti $x^4 + 2^4$ iš $x + 2$:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + 16 & x + 2 \\
-\;x^4 + 2x^3 & \overline{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} \\
\hline
\quad -2x^3 & \\
-\quad -2x^3 - 4x^2 & \\
\hline
\qquad\quad 4x^2 & \\
-\qquad\quad 4x^2 + 8x & \\
\hline
\qquad\qquad -8x + 16 & \\
-\qquad\qquad -8x - 16 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 32 \text{ (liekana)} &
\end{array}$$

$x^4 + 2^4$ iš $x + 2$ nesidalija. Matome, kad liekana neturi x, o yra tam tikras skaičius.

Lengva suprasti, kad ne tiktai šiame pavyzdyje, bet ir visais atvejais, dalijant daugianarį iš pavidalo $x + a$ dvinario, tai yra iš dvinario, į kurį x įeina ne aukštesniame kaip pirmame laipsnyje, liekana bus tam tikras skaičius (arba liekanos visai nebus).

Kad dalybą galima būtų atlikti be liekanos, reikia dalijamąjį sumažinti liekanos dydžiu. Todėl visada teisingas toks teiginys: dalijamasis minus liekana lygu daliklio ir dalmens sandaugai. Pavyzdžiui,

$$(x^4 + 16) - 32 = (x + 2) \cdot (x^3 - 2x^2 + 4x - 8).$$

Betarpiškai patikrindami, įsitikinkite, kad ši algebrinių reiškinių lygybė, pakeitus raidę x bet kuriuo skaičiumi, pavirsta skaičių lygybe. Lygybė, turinti tokią ypatybę, vadinama t a p a t y b e.

Dabar sakykime, kad jūs imate bet kokį (*) pavidalo daugianarį, dalijate jį iš $x+a$ pavidalo dvinario ir sudarote lygybę

$$A=(x-a)B+C,$$

kur raide A, kad būtų trumpiau, aš pažymėjau daugianarį-dalijamąjį, raide B — dalmenį ir raide C — liekaną.

Kyla klausimas, ar visuomet lygybė

$$A=(x-a)B+C \qquad (**)$$

bus tapatybė.

A t s a k y m a s. Visuomet.

To teiginio įrodymas bendru pavidalu griozdiškas, tačiau bet kuris pavyzdys gali patvirtinti, kad jis teisingas.

Tokios rūšies tapatybė (**) įdomi tuo, kad jos pagalba galima, n e a t l i e k a n t dalybos, sužinoti liekaną. Pavyzdžiui, aš pranešiau jums tokius duomenis: dalijamasis x^4+1, daliklis $x-1$, dalmuo x^3+x^2+x+1. Koks skaičius C yra liekana?

S p r e n d i m a s. Sudarome lygybę

$$x^4+1=(x-1)\ (x^3+x^2+x+1)+C.$$

Kadangi ji turi būti tapatybė, tai įstatysime, pavyzdžiui, $x=1$. Tada $1+1=0+C$. Iš čia $C=2$. Kokia bebūtų x reikšmė, C reikšmė bus ta pati. Tegul dar, pavyzdžiui, $x=2$. Tada $16+1=(2-1)\ (8+4+2+1)+C$, arba $17=15+C$. Iš čia vėl $C=2$.

Taigi, jokios kitokios liekanos, kaip tik $C=2$, ir būti negali. Patikrinkite dalydami.

Dar įdomiau. Galima nežinoti ne tik liekanos, bet ir dalmens, o vis tik, neatliekant dalybos, nustatyti liekaną. Tegul, pavyzdžiui, dalijamasis x^4-1, o daliklis $x+1$. Kaip, neatliekant dalybos, sužinoti liekaną?

Pažymėkime daugianarį, kuris yra dalmuo, raide B, o liekaną, kaip ir anksčiau,— raide C. Tada

$$x^4-1=(x+1)B+C.$$

Žinodami, kad liekana C, pakeitus x bet kuriuo skaičiumi, įgauna tą pačią, tikrąją reikšmę, įstatykime $x = -1$. Ta x reikšmė tuo patogi, kad tuo atveju nereikia apskaičiuoti dalmens B reikšmės, nes, kada $x = -1$, reiškinys $(x+1)B$ pavirsta nuliu (dėka pirmojo dauginamojo).

Turime: $(-1)^4 - 1 = 0 + C$, arba $1 - 1 = C$. Iš čia $C = 0$. Gavome, kad liekana lygi nuliui. Tai reiškia, kad $x^4 - 1$ dalijasi iš $x + 1$ be liekanos. Patikrinkite dalydami!

Dabar galima išspręsti ir bendresnį uždavinį.

Kada dvinaris $x^m + 1$ dalijasi iš $x + 1$ (m — sveikas teigiamas skaičius)?

Sprendimas. Tegul dalmuo B, o liekana C. Turime:

$$x^m + 1 = (x+1)B + C.$$

Sakykim, $x = -1$, tada $(-1)^m + 1 = C$. Aišku, jei m — lyginis ($m = 2n$), tai $C = 2$; jeigu m — nelyginis ($m = 2n + 1$), tai $C = 0$.

Vadinasi, jei m — lyginis ($m = 2n$), tai $x^m + 1$, arba $x^{2n} + 1$, nesidalija iš $x + 1$, jeigu m — nelyginis ($m = 2n + 1$), tai $x^m + 1$, arba $x^{2n+1} + 1$, dalijasi iš $x + 1$. Dalmuo susideda, kaip nesunku įsitikinti, iš x mažėjančių laipsnių su pakaitomis einančiais ženklais $+$, $-$; taigi, turime šią bendrą formulę:

$$x^{2n+1} + 1 = (x+1)(x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \ldots - x + 1).$$

Dvinaris $x^m - 1$ dalijasi iš $x - 1$, kai m — bet kuris sveikas teigiamas skaičius, o iš $x + 1$ — tiktai kai m lyginis ($m = 2n$).

Įsitikinkite tuo patys.

Norėdami sužinoti liekaną (C), kuri gaunama dalijant dvinarį $x^m + a^m$ iš $x + a$, turime tapatybėje $x^m + a^m = (x+a)B + C$ įstatyti $x = -a$.

Taikant atitinkamus samprotavimus, nesunku prieiti prie šių išvadų:

$x^{2n}+a^{2n}$	nesidalija nei iš $x+a$, nei iš $x-a$;	(***)
$x^{2n+1}+a^{2n+1}$	dalijasi iš $x+a$, bet nesidalija iš $x-a$;	
$x^{2n}-a^{2n}$	dalijasi ir iš $x+a$, ir iš $x-a$;	
$x^{2n+1}-a^{2n+1}$	nesidalija iš $x+a$, bet dalijasi iš $x-a$.	

Primenu, kad tuo atveju, kai $x^m \pm a^m$ pasidalija iš $x+a$ arba iš $x-a$, dalijasi ir sveiki skaičiai, kuriais pavirsta dalijamasis ir daliklis, pakeitus raides a ir x sveikais skaičiais (žr. 255 psl.).

Uždavinys. Neapskaičiuodami reiškinio $11^{10}-1$, įrodykite, kad jis dalijasi iš 100.

319. Sena ir nauja apie dalumą iš 7

Kažkodėl skaičius 7 buvo liaudies labai pamėgtas ir įėjo į jos dainas ir priežodžius:

Septynis kartus atmatuok, aštuntą kartą kirpk.
Septyni kaimai, o arkliukas vienas.
Pas šeimininkę septyni penktadieniai savaitėje.
Vienas prie plūgo — septyni prie bliūdo.
Septynios auklės — vaikas be galvos.
Turėjo uošvelė septynetą žentelių...

Skaičius 7 turtingas ne tiktai priežodžiais, bet ir įvairiais dalumo požymiais. Du dalumo iš 7 požymius (jungtinius su kitais skaičiais) jūs jau žinote. Yra taip pat keletas individualių dalumo iš 7 požymių.

Pasirinkite bet kurį požymį, kuris jums atrodys pats įdomiausias, iš žemiau nurodytųjų.

Pirmasis dalumo iš 7 požymis. Tyrimui imkime skaičių 5 236. Šį skaičių parašykime tokiu pavidalu: $10^3 \cdot 5 + 10^2 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6$ (vadinamoji «sisteminė» skaičiaus užrašymo forma), ir visur pagrindą 10 pakeiskime pagrindu 3 *:

$$3^3 \cdot 5 + 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 6 = 168.$$

* Kitaip tariant, perskaitykime skaičių taip, lyg jis būtų parašytas ne dešimtainėje, o trejetainėje sistemoje, nepaisydami to, kad skaitmenų, skirtingų nuo 0,1 ir 2 trejetainėje sistemoje aplamai neturėtų būti.

Jei gautasis skaičius $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7, tai ir duotasis skaičius $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7.

Kadangi 168 dalijasi iš 7, tai ir 5 236 dalijasi iš 7.

Įrodymas. Tegul $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots a_2, a_1, a_0$ yra m-ženklio skaičiaus N iš eilės einančių skilčių skaitmenys, tada

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2a_2 + 10a_1 + a_0,$$

$$P = 3^{m-1}a_{m-1} + 3^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 3^2 a_2 + 3a_1 + a_0.$$

Iš pirmojo reiškinio atimkime antrąjį:

$$N - P = (10^{m-1} - 3^{m-1})\, a_{m-1} + (10^{m-2} - 3^{m-2})a_{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + (10^2 - 3^2)a_2 + (10 - 3)a_1.$$

Remdamiesi formulėmis (***) ir 4-ta pastaba (255 psl.), galime tvirtinti, kad visi skliaustuose esantieji dvinariai dalijasi iš $10 - 3 = 7$. Vadinasi, jei atėminys P $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7, tai ir turinys N $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7, o taip pat, jei turinys N $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7, tai ir atėminys P $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7.

Dalumo iš 7 pirmojo požymio variantas. Padauginkite pirmąjį iš kairės tiriamojo skaičiaus skaitmenį iš 3 ir pridėkite šalia stovintį skaitmenį; rezultatą padauginkite iš 3 ir pridėkite šalia stovintį skaitmenį ir t. t. iki paskutinio skaitmens. Suprastinimui po kiekvieno veiksmo leidžiama iš rezultato atimti 7 arba skaičių, dalų septyniems.

Jei galutinis rezultatas $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7, tai ir duotasis skaičius $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7.

Pavyzdys. Sužinokime, ar skaičius 48 916 dalijasi iš 7. Padauginame pirmąjį iš kairės skaitmenį iš 3:

$$4 \times 3 = 12.$$

Tolesniems skaičiavimams skaičių 12 galima pakeisti skaičiumi 5, kuris gaunamas atėmus iš 12 septynis. Pakeisdami skaičių a skaičiumi b, kuris skiriasi nuo a septyniais arba skaičiumi, daliu septyniems, tarp jų rašysime ženklą $\equiv$ Pirmąjį veiksmą užrašysime taip: $4 \times 3 = 12 \equiv 5$. Po to pridedame prie 5 antrąjį skaitmenį 8 ir vėl darome atitinkamą pakeitimą: $5 + 8 = 13 \equiv 6$. Toliau:

$$6 \times 3 = 18 \equiv 4, \quad 4 + 9 = 13 \equiv 6, \quad 6 \times 3 = 18 \equiv 4,$$
$$4 + 1 = 5, \quad 5 \times 3 = 15 \equiv 1, \quad 1 + 6 = 7.$$

Galutinis rezultatas 7. Vadinasi, skaičius 48 916 dalijasi iš 7.

Ši taisyklė yra pranaši tuo, kad ji lengvai panaudojama mintiniam skaičiavimui. Dabar išsiaiškinkite jos įrodymą.

Įrodymas. Tegul

$$N = 10^{m-1}a_{m-1} + 10^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0.$$

Elgdamiesi pagal taisyklę, gauname iš eilės:

$$3a_{m-1} + a_{m-2},$$
$$3^2 a_{m-1} + 3a_{m-2} + a_{m-3},$$
$$3^3 a_{m-1} + 3^2 a_{m-2} + 3a_{m-3} + a_{m-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P = 3^{m-1}a_{m-1} + 3^{m-2}a_{m-2} + \ldots + 3a_1 + a_0.$$

Randame skaičių N ir P skirtumą:

$$N - P = a_{m-1}(10^{m-1} - 3^{m-1}) + $$
$$+ a_{m-2}(10^{m-2} - 3^{m-2}) + \ldots + a_1(10 - 3).$$

Kadangi m — sveikas teigiamas skaičius (skaitmenų skaičius), tai visi skliaustuose esantieji binomai dalijasi iš $10 - 3 = 7$ (žr. formules (***) ir pastabą Nr. 4, 255 puslapyje). Vadinasi, skaičiaus P dalumas iš 7 susijęs su skaičiaus N dalumu iš 7.

Pastaba. Įdomu, kad galutinis rezultatas, sumažintas 7 ar 14, parodo duotojo skaičiaus dalybos iš 7 liekaną. Patikrinkite!

Antrasis dalumo iš 7 požymis. Naudojantis šiuo požymiu, reikia elgtis visiškai taip pat, kaip ir anksčiau, tik su

tuo skirtumu, kad daugybą reikia pradėti ne nuo kairiojo kraštinio duotojo skaičiaus skaitmens, o nuo dešiniojo kraštinio ir dauginti ne iš 3, o iš 5.

Pavyzdys. Ar dalijasi skaičius 37 184 iš 7? $4\times 2=20\equiv 6$, $6+8=14\equiv 0$, $0\cdot 5=0$, $0+1=1$, $1\times 5=5$; skaitmens 7 galima nepridėti; $5\times 5=25\equiv 4$, $4+3=7\equiv 0$. Skaičius 37 184 dalijasi iš 7.

Įrodymas. Tegul

$$N=10^{m-1}a_{m-1}+10^{m-2}a_{m-2}+\ldots+10^2a_2+10a_1+a_0.$$

Elgdamiesi pagal nurodytą požymį, gauname iš eilės:

$$\begin{aligned}&5a_0+a_1,\\&5^2a_0+5a_1+a_2,\\&5^3a_0+5^2a_1+5a_2+a_3,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&P=5^{m-1}a_0+5^{m-2}a_1+\ldots+5a_{m-2}+a_{m-1}.\end{aligned}$$

Pastarosios lygybės abi puses padauginkime iš 10^{m-1} ir iš gautojo rezultato atimkime N:

$$\begin{aligned}10^{m-1}P&=50^{m-1}a_0+10\cdot 50^{m-2}a_1+\ldots+10^{m-2}\cdot 50a_{m-2}+\\&\quad+10^{m-1}a_{m-1},\\10^{m-1}P-N&=a_0(50^{m-1}-1)+10a_1(50^{m-2}-1)+\ldots+\\&\quad+10^{m-2}a_{m-2}(50-1).\end{aligned}$$

Visi skliaustuose esantieji dvinariai dalijasi iš $50-1=49$, taigi, ir iš 7, tačiau 10^{m-1} nesidalija iš 7. Vadinasi, skaičiaus N dalumas iš 7 susijęs su skaičiaus P dalumu iš 7.

Trečiasis dalumo iš 7 požymis. Šį požymį sunkiau panaudoti mintinai, tačiau jis taip pat labai įdomus.

Padvigubinkite paskutinįjį skaitmenį ir atimkite antrąjį iš dešinės, padvigubinkite rezultatą ir pridėkite trečiąjį ir t. t., kaitaliodami atimtį su sudėtimi bei kiekvieną rezultatą, kur galima, sumažindami septyniais arba skaičiumi, daliu 7. Jei galutinis rezultatas $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7, tai ir tiriamasis skaičius $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 7.

Patikrinkite šį požymį skaitiniais pavyzdžiais, o kas panorės, tas pats suras ir įrodymą. Tiesa, bendro pavidalo skaičiams tai atlikti sunkėliau, todėl atlikite jį bent keturženkliams ar penkiaženkliams skaičiams.

Trijų tolesnių, gana įdomių teoremų įrodymus jūs rasite sprendimuose, tačiau pirmiau patys pamėginkite jas įrodyti savarankiškai.

1) Jei kuris nors dviženklis skaičius dalijasi iš 7, tai iš 7 dalijasi ir apsuktas skaičius, padidintas duotojo skaičiaus dešimčių skaitmeniu.

Pavyzdžiui, 14 dalijasi iš 7, vadinasi, iš 7 dalijasi ir skaičius $41 + 1$.

2) Jei kuris nors triženklis skaičius dalijasi iš 7, tai iš 7 dalijasi ir apsuktas skaičius, sumažintas duotojo skaičiaus vienetų ir šimtų skaitmenų skirtumu.

1 pavyzdys. Skaičius 126 dalijasi iš 7. Vadinasi, iš 7 dalijasi ir $621 - (6 - 1)$, tai yra 616.

2 pavyzdys. Skaičius 693 dalijasi iš 7. Vadinasi, iš 7 dalijasi ir $396 - (3 - 6)$, tai yra 399.

3) Jei triženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 7, tai jis iš 7 dalijasi tiktai tuo atveju, jei vienetų ir dešimčių skaitmenys vienodi.

Atvirkščiai, jei triženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 7 ir dešimčių bei vienetų skaitmenys vienodi, tai toks skaičius dalijasi iš 7.

320. Požymio pritaikymas kitiems skaičiams

Aukščiau išdėstyti trys skaičių dalumo iš 7 požymiai pagal savo metodą panašūs į žinomas skaičių dalumo iš 3 ir iš 9 sąlygas. Ten ir čia iš duotojo skaičiaus N skaitmenų paprastų aritmetinių veiksmų pagalba sudaromas tam tikras naujas skaičius P, nuo kurio dalumo iš duotojo daliklio priklauso ir duotojo skaičiaus dalumas. Skaičius P kiekvieną kartą sudaromas taip, kad skirtumas $N - P$ (arba gali būti ir suma $N + P$) dalytųsi iš duotojo daliklio. Metodo pagrindas yra dvinarių $a^n + b^n$ dalumas iš $a + b$, kai n nelyginis, ir $a^n - b^n$ iš $a + b$, kai n lyginis.

Pritaikant tą patį samprotavimų metodą, galima įrodyti, kad yra teisingas ir toks gana įdomus dalumo iš 13, 17 ir 19 požymis.

Norint patikrinti duotojo skaičiaus dalumą iš 13, 17 arba iš 19, reikia padauginti atitinkamai iš 3, 7 arba iš 9 tiriamojo skaičiaus kairįjį kraštinį skaitmenį ir atimti toliau esantį skaitmenį; rezultatą vėl padauginti atitinkamai iš 3, 7 arba 9 ir pridėti toliau esantį skaitmenį ir t. t., po kiekvieno padauginimo kaitaliojant paskutinių skaitmenų pridėjimą su atėmimu. Po kiekvieno veiksmo rezultatą galima sumažinti arba padidinti atitinkamu skaičiumi 13, 17, 19 arba jam daliu.

Jei galutinis rezultatas $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš $\left\{\begin{matrix}13\\17\\19\end{matrix}\right.$, tai $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ ir duotasis skaičius.

1 pavyzdys. Ar skaičius 2 075 427 dalijasi iš 19? Pritaikome taisyklę:

$$2\times 9 = 18 \equiv -1$$

(jei nenorime įvesti veiksmų su neigiamais skaičiais, tai galima palikti 18, iš jo neatimant 19);

$$-1-0=-1,\quad -1\times 9=-9,\quad -9+7=-2,$$
$$-2\times 9=-18\equiv 1;$$
$$1-5=-4,\quad -4\times 9=-36\equiv 2,\quad 2+4=6,$$
$$6\times 9=54\equiv 16;$$
$$16-2=14\equiv -5,\ -5\times 9=-45\equiv 12,$$
$$12+7=19\equiv 0.$$

Dalijasi.

2 pavyzdys. Ar skaičius 81 452 dalijasi iš 13? Pritaikome taisyklę:

$$8\times 3=24\equiv -2,\qquad -2-1=-3;$$
$$-3\times 3=-9,\qquad -9+4=-5;$$
$$-5\times 3=-15\equiv -2,\qquad -2-5\equiv -7\equiv 6;$$
$$6\times 3=18\equiv 5,\qquad 5+2\equiv 7.$$

Nesidalija. Liekana 7.

Šio požymio įrodymas vienatipis su aukščiau išdėstytu dalumo iš 7 požymių įrodymu.

321. Apibendrintas dalumo požymis

Mintis apie skaičiaus suskaidymą į skiltis, vėliau jas sudedant, tikslu nustatyti duotojo skaičiaus dalumą pasirodė labai naši ir privedė prie vieningo daugiaženklių skaičių dalumo iš gana plačios grupės pirminių skaičių požymio. Viena iš «laimingųjų» daliklių grupių yra visi sveiki dalikliai p skaičiaus $d = 10^n + 1$, kur $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ (kai n reikšmės didesnės, požymis neturi praktinės reikšmės).

Kai $n = 1$, $d = 11$; $p = 11$,
„ $n = 2$, $d = 101$; $p = 101$,
„ $n = 3$, $d = 1\,001$; $p = 7, 11$ ir 13,
„ $n = 4$, $d = 10\,001$; $p = 73$ ir 137.

Norėdami patikrinti kurio nors skaičiaus dalumą iš bet kurio tų skaičių p, turime:

1) duotąjį skaičių iš dešinės kairėn (nuo vienetų) suskaidyti į skiltis po n skaitmenų (kiekvieną p atitinka savo n; kairioji kraštutinė skiltis skaitmenų gali turėti mažiau už n);

2) sudėti skiltis kas antrą, pradedant dešiniąja kraštutine;

3) sudėti likusias skiltis;

4) iš didesnės sumos atimti mažesniąją.

Jei rezultatas $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš p, tai $\dfrac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ ir duotasis skaičius.

Pavyzdžiui, tikrindami skaičiaus dalumą iš 11 ($p = 11$), skaičių suskaidome į skiltis po vieną skaitmenį ($n = 1$). Toliau elgdamiesi, kaip nurodyta, prieiname prie žinomo dalumo iš 11 požymio (247 psl.). Norėdami patikrinti skaičiaus dalumą iš 7, 11 ar 13 ($p = 7, 11, 13$), jį suskaidome į skiltis po 3 skaitmenis ($n = 3$). Norėdami patikrinti skaičiaus dalumą iš 73 ir 137, jį suskaidome į skiltis po 4 skaitmenis ($n = 4$).

Pavyzdžiui, išaiškinsime, ar penkiolikaženklis skaičius 837 362 172 504 831 dalijasi iš 73 ir iš 137 ($p = 73, 137, n = 4$).

Suskaidome skaičių į skiltis: 837 | 3621 | 7250 | 4831.

Sudedame skiltis kas antrą:

$$\begin{array}{r} 4\,831 \\ +\;3\,621 \\ \hline 8\,452 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,250 \\ +\;837 \\ \hline 8\,087 \end{array}$$

Iš didesnės sumos atimame mažesnę:

$$8\,452 - 8\,087 = 365.$$

Matome, kad 365 dalijasi iš 73, bet nesidalija iš 137; tą patį galima pasakyti ir apie duotąjį skaičių.

Antrą «laimingųjų» daliklių grupę sudaro visi sveiki skaičiaus $d = 10^n - 1$, kur $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, daugikliai p. Nelyginėmis n reikšmėmis apsiribojame todėl, kad, kai n lyginis ($n = 2m$), reiškinys $10^{2m} - 1$ suskaidomas į daugiklius kaip kvadratų skirtumas, o $10^m + 1$ pavidalo daliklius mes ką tik išnagrinėjome.

Skaičius $d = 10^n - 1$ duoda šiuos daliklius:

kai $n = 1$, $d = 9$, $p = 3$,
„ $n = 3$, $d = 999$, $p = 37$,
„ $n = 5$, $d = 99\,999$, $p = 41, 271$, ir t. t.

Norėdami patikrinti kurio nors skaičiaus dalumą iš bet kurio šių skaičių p, turime:

1) duotąjį skaičių suskaidyti iš dešinės į kairę (nuo vienetų) į skiltis po n skaitmenų (kiekvieną p atitinka savo n; kairioji kraštutinė skiltis skaitmenų gali turėti mažiau už n);

2) sudėti visas skiltis.

Jei gautasis rezultatas $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš p, tai $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ ir duotasis skaičius.

Prabėgom pastebėsime, kad skaičius, sudarytas iš n vienetukų (pradedant nuo $n = 3$), taip pat dalijasi iš atitinkamo p. Antai, 111 dalijasi iš 37; 11 111 dalijasi iš 41 ir iš 271.

322. Dalumo kuriozas

Baigdamas skyrių, noriu jums pateikti keturis nuostabius dešimtženklius skaičius:

2 438 195 760	4 753 869 120
3 785 942 160	4 876 391 520

Į kiekvieną jų įeina visi skaitmenys nuo 0 iki 9, tačiau kiekvienas skaitmuo tiktai po vieną kartą, ir kiekvienas iš tų skaičių dalijasi iš 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ir 18.

DVYLIKTASIS SKYRIUS

KRYŽIASUMIAI IR MAGIŠKI KVADRATAI

A. KRYŽIASUMIAI

Imkime visus sveikus skaičius nuo 1 iki 9 ir pamėginkime suskirstyti juos į 2 eilutes taip, kad kiekvienoje eilutėje skaičių sumos tarpusavy būtų lygios.

Pažiūrėkime, ar galimas toks nurodytų skaičių paskirstymas į 2 atskiras eilutes?

Visų sveikų skaičių nuo 1 iki 9 suma lygi 45. Jei kiekvienas iš tų skaičių įeis t i k t a i į vieną iš dviejų eilučių, tai kiekvienos atskiros eilutės skaičių suma, pagal sąlygą, turi sudaryti visų duotųjų skaičių sumos p u s ę. Tačiau 45 negalima suskaidyti į du lygius sveikus skaičius, vadinasi, visų sveikų skaičių nuo 1 iki 9 paskirstymas į dvi a t s k i r a s eilutes su lygiomis sumomis neįmanomas. Tačiau užsibrėžtą tikslą galima pasiekti, jeigu skaičius paskirstytume į dvi s u s i k e r t a n č i a s eilutes, pavyzdžiui, taip:

```
    5
    9
3 7 1 8 4 | 23 — suma
    6
    2
    —
    23 — suma
```

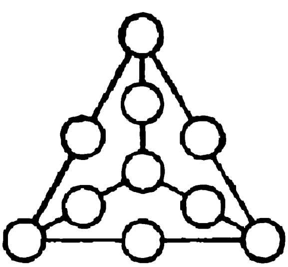
Sudedant vienetas įeina į vienos ir kitos eilutės skaičių sumą.

Susikertančias skaičių eilutes su vienodomis sumomis vadinsime *kryžiasumiais* (analogiškai kryžiažodžiams). Skaičių išdėstymo kryptys nurodomos iš anksto, dažniausiai išilgai kurios nors simetrinės figūros linijų; skaičiai, patalpinti dviejų ar kelių linijų susikirtimų taškuose, įtraukiami į skaičių sumą išilgai kiekvienos tų linijų.

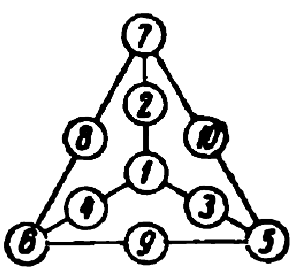
Išspręskite čia pateiktus uždavinius apie kryžiasumių sudarymą, o paskui sugalvokite jų patys. Be to, stenkitės skaičių eilutes išdėstyti simetriškai. Atminkite, kad «kryžiasumių» uždaviniai paprastai turi ne po vieną sprendinį.

323. Įdomios grupuotės

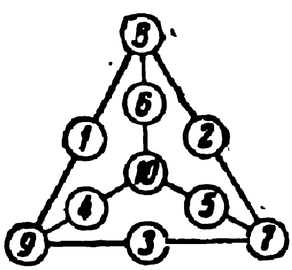
Dešimtyje skritulėlių, išdėstytų išilgai lygiakraščio trikampio kraštinių ir išilgai jo spindulių (187 pieš.), galima sveikus skaičius nuo 1 iki 10 surašyti taip, kad skaičių,



187 pieš.



188 pieš.



189 pieš.

esančių k i e k v i e n o iš trijų mažųjų trikampių kraštinėse ir kampuose, suma būtų lygi 28 (188 pieš.). Skaičius 1, patalpintas centriniame skritulėlyje, įeina į kiekvieną tų trijų sumų: $1+2+7+8+6+4=1+4+6+9+5+3=1+3+5+10+7+2=28$.

Tuos pačius 10 skaičių galima ir kitaip paskirstyti į trikampio skritulėlius, pavyzdžiui, kaip 189 piešinyje. Dabar skaičių, esančių mažųjų trikampių kraštinėse ir kampuose, suma k i e k v i e n a m trikampiui lygi 38:

$$10+6+8+1+9+4=10+4+9+3+7+5=$$
$$=10+5+7+2+8+6=38.$$

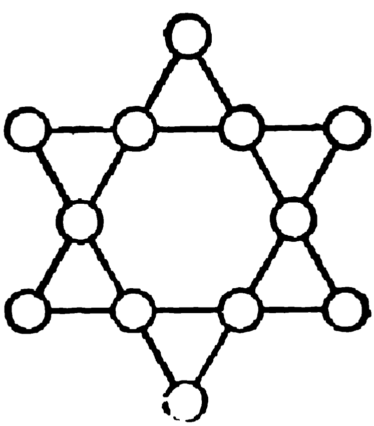
Tačiau įdomiausia tai, kad iš tų pačių dešimties sveikų skaičių galima sudaryti vis naujas ir naujas jų grupuotes, tokias, kad kiekviename mažajame trikampėlyje sumos būtų lygios ir 29 vienetams, ir 30 vienetų, ir 31, 32, 33, 34, 35, 36 bei 37 vienetams!

Kaip reikia kiekvienu iš tų devynių atvejų paskirstyti duotuosius skaičius į trikampio skritulėlius?

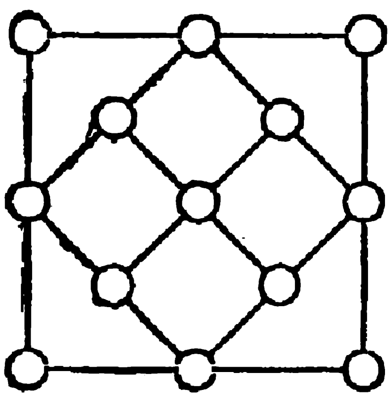
Užuot užrašinėję skaičius ant skritulėlių, o paskui juos trynę, paruoškite 10 bet kokios formos popieriukų, užrašykite ant jų skaičius ir perkeldinėkite juos iš skritulėlio į skritulėlį, kol gausite pageidaujamus rezultatus.

324. «Žvaigždutė»

Paruoškite 12 popieriaus gabaliukų, sunumeruokite juos skaičiais nuo 1 iki 12 ir išdėliokite ant šešiakampės žvaigždutės skritulėlių (190 pieš.) taip, kad keturiuose kiekvieno iš šešių žvaigždutės spindulių skritulėliuose skaičių suma būtų lygi 26.



190 pieš.



191 pieš.

325. «Kristalas»

Fantastinio «kristalinio tinklo» dalies, atvaizduotos 191 piešinyje, «atomai» sujungti į 10 eilių po 3 «atomus» kiekvienoje eilėje («atomų» sujungimas į eiles 191 piešinyje parodytas linijomis). Parinkite 13 sveikų skaičių, iš jų 11 skirtingų ir 2 vienodus, ir įrašykite juos į «atomus» taip,

kad kiekvienoje eilėje (išilgai piešinyje nurodytų linijų) skaičių suma būtų lygi 20. Mažiausias ieškomasis skaičius 1, o didžiausias 15.

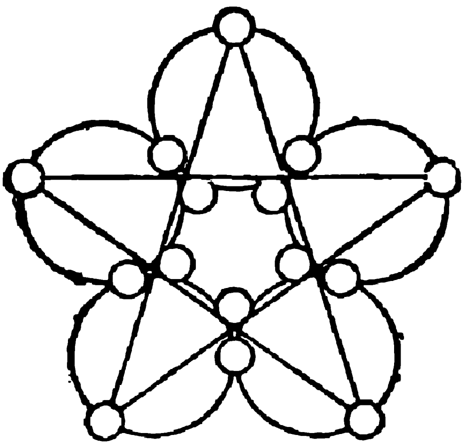
326. Vitrinos papuošalas

Dailės pramonės mokyklos mokinys brangakmenių dirbinių parduotuvės vitrinai padarė penkiakampę žvaigždę su vieliniais lankeliais ir apvaliais aptaisais (192 pieš.).

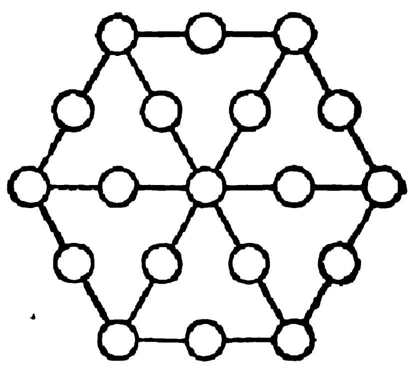
Į aptaisus jis įstatė visokių brangakmenių (piešinyje neatvaizduota). Į vieną aptaisą jis įstatė 1 akmenį, į antrą — 2 akmenis, į trečią — 3 ir t. t. iki 15 akmenų imtinai.

Tačiau meistras juos taip sumaniai išskirstė, kad kiekvienuose penkiuose aptaisuose, išdėstytuose išilgai bet kurio lankelio, akmenų skaičius buvo lygus 40, o bendras akmenų, patalpintų penkiose žvaigždės viršūnėse esančiuose aptaisuose, skaičius taip pat buvo lygus 40.

Raskite akmenų paskirstymą penkiolikoje aptaisų, kuris patenkintų nurodytas sąlygas.



192 pieš.



193 pieš.

327. Kam pavyks anksčiau?

Paruoškite du skrituliukų komplektus. Kiekvieno komplekto skrituliukus sunumeruokite skaičiais nuo 1 iki 19.

Sau ir draugui perpieškite šešiakampį, atvaizduotą 193 piešinyje, draugui duokite vieną skrituliukų komplektą ir pakvieskite jį dalyvauti nedidelėse varžybose. Tegul

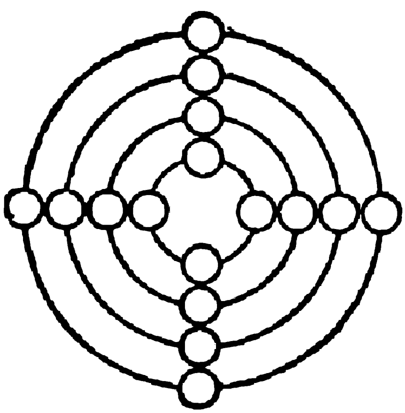
kiekvienas judviejų išdėlioja savo skrituliukus į šešiakampio apskritimus taip, kad skaičių suma išilgai šešiakampio kiekvienos kraštinės ir išilgai kiekvieno spindulio būtų lygi pas vieną iš jų 22, pas antrąjį 23. Sąlygos visai vienodos.

Kuriam judviejų anksčiau pavyks išspręsti uždavinį?

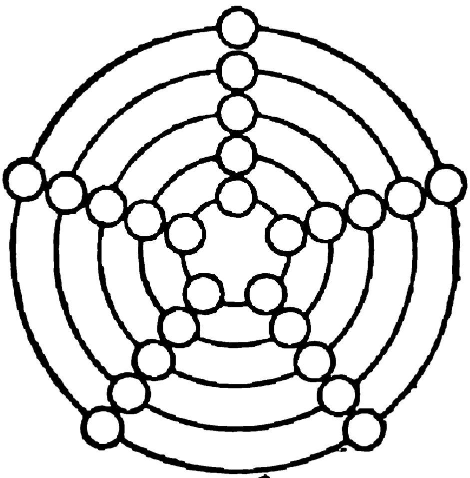
Prisiminkite, kad vienas judviejų turi gauti 12 lygių sumų po 22 vienetus kiekvienoje, o antrasis — taip pat 12 sumų, tačiau po 23 vienetus kiekvienoje.

328. «Planetariumai»

«Mažajame planetariume» visos «planetos» kiekvienoje «orbitoje» ir išilgai spindulių išdėstytos po 4 (194 pieš., *a*), o «didžiajame planetariume» — penkiose «orbitose» ir išilgai penkių spindulių po 5 «planetas» (194 pieš., *b*). Kiek-



a)



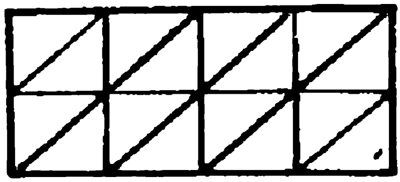
б)

194 pieš.

vienos «mažojo planetariumo» «planetos» svoris reiškiamas vienu iš sveikų skaičių nuo 1 iki 16, o kiekvienos «didžiojo planetariumo» «planetos» svoris reiškiamas vienu iš sveikų skaičių nuo 1 iki 25. Į kiekvieną «planetą» įrašykite jos svorį, jei yra žinoma, kad «planetų» svorių suma kiekvienoje eilėje išilgai spindulių ir kiekvienoje orbitoje lygi «mažajame planetariume» — 34, «didžiajame planetariume» — 65.

329. «Ornamentas»

Prieš jus savotiškas ornamentas, susidedąs iš 16 mažų trikampių. Tam tikros keturių gretimų mažų trikampių grupės sudaro didesnius trikampius. Ornamento piešinyje (195 pieš.) nesunku pastebėti šešis didesnius, vienas į kitą «įpintus» trikampius.



195 pieš.

Į kiekvieną mažąjį trikampį įrašykite vieną iš sveikų skaičių nuo 1 iki 16 (jų nepakartodami) taip, kad skaičių suma bet kuriame iš šešių didžiųjų trikampių būtų lygi 34.

330. «Magiškas» kvadratas

Vieni iš senoviškiausių ir tobuliausių kryžiasumių yra vadinamieji magiški (arba užburti) kvadratai.

Magiški kvadratai pirmą kartą buvo sugalvoti, matyt, kinų, nes anksčiausiai jie minimi kinų knygoje, parašytoje prieš 4 000—5 000 metų iki mūsų eros. Daug vėlesnės žinios apie magiškus kvadratus, priskiriamos jau I amžiui, buvo gautos iš Indijos.

Štai vienas iš tokių beveik 2 000 metų senumo senovės indų paminklų:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Pažiūrėkite, koks puikus kryžiasumių pavyzdys! Šešiolika skaičių išskirstyti šešiolikoje kvadrato langelių taip, kad *skaičių sumos išilgai kiekvienos eilutės, kiekvieno*

stulpelio ir kiekvienos iš dviejų įstrižainių yra vienodos (pagrindinė magiško kvadrato savybė).

Iš tikrųjų:

$$
+\left|\begin{array}{l}
1+14+15+\ 4=34,\\
12+\ 7+\ 6+\ 9=34,\\
8+11+10+\ 5=34,\\
13+\ 2+\ 3+16=34
\end{array}\right.
$$

$$34 \quad 34 \quad 34 \quad 34$$

ir

$$1+\ 7+10+16=34,$$
$$13+11+\ 6+\ 4=34.$$

Kiekvienas magiško kvadrato skaičius įeina į dvi sumas, o skaičiai, išdėstyti išilgai įstrižainių,— netgi į tris, ir visos šios sumos tarpusavy lygios!

Neveltui toje tolimoje prietarų epochoje senovės indai, o įkandin jų ir arabai, tiems skaičių deriniams priskirdavo paslaptingas bei magiškas savybes.

Visa ta savotiška, su pastoviomis sumomis skaičių mozaika iš tikrųjų tam kvadratui teikia «magišką» meno kūrinių jėgą. Natūralu, kad jis negalėjo nepatraukti ne tik matematikų, bet ir menininkų dėmesio.

Vakarų Europoje šis magiškas kvadratas buvo ilgą laiką, beveik 1 500 metų, nežinomas. Tačiau jau XVI šimtmečio pačioje pradžioje magiškas kvadratas taip sužavėjo įžymų vokiečių menininką, graverį ir truputį matematiką A. Diurerį, kad menininkas net atvaizdavo jį (truputį pakeistu pavidalu) vienoje iš savo graviūrų («Melancholija», 1514 m.).

Šis magiškas kvadratas žavus ne tiktai sumų pastovumu, kuris yra tik jo pagrindinė savybė. Panašiai, kaip tikrai meniškame kūrinyje, tuo daugiau randi naujų patrauklių pusių, kuo daugiau į jį įsižiūri, taip ir šiame matematinio meno kūrinyje slypi šalia pagrindinių dar nemažai kitų puikių savybių.

Nurodysime dar šešias papildomas aukščiau pateikto magiško kvadrato savybes:

1) Skaičių, patalpintų mūsų magiško kvadrato kampuose, suma lygi 34, tai yra tam pačiam skaičiui, kaip ir skaičių suma išilgai kiekvienos kvadrato eilutės.

2) Kiekvieno iš mažųjų kvadratų (iš 4 langelių), kurie prisiglaudžia prie duotojo didžiojo kvadrato viršūnių, ir tokio pat centrinio kvadrato skaičių sumos taip pat vienodos ir kiekviena jų lygi 34:

$$1+14+12+7=34,$$
$$8+11+13+2=34,$$
$$10+5+3+16=34,$$
$$15+4+6+9=34,$$
$$7+6+11+10=34.$$

3) Kiekvienoje jo eilutėje yra pora greta stovinčių skaičių, kurių suma 15, ir dar pora greta stovinčių skaičių, kurių suma 19. .

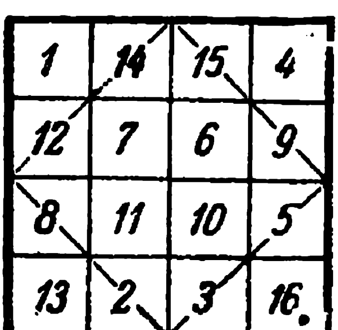
4) Dabar apskaičiuokite skaičių kvadratų sumą atskirai abiejose kraštinėse ir abiejose vidurinėse eilutėse:

$$1^2+14^2+15^2+4^2=438 \text{ ir } 13^2+2^2+3^2+16^2=438,$$
$$12^2+7^2+6^2+9^2=310 \text{ ir } 8^2+11^2+10^2+5^2=310.$$

Kaip matote, turime dvi lygių sumų poras!

5) Nesunku įsitikinti, kad analoginę savybę turi ir skaičių stulpeliai. Abiejų kraštinių stulpelių skaičių kvadratų sumos tarpusavy lygios, ir abiejų vidurinių stulpelių skaičių kvadratų sumos taip pat vienodos.

6) Jei duotajame kvadrate įrašytume dar vieną kvadratą, kurio viršūnės būtų duotojo kvadrato kraštinių viduriai, tai:



a) skaičių, išdėstytų išilgai vienos poros priešingų įrašyto kvadrato kraštinių, suma lygi skaičių, išdėstytų

išilgai kitos poros priešingų kraštinių, sumai, ir kiekviena iš tų sumų vėl lygi skaičiui 34:

$$12 + 14 + 3 + 5 = 15 + 9 + 8 + 2 = 34;$$

b) dar įdomiau: tarpusavy lygios net tų skaičių kvadratų sumos ir kubų sumos:

$$12^2 + 14^2 + 3^2 + 5^2 = 15^2 + 9^2 + 8^2 + 2^2,$$

$$12^3 + 14^3 + 3^3 + 5^3 = 15^3 + 9^3 + 8^3 + 2^3.$$

Jei visus magiško kvadrato stulpelius padarytume eilutėmis, išlaikydami jų kaitą, tai yra pirmojo stulpelio skaičius ta pačia seka išdėstytume pirmos eilutės pavidalu, antro stulpelio skaičius — antros eilutės pavidalu ir t. t., tai kvadratas ir vėl bus magiškas ir su tomis pačiomis savybėmis.

Sukeitus užburto kvadrato atskiras eilutes ar stulpelius vietomis, kai kurios aukščiau išvardintos jo savybės gali išnykti, bet gali ir visos išlikti ir net naujos atsirasti. Pavyzdžiui, sukeičiame vietomis duotojo kvadrato pirmą ir antrą eilutes:

12	7	6	9
1	14	15	4
8	11	10	5
13	2	3	16

Skaičių sumos išilgai eilučių ir stulpelių, žinoma, nepasikeitė, tačiau sumos išilgai įstrižainių nebėra lygios 34. Magiškas kvadratas prarado dalį savo pagrindinių savybių, tapo «nepilnu magišku kvadratu».

Tęsdami kvadrato eilučių ir stulpelių sukeitimą vietomis, jūs gausite vis naujus ir naujus magiškus kvadratus iš 16 skaičių. Kai kurie iš jų vėl turės visas pagrindines savybes.

Uždavinys. Sukeisdami duotojo magiško kvadrato (žr. 273 psl.) eilutes ir stulpelius vietomis, pasiekite tokį skaičių išdėstymą, kad

1) kvadratas turėtų pagrindines magiško kvadrato savybes (kad sumos išilgai kiekvienos eilutės, stulpelio ir įstrižainės būtų lygios);

2) skaičių, išdėstytų išilgai įstrižainių, kvadratų sumos būtų vienodos;

3) skaičių, išdėstytų išilgai įstrižainių, kubų sumos būtų vienodos.

331. Kaip pačiam sudaryti magišką kvadratą?

Jei tam tikras kiekis skaičių, pavyzdžiui, visi sveiki skaičiai nuo 1 iki 16 arba nuo 1 iki 9, nuo 1 iki 25, nuo 1 iki 100 ir t. t. yra išdėlioti kvadrato forma taip, kad išilgai kiekvienos kvadrato eilutės, kiekvieno stulpelio ir kiekvienos įstrižainės skaičių sumos vienodos, tai toks kvadratas, kaip buvo sakyta, vadinamas magišku.

Magiško kvadrato sudarymo idėja, iškilusi beveik prieš septynetą tūkstančių metų, palaipsniui sužavėjo tiek matematinių pramogų mėgėjus, tiek ir specialistus-matematikus. Prasidėjo ir iki šiol tęsiasi to nuostabaus ir gražaus skaičių pasaulyje reiškinio teorinių pagrindų tyrimas. Per šimtus metų sugalvota šimtai gudragalviškų būdų ir taisyklių įvairiems magiškiems kvadratams sudaryti.

Ar nenorite susipažinti su kai kuriais įdomesniais iš jų? Tokiu atveju elgsimės panašiai, kaip radijo mėgėjai. Dar nežinodami apie visas radijo priėmimo teorijos smulkmenas, jie jau moka iš gatavų detalių pagal turimas schemas surinkti radijo imtuvą. Mūsų «detalės» — skaičiai, o «panelis» (lenta, ant kurios montuojamos detalės) — kvadratas su langeliais. Pagal toliau nurodytą schemą «sumontuosime» šešiolikos langelių magišką kvadratą.

I	1	2	3	4
II	5	6	7	8
III	9	10	11	12
IV	13	14	15	16
	1	2	3	4

Pirmas etapas. Išdėlioti pagal eilę į šešioliką langelių visus sveikus skaičius nuo 1 iki 16:

Antras etapas. Skaičių eilės tvarką III ir IV eilutėse pakeisti atvirkščia tvarka, o II ir III eilutes sukeisti vietomis:

	1	2	3	4
I	1	2	3	4
II	12	11	10	9
III	5	6	7	8
IV	16	15	14	13

Trečias etapas. Skaičių eilės tvarką antrame ir trečiame stulpeliuose pakeisti atvirkščia tvarka:

	1	2	3	4
I	1	15	14	4
II	12	6	7	9
III	5	11	10	8
IV	16	2	3	13

Ketvirtas etapas. Skaičių eilės tvarką III ir IV eilutėse pakeisti atvirkščia tvarka:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Magiškas kvadratas sudarytas. Galite patikrinti. Kiekviena iš mus dominančių sumų lygi 34 (šis skaičius vadinamas magiško kvadrato *konstanta*).

Toliau jūs rasite dar keletą šešiolikos langelių magiškų kvadratų sudarymo būdų (žr. 332, 339—341 uždavinius). Naudodamiesi bet kuriuo jų arba čia nurodyta schema, sudarykite kvadratus su pastoviomis sumomis ne tiktai iš šešiolikos pirmųjų natūrinių skaičių, bet ir iš šešiolikos bet kurių sveikų skaičių, kurie skiriasi vienas nuo kito paeiliui tuo pačiu skaičiumi. Praplėsdami pradinį magiško kvadrato apibrėžimą ir tokius kvadratus laikysime magiškais.

Uždavinys. Sudarykite magišką kvadratą iš šešiolikos nelyginių skaičių nuo 1 iki 31.

Dar pareikalaukime, kad magiškas kvadratas, sudarytas iš šešiolikos nelyginių skaičių nuo 1 iki 31, turėtų kai kurias papildomas savybes, pavyzdžiui, tokias:

1) turi būti vienoda, lygi skaičiui 64 (kvadrato konstanta) suma skaičių, išdėstytų: a) viso šešiolikalangio kvadrato keturiuose kampuose, b) keturių devynialangių kvadratų keturiuose kampuose, c) devynių keturlangių kvadratų, įeinančių į viso kvadrato sudėtį, keturiuose kampuose, d) šešių 4 langelių ilgio ir 2 langelių pločio stačiakampių keturiuose kampuose, e) išilgai kiekvienos priešingų kraštinių poros įrašyto kvadrato su viršūnėmis duotojo kvadrato kraštinių viduriuose;

2) skaičių k v a d r a t ų sumos kuriose nors dviejose eilutėse turi būti tarpusavy lygios, ir skaičių kvadratų sumos kitose dviejose eilutėse taip pat turi būti tarpusavy lygios;

3) analogiškai, skaičių kvadratų sumos kuriuose nors dviejuose stulpeliuose turi būti vienodos, ir skaičių kvadratų sumos dviejuose kituose stulpeliuose turi būti vienodos.

Sukeisdami vietomis iš pradžių sudaryto magiško kvadrato eilutes ir stulpelius, jūs galų gale gausite kvadratą, turintį visas reikiamas savybes. Padarykite!

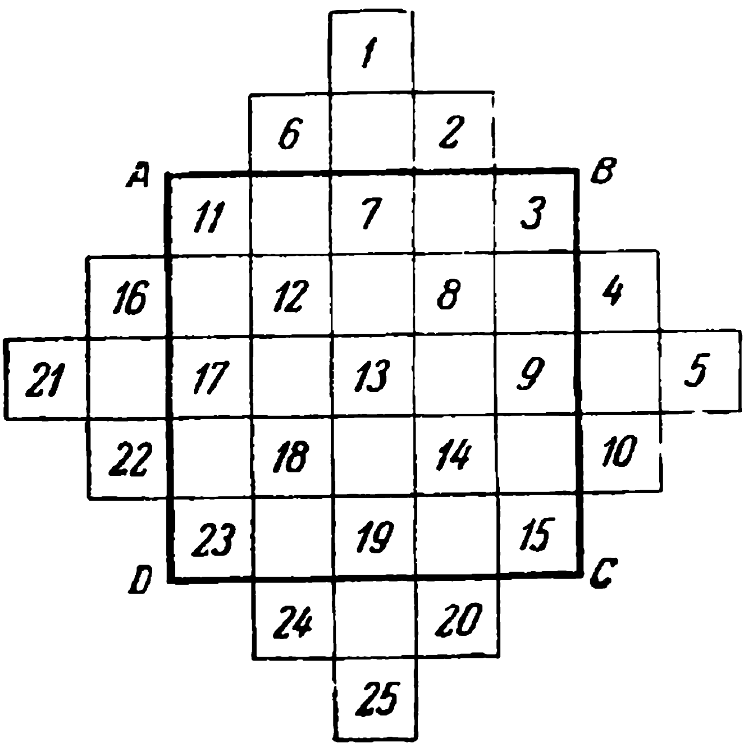
332. Ieškant bendrų metodų

Langelių (skaičių) kiekis kiekvienoje magiško kvadrato eilutėje nustato jo «eilę».

T r e č i o s e i l ė s magiškas kvadratas turi kiekvienoje eilutėje 3 langelius, k e t v i r t o s e i l ė s magiškas kvadratas turi kiekvienoje eilutėje 4 langelius ir t. t.

Ketvirtos eilės magiško kvadrato sudarymo būdas, kuris išnagrinėtas pirmesniame uždavinyje, labai individualus; jis nepritaikomas kitų eilių kvadratams. Laikas susipažinti ir su kiek bendresniais metodais. Geriau sekasi su nelyginės eilės kvadratais; nuo jų ir pradėkime.

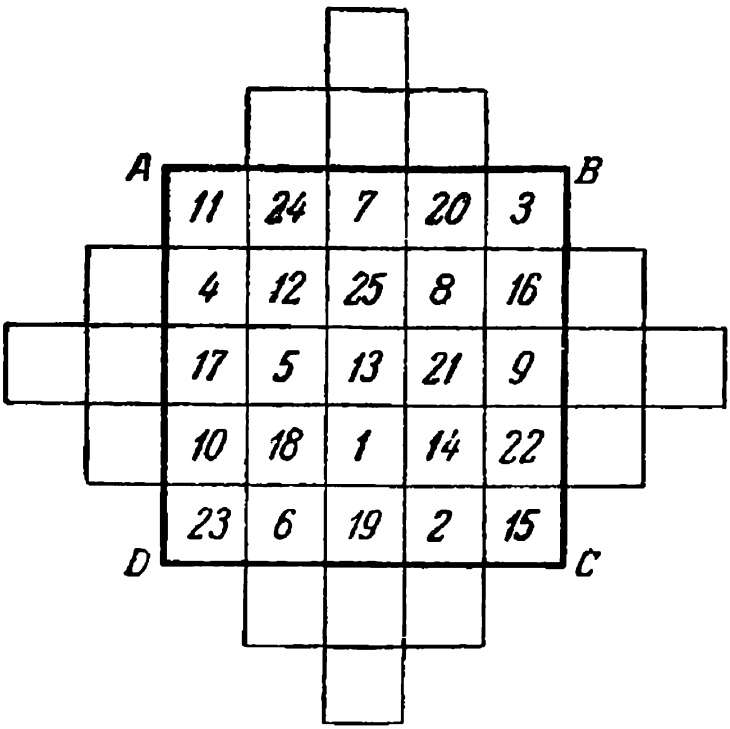
Nelyginės eilės kvadratai. Nelyginės eilės kvadratams iš tikrųjų galima nurodyti b e n d r ą ir gana paprastą jų sudarymo metodą. Išnagrinėkime jį penktos eilės kvadrato atveju, o po to jūs jį be vargo pritaikysite trečios, septintos ir kitų nelyginių eilių kvadratams.



196 pieš.

Sudarome kvadratą *ABCD* (196 pieš.) iš 25 langelių ir laikinai papildome jį iki simetrinės, laiptuotos, su vienalangiais laipteliais figūros (atvaizduotos tame pačiame

piešinyje). Gautoje figūroje įstrižomis eilutėmis iš viršaus žemyn ir dešinėn išdėliojame iš eilės 25 sveikus skaičius nuo 1 iki 25. O dabar kiekvieną skaičių, kuris yra už kvadrato *ABCD*, reikia perkelti išilgai tos pačios eilutės ar stulpelio iš to langelio, kurį jis užima, lygiai per tiek langelių, kokia yra kvadrato eilė, mūsų pavyzdyje — per penkis. Taip, sutinkamai su ta taisykle, skaičių 6 reikia patalpinti į langelį po skaičiumi 18, o skaičių 24 — virš skaičiaus 12; toliau, 1 — žemiau 13, o 25 — aukščiau 13; 16 — dešiniau 8, o 4 — kairiau 12 ir t. t. Galutinai gausime magišką kvadratą, atvaizduotą 197 piešinyje.

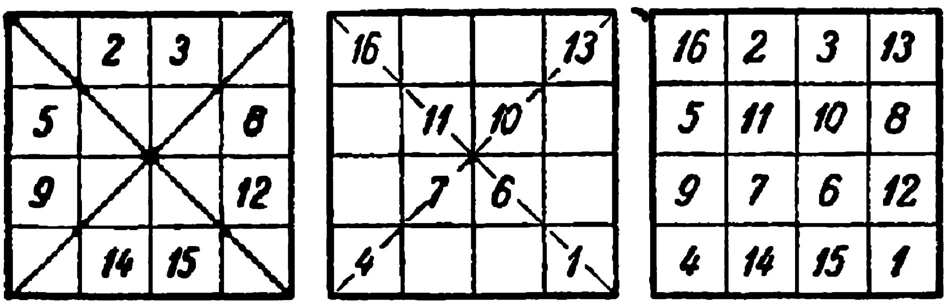


197 pieš.

Nesunku įsitikinti, kad gautas kvadratas turi pagrindines magiško kvadrato savybes. Jo konstanta — 65. Čia, kaip ir pirmesniu atveju, pirmuosius natūrinius skaičius galima pakeisti kitais, kad tik kiekvieno tolesnio ir prieš jį esančio skaičių skirtumas būtų pastovus.

Uždavinys. Apgalvokite, kaip čia aprašytą magiško kvadrato iš 25 langelių sudarymo būdą pritaikyti trečios ir septintos eilių magiškiems kvadratams sudaryti.

Kai kurie lyginės eilės kvadratai. Sunkiau sekasi su lyginės eilės magiškais kvadratais. Jų sudarymo būdai nėra labai bendri. Dar kartą pasinaudokime ketvirtos eilės kvadratu. Paruoškime du kvadratus, po 16 langelių kiekviename, ir išveskime įstrižaines (198 pieš., *a, b*). Į pirmojo kvadrato langelius įrašykime iš eilės duotus skai-



a) б) c)

198 pieš.

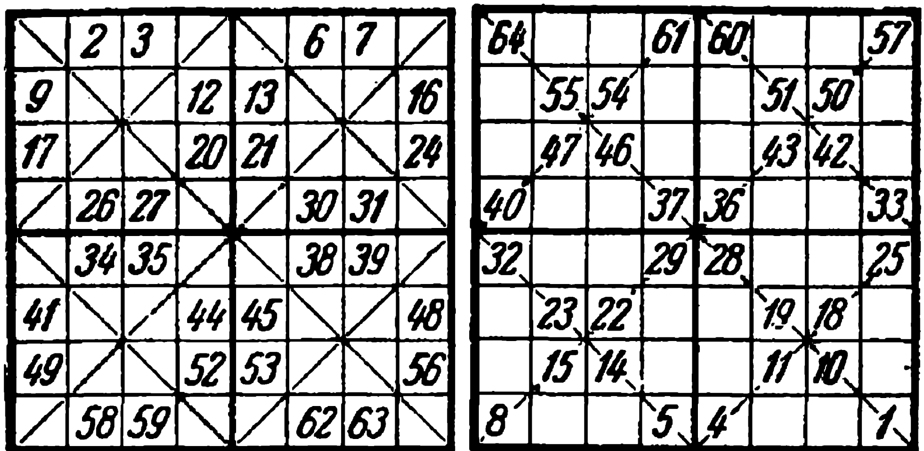
čius, pradedant mažiausiu, neįrašydami kol kas tų skaičių, kurie tenka įstrižainėmis perbrauktiems langeliams (198 pieš., *a*).

Praleistus skaičius, pradedant didžiausiu (t. y. 16), išdėliokime mažėjančia eile į antrojo kvadrato perbrauktus langelius (198 pieš., *b*).

Dabar, uždėję vieną kvadratą ant kito, gausime ieškomąjį ketvirtos eilės magišką kvadratą, atvaizduotą 198 piešinyje, *c*.

Pritaikę tą patį principą su nedideliu papildymu skaičiams išdėlioti į 64 langelių kvadratą, gausime aštuntos eilės magišką kvadratą. Nubrėžkime aštuonis kvadratus, po 16 langelių kiekviename, nutieskime įstrižaines ir iš tų aštuonių kvadratų sudarykime du kvadratus po 64 langelius (199 pieš.). Užpildykime pirmojo kvadrato langelius iš eilės einančiais skaičiais, pradėdami mažiausiu ir praleisdami tuos skaičius, kurie tenka perbrauktiems langeliams (199 pieš., *a*). Praleistus skaičius, pradėdami didžiausiu,

išdėliokime mažėjančia eile perbrauktuose antrojo kvadrato langeliuose (199 pieš., *b*). Sujungę abu kvadratus į vieną,



a) *b)*

199 pieš.

gausime ieškomąjį aštuntos eilės magišką kvadratą (200 pieš.).

Šio kvadrato konstanta 260.

Atrodytų, kad lyginės eilės magiškų kvadratų konstruavimo metodas surastas. Tačiau tai dar ne viskas. Tuo pačiu būdu sudaryti šešios eilės magišką kvadratą nepavyks. Su jo konstruavimu žymiai daugiau rūpesčių.

Nubrėžkime kvadratą iš 36 langelių ir padalykime jį į 4 kvadratus po 9 langelius (201 pieš., *a*). Skaičius nuo 1 iki 9 išdėliokime pagal nelyginės eilės kvadrato sudarymo principą (žr. 280 psl.) viršutiniame kairiajame kvadrate. Pagal tą patį principą užpildykime skaičiais ir kitus tris devynialan-

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

200 pieš.

gius kvadratus: žemutinį dešinįjį — skaičiais nuo 10 iki 18, viršutinį dešinįjį — skaičiais nuo 19 iki 27 ir pagaliau žemutinį kairįjį — skaičiais nuo 28 iki 36 (201 pieš., *a*). Po to reikia sukeisti vietomis skaičius 4, 5 ir 8 su skaičiais 31, 32, 35, ir užburtas kvadratas užbaigtas (201 pieš., *b*). Jo konstanta 111.

4	9	2	22	27	20
3	5	7	21	23	25
8	1	6	26	19	24
31	36	29	13	18	11
30	32	34	12	14	16
35	28	33	17	10	15

a)

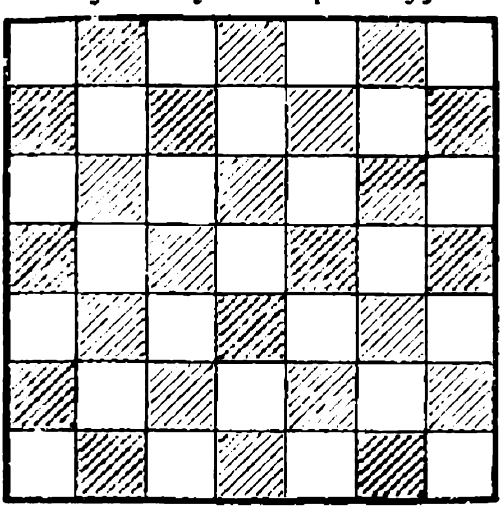
31	9	2	22	27	20
3	32	7	21	23	25
35	1	6	26	19	24
4	36	29	13	18	11
30	5	34	12	14	16
8	28	33	17	10	15

b)

201 pieš.

333. Nuovokos egzaminas

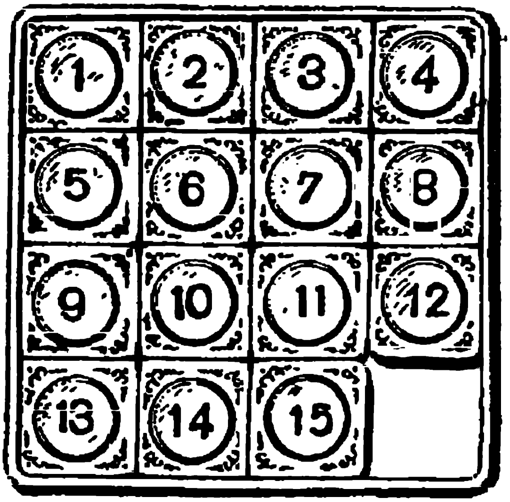
Dabar surenkite nedidelį savo nuovokos egzaminą. Surašykite į 202 piešinyje atvaizduoto kvadrato baltus langelius visus sveikus skaičius nuo 30 iki 54 imtinai taip, kad skaičių suma kiekvienoje iš 7 horizontalių ir 7 vertikalių eilučių būtų lygi 150, o skaičių suma išilgai kiekvienos abiejų įstrižainių būtų lygi 300. Veikite ne bet kaip, o pabandykite sugalvoti duotųjų skaičių išdėstymui kokią nors schemą.



202 pieš.

334. «Magiškas» žaidimas «15»

Dėžutėje, skirtoje šešiolikai kvadratinių plytelių, yra tik 15 sunumeruotų plytelių; viena vieta «tuščia». Paprastai žaidimo «15» esmė yra ta, kad pirma dėžutėje išdėstomos bet kokia tvarka visos 15 plytelių, paskui stengiamasi,



203 pieš.

perstumiant vieną plytelę po kitos, bet neišimant iš dėžutės, sudėlioti jas 203 piešinyje nurodyta «teisinga» tvarka.

Tokiu pavidalu žaidimas nėra turiningas. Tačiau jo matematinį turinį galima žymiai praturtinti, įvedant papildomą reikalavimą: perstumiant plyteles, išdėstyti jas taip, kad susidarytų «magiškas kvadratas iš šešiolikos skaičių (tuščią langelį, kurioje dėžutės vietoje jis bebūtų, laikyti nuliu). Yra viena įdomi aplinkybė: jei iš pradžių plytelės buvo išdėstytos «teisinga» tvarka, kaip atvaizduota 203 piešinyje, tai jokiais jų perstūmimais n e b e į m a n o m a sudaryti magiško kvadrato, bet užtenka tik sukeisti vietomis bet kurias dvi plyteles, ir... uždavinys tampa įvykdomas.

Jei jūs neturite šio žaidimo, pasigaminkite jį patys. Paimkite kvadratinę dėžutę, o «plyteles» išpiaukite iš kartono.

Dabar išdėliokite žaidimo «15» plyteles taip, kaip atvaizduota 204 piešinyje (normalią plytelių išdėstymo tvarką

ardo paskutinės dvi plytelės). Neišimdami plytelių iš dėžutės, o tik perstumdami jas, sudarykite magišką kvad-

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

204 pieš.

ratą su konstanta 30. Pasistenkite išspręsti ne daugiau kaip per 50 ėjimų! Teks, be abejonės, parodyti kantrybės ir daug atkaklumo.

335. Netradicinis magiškas kvadratas

Visi tradicinio magiško kvadrato skaičiai yra būtinai pirmieji iš eilės einą natūriniai skaičiai. Bendresniu atveju kvadrato langeliai gali būti užpildyti bet kuriais skaičiais.

Tegul šešiolikoje kvadrato langelių išdėlioti, kaip parodyta 205 piešinyje, visi sveiki skaičiai nuo 1 iki 8, kiekvie-

1	2	3	4
5	6	7	8
8	7	6	5
4	3	2	1

205 pieš.

nas po du kartus. Perstatykite tuos skaičius taip, kad jų suma visose horizontaliose, vertikaliose ir įstrižainių eilutėse, o taip pat kvadrato kampuose būtų lygi 18. To dar maža. Tą pačią sumą 18 turi sudaryti: 1) bet kurio kvadrato iš keturių gretutinių langelių skaičiai; 2) skaičiai, išdėstyti kampuose bet kurio kvadrato iš devynių gretutinių

langelių, ir nė vienas skaičius kiekvienoje iš tų sumų neturi pasikartoti.

Šį uždavinį išspręskite mėginimų keliu, o gal pavyks sugalvoti ir schemą.

*

* *

Kažkoks juokdarys neseniai sudarė gana įdomų netradicinį magišką kvadratą su konstanta $S = 264$ (206 pieš.). Tai — kvadratas-«vilkołakis».

Kaip jūs galvojate, kodėl?

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

206 pieš.

336. Kas centriniame langelyje?

Dabar išaiškinsime, koks skaičius užima magiško kvadrato su nelyginiu langelių skaičiumi centrinį langelį. Įsižiūrėkime į mums pasitaikiusius devynialangius magiškus kvadratus: ↗

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$S = 15$

49	54	47
48	50	52
53	46	51

$S = 150$

Ir vienu, ir kitu atveju skaičius, esąs centriniame langelyje, lygus $\frac{1}{3}S$, tai yra trečdaliui kvadrato konstantos.

Pasinaudokime mums pažįstamu dvidešimt penkių langelių magišku kvadratu: →

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

$S = 65$

Čia skaičius, esąs centriniame langelyje, lygus $\frac{1}{5}S$, tai yra vienai penktajai kvadrato konstantos. Iš to, ką pastebėjome, galima spėti, kad esama tokio dėsningumo: skaičius, esąs magiško kvadrato su nelyginiu langelių skaičiumi centriniame langelyje, lygus vienos eilutės skaičių sumos aritmetiniam vidurkiui. Tačiau kiekvienos pastebėtos savybės teisingumą galima laikyti galutinai nustatytu tiktai po jos patikrinimo «bendruoju atveju». Kol kas apsiribosime devynialangio magiško kvadrato «bendru pavidalu»: --↗

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Čia vietoje skaičių kol kas yra raidės. Taip pat raidinėmis lygybėmis bus išreikštos ir pagrindinės magiško kvadrato savybės:

$$a_1 + a_2 + a_3 = S, \qquad a_1 + a_4 + a_7 = S,$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = S, \qquad a_2 + a_5 + a_8 = S,$$
$$a_7 + a_8 + a_9 = S, \qquad a_3 + a_6 + a_9 = S,$$
$$a_1 + a_5 + a_9 = S, \qquad a_3 + a_5 + a_7 = S.$$

Įrodykite, kad tada būtinai

$$a_5 = \frac{S}{3}.$$

337. «Magiškos» sandaugos

Pratimų su magiškais kvadratais analogija yra uždavinys apie išliniuoto kvadrato langelių užpildymą nepasikartojančiais natūriniais skaičiais taip, kad jų s a n d a u g o s kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose įstrižainėse būtų vienodos. Iš natūrinių skaičių nuo 1 iki n^2 tokio n-osios eilės kvadrato dar niekas nesudarė ir, matyt, negalima sudaryti. Jeigu leistume laisvai parinkti skaičius, tai tarp begalinės aibės natūrinių skaičių, žinoma, tinkamų atsirastų.

Kaip gi juos parinkti?

Yra išsamus kokio nors (koks išeis!) kvadrato su pastovia sandauga sudarymo būdas. Šis būdas pagrįstas žinoma laipsnių daugybos taisykle: dauginant laipsnius vie-

nodais pagrindais, pagrindai lieka tie patys, o laipsnių rodikliai sudedami. Pavyzdžiui,

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^8 = 2^{4+3+8} \text{ arba } 2^8 \cdot 2 \cdot 2^6 = 2^{8+1+6}.$$

Parinktame pavyzdyje laipsnių rodiklių sumos vienodos: $4+3+8=8+1+6$, vadinasi, ir laipsnių sandaugos vienodos:

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^8 = 2^8 \cdot 2 \cdot 2^6.$$

Dabar aišku, kad jei paimtume laipsnio pagrindu bet kurį skaičių, pavyzdžiui 2, o laipsnių rodikliais parinktume skaičius kurio nors magiško kvadrato su pastovia suma, pavyzdžiui tokio:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

tai gauti skaičiai sudarytų magišką kvadratą su vienodomis sandaugomis:

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2	2^6

arba

16	512	4
8	32	128
256	2	64

Turime:

$$2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^8 = 2^4 \cdot 2^9 \cdot 2^2 = 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = \text{ir t. t.} = 2^{15} = 32\,768.$$

Tokiu keliu bet kurį magišką kvadratą su pastovia suma galima paversti tam tikru kvadratu su pastovia sandauga.

Magiškiems kvadratams su pastoviomis sandaugomis sudaryti galima pateikti dar kitokią schemą, nepriklausomą nuo kvadratų su pastoviomis sumomis.

Suskaidykime a^3 į tris dauginamuosius: $1 \cdot a \cdot a^2$. Skirtingai grupuojant šiuos tris skaičius, nesunku sudaryti kvadratą su pastovia sandauga, lygia a^3. Tam pradžioje užpildykime duotaisiais dauginamaisiais iš eilės visus

kurios nors kvadrato įstrižainės langelius, pavyzdžiui, iš apačios viršun ir dešinėn (207 pieš., *a*). Tuos pačius skaičius 1, a ir a^2 išdėliokime kiekvieną dar po du kartus likusiuose laisvuose langeliuose s i m e t r i š k a i užpildytos įstrižainės atžvilgiu, be to, taip, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje tie skaičiai nepasikartotų (207 pieš., *b*).

		a^2
	a	
1		

a)

a	1	a^2
a^2	a	1
1	a^2	a

b)

207 pieš.

Gavome magišką kvadratą su pastovia sandauga a^3, tačiau jis dar nėra reikiamas, nes jo langeliai užpildyti pasikartojančiais skaičiais.

Tą patį atlikime ir su skaičiais 1, b ir b^2, tiktai su tuo skirtumu, kad iš pradžių juos išdėstykime išilgai antros kvadrato įstrižainės, pavyzdžiui, iš viršaus — žemyn — dešinėn (208 pieš.). Uždėkime antrą kvadratą ant pirmo ir sudauginkime skaičius, pakliuvusius į tą patį langelį (209 pieš.). Skaičių sandauga kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir išilgai įstrižainių pastovi ir lygi a^3b^3.

1	b^2	b
b^2	b	1
b	1	b^2

208 pieš.

a	b^2	a^2b
a^2b^2	ab	1
b	a^2	ab^2

209 pieš.

Pakeitę *a* ir *b* skaičiais, geriau pirminiais (tada tikrai nebus pasikartojančių skaičių), gausime skaitinius magiškus kvadratus su pastoviomis sandaugomis.

Tegul, pavyzdžiui, $a = 2$, $b = 3$, tada gausime:

2	9	12
36	6	1
3	4	18

Pastovi sandauga $p = 216$.

1 uždavinys. Pagal tokią pačią schemą sudarykite trečios eilės magišką kvadratą su trimis parametrais *a, b* ir *c* taip, kad pastovi sandauga būtų lygi $a^3 b^3 c^3$.

Nežinia, ar kas nors sugalvojo ketvirtos eilės magiško kvadrato su pastovia sandauga sudarymo schemą, nepriklausomą nuo magiško kvadrato su pastoviomis sumomis skaičių. Kol kas reikia tenkintis nepilno ketvirtos eilės kvadrato pavyzdžiu: ↓

a^2	b^2	c^2	d^2
bcd	a	abd	c
d	acd	b	abc
bc	cd	ad	ab

arba, jei $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$, tai: →

4	9	25	49
105	2	42	5
7	70	3	30
15	35	14	6

Čia skaičių sandaugos kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje vienodos: $a^2b^2c^2d^2 = 44\,100$, bet jos nesutampa su skaičių sandaugomis išilgai įstrižainių.

Tarp kitko, vienas iš tokių pat nepilnų trečios eilės kvadratų, būtent:

1	12	10
15	2	4
8	5	3

(skaičių sandaugos lygios tiktai eilutėse ir stulpeliuose) mus domina dar tokia įdomia papildoma savybe:

$$8^2+5^2+3^2=7^2+7^2,$$

$$8^4+5^4+3^4=7^4+7^4.$$

2 uždavinys. Šio nepilno trečios eilės kvadrato kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių sandaugos formulė yra tokia: a^3bc. Sutinkamai su tuo pakeiskite šio kvadrato skaičius atitinkamomis raidėmis.

338. Aritmetinių kuriozų «dėžutė»

Kurioziškiausios priklausomybės kartais randamos tarp sveikų skaičių!

Imkime, pavyzdžiui, 12 paprasčiausių sveikų skaičių:

1, 2, 3, 6, 7, 11, 13, 17, 18, 21, 22, 23.

Iš pažiūros jie niekuo neįsidėmėtini. Tačiau šit aš juos perskiriu į dvi grupes:

1, 6, 7, 17, 18, 23 ir 2, 3, 11, 13, 21, 22.

Dabar sulyginkite kiekvienos grupės skaičių sumas:

$$1+6+7+17+18+23=72,$$

$$2+3+11+13+21+22=72.$$

Sumos pasirodė lygios. O tų pačių skaičių kvadratų sumos?

$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = 1\,228,$$
$$2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2 = 1\,228.$$

Kvadratų sumos taip pat vienodos. O kubų sumos? Galite patys įsitikinti, kad tų skaičių ir kubų sumos, ir ketvirtųjų laipsnių sumos, ir penktųjų laipsnių sumos bus vienodos:

$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3,$$
$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4,$$
$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$$

Dar nuostabiau: padidinkite arba sumažinkite visus pirmosios ir antrosios grupės skaičius kuriuo norite tuo pačiu sveiku skaičiumi — gautosios naujos grupės turės tas pačias savybes.

Sumažinkite, pavyzdžiui, visus duotuosius skaičius 12; gausite: —11, —6, —5, 5, 6, 11 ir —10, —9, —1, 1, 9, 10.

Aišku, kad pirmosios grupės skaičių suma lygi antrosios grupės skaičių sumai (abi sumos — nuliai). Lygios tų skaičių ir kubų sumos, ir penktųjų laipsnių sumos (taip pat — nuliai). Nesunku patikrinti duotųjų skaičių kvadratų sumų ir ketvirtųjų laipsnių sumų lygybę:

$$(-11)^2 + (-6)^2 + (-5)^2 + 5^2 + 6^2 + 11^2 = (-10)^2 + (-9)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 9^2 + 10^2;$$
$$(-11)^4 + (-6)^4 + (-5)^4 + 5^4 + 6^4 + 11^4 = (-10)^4 + (-9)^4 + (-1)^4 + 1^4 + 9^4 + 10^4.$$

Na, o dabar menkutis spėjimas, ir jūsų rankose bus formulė, kuri jums duos skaičių, turinčių aukščiau nurodytas savybes, tiek grupių, kiek jūs panorėsite:

$$(m-11)^n + (m-6)^n + (m-5)^n + (m+5)^n + (m+6)^n + (m+11)^n = (m-10)^n + (m-9)^n + (m-1)^n + (m+1)^n + (m+9)^n + (m+10)^n,$$

kur m — bet kuris skaičius, o $n = 1, 2, 3, 4$ arba 5.

Nemažiau įdomūs yra ir tie skaičiai, kurie atimami iš skaičiaus m arba pridedami prie jo. Kiekvienas toks skaičius, paimtas su ženklu plius arba su ženklu minus, įeina į vadinamojo «nulinio» nepilno magiško kvadrato pirmos ir trečios eilučių sudėtį:

6	−11	5
−16	12	4
10	−1	−9

Jis pavadintas «nuliniu» todėl, kad kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje skaičių suma lygi nuliui. «Nulinio» magiško kvadrato elementai (skaičiai) surišti dar keliomis kurioziškomis priklausomybėmis:

1) $6^2+(-11)^2+5^2=10^2+(-1)^2+(-9)^2,$
$6^4+(-11)^4+5^4=10^4+(-1)^4+(-9)^4;$

2) tarpusavy lygios sumos sandaugų skaičių eilutėse, stulpeliuose, o taip pat ir visose įstrižainėse, kurios gali susidaryti, bet kaip perkėlinėjant kvadrato eilutes ir stulpelius:

$$[6\cdot(-16)\cdot10]+[(-11)\cdot12\cdot(-1)]+[5\cdot4\cdot(-9)]=$$
$$=[6\cdot(-11)\cdot5]+[(-16)\cdot12\cdot4]+[10\cdot(-1)\cdot(-9)]=$$
$$=[6\cdot12\cdot(-9)]+[(-11)\cdot4\cdot10]+[5\cdot(-16)\cdot(-1)]=$$
$$=(5\cdot12\cdot10)+[(-11)\cdot(-16)\cdot(-9)]+[6\cdot4\cdot(-1)]=-1\,008;$$

3) jei bet kurio stulpelio ar eilutės elementus (skaičius) pažymėtume raidėmis a, b ir c, tai, be pagrindinės tapatybės $a+b+c=0$, bus teisingos ir šios:

$$a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab,\quad a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Patikrinkite.

Kaip matote, šis «nulinis» magiškas kvadratas — tai visa įvairių kuriozinių aritmetinių priklausomybių «dėžutė».

B. MAGIŠKŲ KVADRATŲ TEORIJOS ELEMENTAI

339. «Pagal papildymą»

Tegul $a, a', b, b', c, c', d, d', e, e', f, f', g, g', h$ ir h' — elementai tradicinio ketvirtos eilės magiško kvadrato:

a	h	e	c
g	b	d	f
e'	c'	a'	h'
d'	f'	g'	b'

be to, $a + a' = b + b' = c + c' = \ldots = 17$. Toks santykis tarp kvadrato skaičių visiškai galimas, nes visi šešiolika sveikų skaičių, sudarančių tradicinį magišką kvadratą, skirstosi į 8 poras taip, kad kiekvienos poros skaičiai papildo vienas kitą iki 17. Pavyzdžiui, 1 ir 16, 2 ir 15, 3 ir 14 ir t. t. Imkimės tokio uždavinio.

Nustatyti, kiek galima gauti, pakeičiant skaičius raidėmis, iš esmės skirtingų magiškų kvadratų su pastovia suma, lygia 34, išilgai kiekvienos horizontalės, vertikalės ir įstrižainės, keturiose duotojo kvadrato viršūnėse, kvadrate iš k e t u r i ų gretimų langelių ir keturiose bet kurio kvadrato iš d e v y n i ų gretimų langelių viršūnėse.

Iš esmės skirtingais kvadratais mes vadinsime tokius, kurių n e g a l i m a gauti vieno iš kito sukeičiant eilutes bei stulpelius ir pakeičiant eilutes stulpeliais.

Pagal sąlygą $a + b + g + h = 34$. Nesiaurinant bendrumo, galima laikyti $a = 1$, tada $a' = 16$. Tokiu atveju b, g ir h — kiekvienas mažesnis už 16. Iš čia savo ruožtu seka, kad kiekvienas jų didesnis už 3. Būtų, pavyzdžiui, $b \leq 3$, tada būtinai g ir h būtų didesni arba lygūs 16, o to negali būti.

Pagal sąlygą dar turime: $a + b' + c + d' = 34$. Samprotaudami analogiškai kaip ligi šiol, padarome išvadą, kad

kiekvienas iš skaičių b', c ir d' didesnis už 3. Jei dabar $b = 14$ arba 15, tai $b' = 3$ arba 2, o to negali būti. Vadinasi, $3 < b < 14$.

Nesiaurinant bendrumo, galima laikyti $b \leq 8$, nes jei $b > 8$, tai $b' \leq 8$ ir jis gali lygiateisiškai pakeisti b. Vadinasi, pakanka išnagrinėti šias galimas reikšmes: $b = 4$, 5, 6, 7 ir 8.

Bendrumo nesusiaurins ir prielaida, kad $h > g$. Dabar nesunku išvardyti visas galimas skaičių (a, b, g ir h) grupių reikšmes:

(1, 4, 14, 15), (1, 6, 13, 14), (1, 8, 10, 15),
(1, 5, 13, 15), (1, 7, 11, 15), (1, 8, 11, 14),
(1, 6, 12, 15), (1, 7, 12, 14), (1, 8, 12, 13).

Pagal kiekvieną iš šių komplektų mes galime parinkti atitinkamas galimas c ir d' reikšmes, nes pagal sąlygą turime: $a + b' + c + d' = 34$.

Pavyzdžiui, jei a, b, g ir h lygūs atitinkamai 1, 4, 14, 15 (pirmas komplektas), tai $b' = 13$, $c + d' = 34 - 1 - 13 = 20$ ir c bei d' turi tik šias galimas reikšmes: 8 ir 12 arba 12 ir 8, o taip pat 9 ir 11 arba 11 ir 9 (kitokios reikšmės negalimos, nes skaičiai neturi pasikartoti).

Tokiu pat būdu galima parinkti visas galimas c ir d' reikšmes, atitinkančias likusius a, b, g ir h reikšmių komplektus. Atlikite tą parinkimą ir sudarykite visus galimus a, b, g, h, b', c, d' reikšmių komplektus. Jų bus ne taip jau daug — viso 24.

Dabar kiekvienai iš gautų 24 kombinacijų reikia parinkti tinkamas f ir f' reikšmes. Tai galima atlikti, išeinant iš sąlygos, kad skaičių, išdėstytų bet kurio kvadrato iš devynių gretimų langelių viršūnėse, suma turi būti lygi kvadrato konstantai, tai yra 34:

$$b + f + b' + f' = 34.$$

Parenkant tinkamas f ir f' reikšmes, reikia atminti, kad kiekviena atrasta f ar f' reikšmė leidžia iš karto v i e n a r e i k š m i a i nustatyti paskutinės nežinomųjų poros (e ir e') reikšmes. Kantriai išmėginę kiekvieną iš 24 atvejų, jūs nustatysite, kad 1 0 a t v e j ų negaunamos tinkamos f ir

f' reikšmės, 4 a t v e j a i s trims rastiems eilutės arba stulpelio skaičiams negalima rasti tokio ketvirto skaičiaus, kad keturių skaičių suma būtų lygi 34; netinka, pavyzdžiui, skaičių kombinacija (1, 10, 13) arba (1, 9, 15), nes magiškame kvadrate neturi būti pasikartojančių skaičių, o kaip tik pirmu iš tų atvejų ketvirtasis skaičius galėtų būti tiktai 10 (= 34 — 1 — 10 — 13), o antruoju 9 (= 34 — 1 — — 9 — 15); 7 a t v e j a i s negaunami iš esmės skirtingi kvadratai, tai yra kvadratai gali būti gauti vienas iš kito — eilučių bei stulpelių perkėlimo ir eilučių pakeitimo stulpeliais keliu, ir tiktai 3 a t v e j a i s gautos skaičių kombinacijos patenkina visas iškeltas sąlygas.

Taigi, galimi tiktai trys iš esmės skirtingi «pagal papildymą» ketvirtos eilės magiški kvadratai, turintieji aukščiau nurodytas savybes, būtent:

1	15	10	8
14	4	5	11
7	9	16	2
12	6	3	13

1	15	6	12
14	4	9	7
11	5	16	2
8	10	3	13

1	15	4	14
12	6	9	7
13	3	16	2
8	10	5	11

Paskutinis iš tų kvadratų tiktai stulpelių išdėstymo tvarka skiriasi nuo pradžioje mūsų išnagrinėto magiško kvadrato (žr. 330). Tas kvadratas, kaip jūs atmenate, turėjo eilę papildomų savybių. Beveik visos tos papildomos savybės būdingos ir pirmiesiems dviem kvadratams, pateiktiems šiame puslapyje.

Skaitytojui, kuris yra susipažinęs su determinantais, įdomu bus sužinoti dar apie vieną papildomą čia pateiktų trijų magiškų kvadratų savybę: jei kiekvieną jų nagrinėtume kaip ketvirtos eilės determinantą, tai toks determinantas būtų lygus nuliui. Kitų eilių magiški kvadratai, atrodo, tokios savybės neturi.

340. «Taisyklingieji» ketvirtos eilės magiški kvadratai

Kiekvienas tradicinis ketvirtos eilės magiškas kvadratas gali būti išreikštas suma keturių tokių kvadratų, kurių pirmame bus tiktai vienetai, antrame — tiktai dvejukės, trečiame — ketveriukės ir ketvirtame — aštuoniukės. Ir tikrai, tradicinio ketvirtos eilės magiško kvadrato elementai yra visi sveiki skaičiai nuo 1 iki 16, o jei kiekvieną iš jų sumažintume vienetu, tai gautume magišką kvadratą, kurio elementai būtų visi sveiki skaičiai nuo 0 iki 15.

Pavartojant tiktai keturis skaičius 1, 2, 4 ir 8, be to, kiekvieną ne daugiau kaip po vieną kartą, galima sudėties pagalba sudaryti bet kurį sveiką skaičių nuo 1 iki 15:

$1=1$,	$6=2+4$,	$11=1+2+8$,
$2=2$,	$7=1+2+4$,	$12=4+8$,
$3=1+2$,	$8=8$,	$13=1+4+8$,
$4=4$,	$9=1+8$,	$14=2+4+8$,
$5=1+4$,	$10=2+8$,	$15=1+2+4+8$.

Naudodamiesi tokia galimybe, suskaidykime visus magiško kvadrato skaičius į sudedamąsias dalis, vienetus palikime savo vietose, o dvejukes, ketveriukes ir aštuoniukes atskirkime ir patalpinkime jas atskirai į atitinkamus iš anksto paruoštų kvadratų langelius. Tai ir bus duotojo ketvirtos eilės magiško kvadrato suskaidymas į keturis kvadratus-dėmenis.

Pavyzdžiui, kvadratas

9	14	2	5
15	4	8	3
0	11	7	12
6	1	13	10

suskaidomas į šiuos keturis kvadratus-dėmenis:

1			1
1			1
	1	1	
	1	1	

	2	2	
2			2
	2	2	
2			2

	4		4
4	4		
		4	4
4		4	

8	8		
8		8	
	8		8
		8	8

Magiškas kvadratas

0	4	15	11
9	13	2	6
14	10	5	1
7	3	8	12

suskaidomas į šiuos keturis kvadratus-dėmenis:

		1	1
1	1		
		1	1
1	1		

		2	2
		2	2
2	2		
2	2		

	4	4	
	4		4
4		4	
4			4

		8	8
8	8		
8	8		
		8	8

Ketvirtos eilės magišką kvadratą vadinsime t a i s y k l i n g u o j u, jei kiekvienas iš keturių jį sudarančių kvadratų yra taip pat magiškas kvadratas.

Pavyzdžiui, magiškas kvadratas, pateiktas pirmame pavyzdyje — taisyklingas, o antrame pavyzdyje — netaisyklingas (skaičių sumos išilgai įstrižainių nėra lygios skaičių sumoms išilgai eilučių ir stulpelių).

Paprasčiausių magiškų kvadratų, kurių langeliuose yra tiktai du skirtingi skaičiai, gali buti aštuoni (žr. 301 psl.).

Sudėję tuos aštuonis paprasčiausius kvadratus po keturis, mes galime gauti visokius taisyklingus ketvirtos eilės magiškus kvadratus. Tarp jų bus tiktai v i e n u o l i k a tokių, kurių visi elementai bus tarpusavy skirtingi.

a	a	a'	a'
a'	a'	a	a
a	a	a'	a'
a'	a'	a	a

в	в'	в	в'
в	в'	в	в'
в'	в	в'	в
в'	в	в'	в

c	c'	c	c'
c'	c	c'	c
c'	c	c'	c
c	c'	c	c'

d	d'	d'	d
d'	d	d	d'
d	d'	d'	d
d'	d	d	d'

e	e	e'	e'
e'	e'	e	e
e'	e'	e	e
e	e	e'	e'

f	f'	f'	f
f	f'	f'	f
f'	f	f	f'
f'	f	f	f'

g	g	g'	g'
g	g'	g	g'
g'	g	g'	g
g'	g'	g	g

h	h'	h	h'
h'	h'	h	h
h	h	h'	h'
h'	h	h'	h'

Jei sutartinai tuos aštuonis paprasčiausius kvadratus pažymėtume atitinkamai raidėmis A, B, C, D, E, F, G ir H, tai vienuolika taisyklingų magiškų kvadratų būtų:

$$
\begin{array}{ll}
A+B+C+D, & B+C+D+F, \\
A+B+C+E, & B+C+E+F, \\
A+B+D+F, & C+D+E+F, \\
A+B+E+F, & C+E+G+H, \\
A+C+D+E, & D+F+G+H. \\
A+D+E+F, &
\end{array}
$$

Kiekviename iš rastų vienuolikos kvadratų vietoje raidžių porų a ir a', b ir b', c ir c' ir t. t. reikia kuria nors tvarka įstatyti keturias skaičių poras: 0 ir 1, 0 ir 2, 0 ir 4, 0 ir 8.

Kaip pavyzdį paimkime kvadratą $C+E+G+H$ ir įstatykime į jį:

$$c=0,\ e=4,\ g=8,\ h=0,\ c'=2,\ e'=0,\ g'=0,\ h'=1.$$

Gausime šį magišką kvadratą:

12	15	0	3
11	1	14	4
2	8	7	13
5	6	9	10

Kadangi keturias skaičių poras galima pakeisti vietomis 24 būdais, o kiekvienos poros skaičius — dviem būdais, tai visų taisyklingųjų magiškų kvadratų skaičius lygus $11 \times 16 \times 24 = 4\,224$. Jeigu aštuonis kvadratus, gautus vieną kvadratą pasukant ir apverčiant, laikysime vienu sprendiniu, tai įvairių galimų taisyklingųjų magiškų kvadratų skaičius bus lygus $4\,224 : 8 = 528$.

Kokio nors paprasto būdo netaisyklingam magiškam kvadratui sudaryti iš šešiolikos natūrinių skaičių 1, 2, ..., 16, atrodo, iki šiol dar niekas nerado.

341. Kaip parinkti skaičius bet kurios eilės magiškam kvadratui

Duotas kvadratas, susidedantis iš n^2 langelių (n — bet kuris sveikas skaičius). Reikia užpildyti visus langelius sveikais skaičiais taip, kad jų suma kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir kiekvienoje įstrižainėje būtų lygi tam pačiam, laisvai mūsų parinktam skaičiui S (kvadrato konstanta). Kitais žodžiais tariant, reikia sudaryti magišką kvadratą, tačiau nebūtinai tradicinį, tai yra nebūtina jį sudaryti tik iš skaičių 1, 2, ..., n^2.

Tradicinio užburto kvadrato konštanta S negali būti bet kokia. Ją iš anksto apibrėžia skaičiai, iš kurių sudaromas kvadratas. Jei sudaromas n-tosios eilės kvadratas ir pavartojami natūriniai skaičiai nuo 1 iki n^2, tai visų tų skaičių suma lygi

$$1+2+3+\ldots+n^2=\frac{(1+n^2)n^2}{2}$$

(aritmetinės progresijos narių suma). Vadinasi, vienos eilutės, stulpelio arba įstrižainės skaičių suma nustatoma pagal formulę

$$S=\frac{(1+n^2)n}{2}.$$

Tačiau mes, užpildydami kvadrato langelius, leisime sau pavartoti bet kuriuos sveikus skaičius, net neigiamus, ir nebūtinai kiekvieną tiktai po vieną kartą (suprantama, visi n^2 skaičiai neturi būti vienodi).

Gali pasirodyti, kad, esant tokiai skaičių parinkimo laisvei, uždavinys yra visiškai nesudėtingas. Pabandykite ir jūs įsitikinsite, kad tai toli gražu ne taip. Primygtinai rekomenduoju vis dėlto būtinai pabandyti sudaryti tegu ir penktos eilės kvadratą iš bet kokių skaičių su kokia norite laisvai parinkta konstanta ir tiktai po to tęsti skaityti šį skyrių.

Prieš pereidami prie bendro atvejo, atskirai apsistokime ties trečios ir ketvirtos eilės magiškais kvadratais. Pasinaudokime algebros pagalba.

Trečios eilės kvadratas. Visus ieškomus skaičius pažymėkime raide a su dviem skaičiais (indeksais) prie jo iš

dešinės, apačioje. Pirmasis indekso skaičius rodys numerį eilutės, kurioje yra a, o antrasis skaičius — numerį stulpelio, kuriame tas a yra:

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

Kadangi pagal sąlygą kvadratas yra magiškas, tai turime 8 lygtis: šešias skaičių sumoms kiekvienoje iš trijų eilučių ir kiekvienam iš trijų stulpelių ir dvi skaičių sumoms kiekvienoje iš dviejų įstrižainių. Nesunku tačiau įrodyti, kad nepriklausomų lygčių bus tiktai 6 (dvi kitos lygtys gaunamos iš pirmųjų šešių).

Ir tikrai, atsižvelgdami į tai, kad $a_{22} = \frac{S}{3}$, kur S — kvadrato konstanta (žr. 287 psl.), gauname šią lygčių sistemą:

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = S, \quad (1)$$
$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = S, \quad (2)$$
$$a_{11} + a_{21} + a_{31} = S, \quad (3)$$
$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = S, \quad (4)$$
$$a_{21} + a_{23} = \frac{2}{3}S, \quad (5)$$
$$a_{12} + a_{32} = \frac{2}{3}S, \quad (6)$$
$$a_{11} + a_{33} = \frac{2}{3}S, \quad (7)$$
$$a_{13} + a_{31} = \frac{2}{3}S. \quad (8)$$

Sudėję (6), (7), (8) lygtis ir atėmę (2), gauname (1) lygtį. Tai parodo, kad (1) lygtis nėra nepriklausoma nuo kitų arba, kaip sakoma, gaunama iš kitų lygčių. Pašaliname ją iš mūsų sistemos. Sudėję (5), (7), (8) lygtis ir

atėmę (3), gauname (4) lygtį. Iš čia turime, kad (4) lygtis gaunama iš kitų lygčių. Pašalinkime ir ją iš mūsų sistemos. Lieka 6 lygtys su aštuoniais nežinomaisiais. Dabar reikia įrodyti, kad tos 6 lygtys: (2), (3), (5), (6), (7) ir (8) viena nuo kitos nepriklauso. Tuo tikslu reikia išskirti kuriuos nors 6 nežinomuosius iš aštuonių ir kiekvieną jų išreikšti likusiais dviem nežinomais skaičiais ir žinomąja S. Jei tai pavyks, tai sistema yra nepriklausoma. Patikrinkite savarankiškai, kad (2), (3), (5), (6), (7), (8) lygčių sistema išsprendžiama, pavyzdžiui, nežinomųjų a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23} ir a_{32} atžvilgiu.

Taigi, iš aštuonių lygčių su devyniais nežinomaisiais tiktai šešios yra nepriklausomos lygtys. Tai duoda mums teisę iš devynių ieškomųjų kuriuos nors tris skaičius laisvai pasirinkti. Atmindami, kad $a_{22}=\frac{S}{3}$, pažymėsime $a_{22}=k$. Skaičius a_{11} ir a_{13} pažymėsime $k+x$ ir $k+y$; čia k, x ir y—bet kokie skaičiai:

$$a_{11}=k+x,\ a_{22}=k,\ a_{13}=k+y.$$

Gausime šį sprendinį:

$k+x$	$k-x-y$	$k+y$
$k-x+y$	k	$k+x-y$
$k-y$	$k+x+y$	$k-x$

Pakeitę šiame sprendinyje x į $(-x)$ arba y į $(-y)$, arba x į y, o y į x, gausime tokį pat skaičių išdėstymą, gal būt, tiktai eilutės bus pakeistos stulpeliais, arba turėsime kitą eilučių bei stulpelių kaitos tvarką. Todėl galime laikyti, kad $x > y$, kur x ir y — teigiami.

Mažiausias gautame kvadrate skaičius $k-x-y$, didžiausias $k+x+y$. Tai žinant, lengva gauti jau pažįstamą mums tradicinį kvadratą, kurio mažiausias skaičius 1, o didžiausias 9.

Turime:

$$k - x - y = 1,$$
$$k + x + y = 9,$$

be to,

$$k = \frac{S}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Iš čia

$$x = 3, \ y = 1,$$

ir mes gauname tradiciniam trečios eilės magiškam kvadratui vienintelį (jei nekreipsime dėmesio į eilučių ir stulpelių išdėstymo tvarką) galimą skaičių išdėstymą:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Ketvirtos eilės kvadratas. Surasti šešiolikai skaičių, iš kurių galima sudaryti ketvirtos eilės magišką kvadratą, mes turime 8 nepriklausomas lygtis.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Jei sumaniai parinktume 8 nežinomuosius ir suteiktume jiems bet kokias reikšmes, tai likusius 8 nežinomuosius surastume, išsprendę lygčių sistemą.

Naudinga pastebėti, kad bet kuriame ketvirtos eilės magiškame kvadrate keturių centrinių elementų suma yra lygi

kiekvienos eilutės skaičių sumai, tai yra kvadrato konstantai S:

$$a_{22} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = S.$$

Šią ketvirtos eilės magiško kvadrato būdingą savybę jūs patys galite patikrinti.

Dabar įveskime 8 bet kokius skaičius: A, B, C, D, a, b, c, d šiuo būdu:

$$a_{32} = A, \quad a_{22} = B,$$
$$a_{23} = C, \quad a_{33} = D,$$
$$a_{11} = A - a,$$
$$a_{12} = C + a + c,$$
$$a_{13} = B + b - c,$$
$$a_{21} = D + a - d.$$

$A-a$	$C+a+c$	$B+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	B	C	$A-a+d$
$C-b+d$	A	D	$B+b-d$
$B+b$	$D-a-c$	$A-b+c$	$C+a$

Likusius 8 skaičius nesunku surasti, ir mes gausime šią formulę (pasiūlytą E. Berholco 1910 m.): →

Žymiai anksčiau, 1884 metais, «Elementariosios matematikos žurnale» profesorius V. P. Jermakovas paskelbė formulę, kurią galima pateikti tokių dviejų magiškų kvadratų sumos pavidalu:

A	C	D	B
D	B	A	C
B	D	C	A
C	A	B	D

+

	$a+b$	$-a-b$	
$c-d$	$-a-c$	$a-c$	$c+d$
$-c+d$	$-a+c$	$a+c$	$-c-d$
	$a-b$	$-a+b$	

Laisvai parinkę 8 skaičius:

$$A, B, C, D, a, b, c, d$$

ir sudėję abu kvadratus pagal langelius (tai yra uždėję vieną kvadratą ant kito ir sudėję skaičius sutampančiuose langeliuose), mes gausime ieškomą magišką kvadratą.

Apie tai, kaip parinkti tuos 8 skaičius, kad gautojo kvadrato langeliuose būtų visi sveiki skaičiai nuo 1 iki 16 (tai yra kad kvadratas būtų tradicinis), V. P. Jermakovas rašo: «Mes nežinome paprasto šio klausimo sprendimo ir siūlome skaitytojui tokį surasti».

n-tos ($n>4$) eilės kvadratas. Skaičius, sudarančius n-tos eilės kvadratą, kai $n>4$, galima pateikti šiuo būdu:

$$\begin{array}{llllllll}
a_{11}, & a_{12}, & \ldots, a_{1,p-1}, & a_{1p}, & a_{1,p+1}, & \ldots, a_{1,n-1}, & a_{1n}, \\
a_{21}, & a_{22}, & \ldots, a_{2,p-1}, & a_{2p}, & a_{2,p+1}, & \ldots, a_{2,n-1}, & a_{2n}, \\
a_{31}, & a_{32}, & \ldots, a_{3,p-1}, & a_{3p}, & a_{3,p+1}, & \ldots, a_{3,n-1}, & a_{3n}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \ldots, a_{n-1,p-1}, & a_{n-1,p}, & a_{n-1,p+1}, & \ldots, a_{n-1,n-1}, & a_{n-1,n} \\
a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, a_{n,p-1}, & a_{np}, & a_{n,p+1}, & \ldots, a_{n,n-1}, & a_{nn}.
\end{array}$$

Čia n^2 nežinomųjų skaičių, kurie gali būti bet kurie algebriniai dydžiai, kad tik jų suma išilgai kiekvienos eilutės, kiekvieno stulpelio ir kiekvienos iš dviejų įstrižainių būtų vienoda.

Pagal sąlygą n^2 nežinomųjų atžvilgiu turime $2n+2$ tiesinių priklausomybių; iš jų savarankiškų priklausomybių yra daugiausia $2n$. Vadinasi, n^2-2n dydžių a galima parinkti laisvai. Kyla klausimas, kuriuos iš dydžių a reikia laikyti laisvomis konstantomis, kad būtų galima visais atvejais surasti likusius $2n$ dydžių a, patenkinančių visus magiško kvadrato reikalavimus.

Tiems dydžiams, kuriuos mes laikysime laisvomis konstantomis, paliksime jų pažymėjimą raide a su atitinkamais indeksais, kitus ieškomuosius dydžius pažymėsime raidėmis $b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1}, b_{2n}$ ir išdėstysime juos kvadrato langeliuose, vadovaudamiesi šia schema:

$$\begin{array}{lllllllll}
a_{11}, & a_{11}, & a_{13}, \ldots, & a_{1,p-1}, & a_{1p}, & a_{1,p+1}, \ldots, & a_{1,n-2}, & a_{1,n-1}, & a_{1n}, \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \ldots, & a_{2,p-1}, & a_{2p}, & a_{2,p+1}, \ldots, & a_{2,n-2}, & a_{2,n-1}, & b_1, \\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, \ldots, & a_{3,p-1}, & a_{3p}, & a_{3,p+1}, \ldots, & a_{3,n-2}, & a_{3,n-1}, & b_2, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-2,1}, & a_{n-2,2}, & a_{n-2,3}, \ldots, & a_{n-2,p-1}, & a_{n-2,p}, & a_{n-2,p+1}, \ldots, & a_{n-2,n-2}, & a_{n-2n-1}, & b_{n-3}, \\
b_{2n-2}, & a_{n-1,2}, & a_{n-1,3}, \ldots, & a_{n-1,p-1}, & b_{2n-1}, & a_{n-2,p+1}, \ldots, & a_{n-1,n-2}, & a_{n-1,n-1}, & b_{n-1}, \\
b_{2n-3}, & b_{2n-4}, & b_{2n-5}, \ldots, & b_{2n-v-1}, & b_{2n}, & b_{2n-v-2}, \ldots, & b_{n+1}, & b_n, & b_{n-2}.
\end{array}$$

Tegul R_i — skaičių a suma i-toje eilutėje (tada $R_1 = S$), C_i — skaičių a suma i-tame stulpelyje,

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{n-1,n-1}, \\ D_2 &= a_{1n} + a_{2,n-1} + a_{3,n-2} + \ldots + a_{n-1,2} \end{aligned}\right\} \text{skaičių } a \text{ sumos išilgai įstrižainių}$$

Visų skaičių a, esančių kvadrate, sumą pažymėkime $\overline{S}$. Pakeitę bet kokiais skaičiais dydžius, pažymėtus raidėmis a, mes dydžius b galėsime surasti tokia eile, kaip jie sunumeruoti, šių lygybių pagalba:

$$\begin{aligned} b_1 &= R_1 - R_2, \\ b_2 &= R_1 - R_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-3} &= R_1 - R_{n-2}, \\ b_{n-2} &= R_1 - D_1, \\ b_{n-1} &= R_1 - C_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-3} + b_{n-2}), \\ b_n &= R_1 - C_{n-1}, \\ b_{n+1} &= R_1 - C_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b_{2n-p-2} &= R_1 - C_{p+1}, \\ b_{2n-p-1} &= R_1 - C_{p-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b_{2n-4} &= R_1 - C_2, \\ b_{2n-3} &= R_1 - D_2, \\ b_{2n-2} &= R_1 - C_1 - b_{2n-3}, \\ b_{2n-1} &= R_1 - R_{n-1} - b_{n-1} - b_{2n-2}, \\ b_{2n} &= R_1 - C_p - b_{2n-1}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Matome, kad b_{2n-1} užima langelį $(n-1)$-oje eilutėje, bet neįeina į tos ar kitos įstrižainės sudėtį. Toks išdėstymas būtų neįmanomas, jei n $\leqslant 4$. Vadinasi, pateikta schema neapima tų atvejų, bet jie jau buvo išnagrinėti atskirai.

Visi dydžiai b, išdėstyti paskutinėje eilutėje, randami nepriklausomai vienas nuo kito, vadinasi, reikia patikrinti, ar jų suma

$$b_{n-2} + b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{2n-3} + b_{2n} \qquad (**)$$

sudarys mūsų kvadrato konstantą S (arba, kitaip tariant,

R_1). Tam iš lygybių (*) atrinkime atitinkamas priklausomybes ir kai kurias iš jų pradžioje perdirbkime:

$$b_{n-1} = R_1 - C_n - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-3} + b_{n-2}) = R_1 - C_n - (R_1 - R_2 + R_1 - R_3 + \ldots + R_1 - R_{n-2} + R_1 - D_1) = R_1 - C_n - R_1 + R_2 - R_1 + R_3 - \ldots - R_1 + R_{n-2} - R_1 + D_1 = D_1 - C_n + (R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2}) - (\underbrace{R_1 + R_1 + \ldots + R_1}_{(n-2)\ \text{kartų}}).$$

Prisiminę skaičių R_i ir $\overline{S}$ apibrėžimus ir pastebėję, kad skaičiai a išdėstyti visose, išskyrus paskutinę, eilutėse, turime:

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-2} = \overline{S} - R_{n-1},$$

vadinasi,

$$b_{n-1} = D_1 - C_n + \overline{S} - R_{n-1} - (n-2) R_1,$$

. . . .

$$b_{2n-2} = R_1 - C_1 - b_{2n-3} = R_1 - C_1 - (R_1 - D_2) = D_2 - C_1,$$

$$b_{2n-1} = R_1 - R_{n-1} - b_{n-1} - b_{2n-2} = R_1 - R_{n-1} - [D_1 - C_n + \overline{S} - R_{n-1} - (n-2)R_1] - (D_2 - C_1) = (n-1) R_1 + C_1 + C_n - D_1 - D_2 - \overline{S};$$

$$b_{2n} = R_1 - C_p - b_{2n-1} = R_1 - C_p - (n-1) R_1 - C_1 - C_n + D_1 + D_2 + \overline{S} = D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n - (n-2) R_1 + \overline{S}.$$

Įstatę rastuosius ryšius į (**), gausime:

$$b_{n-2} + (\underbrace{b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{2n-4} + b_{2n-3}}_{(n-2)\ \text{dėmenų}}) + b_{2n} = R_1 - D_1 + (R_1 - C_{n-1} + R_1 - C_{n-2} + \ldots + R_1 - C_2 + R_1 - D_2) + D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n - (n-2) R_1 + \overline{S} = R_1 - D_1 + [R_1 (n-2) - (C_{n-1} + C_{n-2} + \ldots + C_2) - D_2] + D_1 + D_2 - C_1 - C_p - C_n - (n-2) R_1 + \overline{S} = R_1 - (C_n + C_{n-1} + \ldots + C_p + \ldots + C_2 + C_1) + \overline{S}.$$

Bet $C_1 + C_2 + \ldots + C_{n-1} + C_n = \overline{S}$, vadinasi,

$$b_{n-2} + b_n + b_{n+1} + \ldots + b_{2n-3} + b_{2n} = R_1.$$

Taigi, čia išdėstytos bendros taisyklės iš tikrųjų įgalina sudaryti bet kurį (apłamai kalbant, netradicinį) magišką kvadratą,

Tuo atveju, kai $n = 5$, magiško kvadrato konstrukcija bus ši:

•	•	•	•	•
•	•	•	•	b_1
•	•	•	•	b_2
b_8	•	b_9	•	b_4
b_7	b_6	b_{10}	b_5	b_3

Įstatykite taškų vietoje bet kokius skaičius, suraskite b_1, b_2, ..., b_{10} pagal jų numerių eilę. Gautasis kvadratas būtinai bus magiškas.

TRYLIKTASIS SKYRIUS

RIMTA IR KURIOZIŠKA SKAIČIŲ PASAULYJE

Aplinkinio pasaulio daiktuose visų pirma jūs pastebite jų atskiras savybes, skiriančias vieną daiktą nuo kito. Atskirų individualių savybių gausumas nustelbia bendras savybes, būdingas visiems daiktams, ir todėl tokias savybes nustatyti visada yra sunkiau.

Viena iš svarbiausių bendrųjų daiktų savybių yra ta, kad visus daiktus galima s k a i č i u o t i i r m a t u o t i. Tą bendrą daiktų savybę mes išreiškiame s k a i č i a u s sąvoka.

Skaičiuoti ir lyginti (matuoti) daiktus žmonėms prireikė ne iš karto, tačiau labai seniai — dar ankstyvoje žmogaus išsivystymo pakopoje, prireikė jo darbo veiklos procese.

Skaičiavimo procesą, tai yra skaičiaus sąvoką, žmonės įsisavino labai iš lėto, amžių bėgyje atkakliai kovodami dėl savo būvio.

«Kad galėtume skaičiuoti,— rašo F. Engelsas,— reikia turėti ne tiktai skaičiuotinus daiktus, bet jau sugebėti abstrahuotis, nagrinėjant tuos daiktus, nuo visų kitų jų savybių, išskyrus skaičių, o tas sugebėjimas yra ilgo, besiremiančio patyrimu, istorinio vystymosi rezultatas»*.

Dabar skaičiavimo skaičių pagalba mokosi kiekvienas žmogus nepastebimai dar vaikystėje, beveik tuo pačiu me-

* F. E n g e l s a s. Anti-Diuringas, Gospolitizdat, 1952, 37 psl.

tu, kada pradeda kalbėti, bet tas mums įprastas skaičiavimas praėjo ilgą vystymosi kelią ir turėjo įvairias formas.

Buvo laikai, kada daiktams skaičiuoti buvo naudojami vos du skaitvardžiai: vienas ir du. Tolesnio skaičiavimo sistemos plėtimo procese buvo pavartojamos žmogaus kūno dalys, pirmoje eilėje pirštai, o jei pritrūkdavo tokios rūšies «skaitmenų», tai ir lazdelės, akmenėliai bei kiti daiktai.

N. N. Miklucho-Maklajus savo knygoje «Kelionės» pasakoja apie įdomų skaičiavimo būdą, vartojamą Naujosios Gvinėjos čiabuvių:

«Įprastas skaičiavimo būdas susideda iš to, kad papuasas užlenkia rankos pirštus vieną po kito ir tuo pačiu ištaria tam tikrą garsą, pavyzdžiui, «be, be, be», ... Suskaičiavęs iki penkių, jis pasako «ibon-be» (ranka). Po to jis užlenkia kitos rankos pirštus, vėl kartoja «be, be»..., kol prieina prie «ibon-ali» (dvi rankos). Po to jis eina toliau, balsu pritardamas «be, be»..., kol prieina prie «samba-be» ir «samba-ali» (viena koja, dvi kojos). Jei reikia skaičiavimą tęsti toliau, papuasas naudojasi kieno nors kito rankų ir kojų pirštais»*.

Atsiradus skaičiams ir besivystant jų sąvokai, pasirodė ir įstabus mokslas apie jų savybes bei dėsnius: «skaičių teorija».

Operuodami skaičiais, tai yra atlikdami įvairiausius matematinius veiksmus, mes nustatome ne tiktai jų bendras savybes, kurių nagrinėjimu užsiima skaičių teorija, bet ir ypatingas savybes, kartais būdingas tik nedidelėms skaičių grupėms arba atskiriems skaičiams. Tos ypatingos savybės gali ir neturėti didelės teorinės reikšmės, tačiau neretai labai įdomios. Pasirauskite tarp gausybės skaičių, kurių daugiau, nei rūdžių žemėje, ir jūs rasite įdomių ir nuostabių, keistų ir juokingų, nelauktų ir kurioziškų savybių.

Jūs susidursite su skaičiais — unikumais, tai yra su tokiais, į kuriuos panašių tarpe kitų skaičių nėra, o taip pat ir su ištisomis puokštėmis skaičių, turinčių įstabias savybes.

* Н. Миклухо-Маклай, Путешествия, TSRS MA leid., 1940, I t., 280 psl.

342. Dešimt skaitmenų

I. Dabar beveik visame pasaulyje naudojamasi vieninga skaičiavimo sistema — dešimtaine. Šioje sistemoje naudojami dešimt skaitmenų: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 0, ir tų skaitmenų užtenka bet kuriam skaičiui parašyti.

Nustatykime, kiek galima sudaryti skirtingų sveikų dešimtženklių skaičių, kiekvieną skaitmenį pavartojant tiktai po vieną kartą. Pagal sąlygą vienas skaičius nuo kito skiriasi tiktai skaičių išdėstymu. Bet jei mes panorėtume gauti visus reikiamus dešimtženklius skaičius iš kurio nors vieno, perstatinėjant jame skaitmenis iš vietos į vietą, tektų parašyti daugiau kaip tris milijonus dešimtženklių skaičių.

Patikrinkime tą teiginį. Imkime vieną skaitmenį, sakysime 1. Jis gali užimti bet kurią iš dešimties dešimtženklio skaičiaus vietų. Štai jau 10 galimų dešimtženklių skaičių. Kiekviename iš tų skaičių lieka po 9 laisvas vietas ir kiekvienoje jų galima patalpinti antrą skaitmenį, sakysime 2. Taip sudaroma jau $10\cdot9=90$ skaičių, kurių kiekviename yra dar po 8 laisvas vietas trečiam skaitmeniui. Užpildydami laisvas vietas skaitmeniu 3 po vieną kartą, sudarome $10\cdot9\cdot8=720$ skaičių, kurių kiekviename lieka po 7 laisvas vietas ketvirtam skaitmeniui. Panaudodami ketvirtą skaitmenį (4), gausime $10\cdot9\cdot8\cdot7=5\,040$ skaičių su šešiomis laisvomis vietomis kiekviename.

Toliau tokiu būdu iš eilės skaičiuodami visus galimus skaitmenų išdėstymų atvejus, rasime, kad 10 skaitmenų į dešimtį vietų galima išskirstyti

$$10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=3\,628\,800$$

būdų. Kadangi tarp skaitmenų yra nulis, tai ne visais tais 3 628 800 atvejų sudaryti skaičiai bus dešimtženkliai. Kada nulis iš kairės pirmoje vietoje, pavyzdžiui, skaičiuje 0 123 456 789, tai jis nelaikomas reikšmingu skaitmeniu ir skaičius yra ne dešimtženklis, o devyniaženklis, ir sąlygos nepatenkina. Kiekvienas skaitmuo turi pirmoje vietoje pabuvoti vienodą skaičių kartų. Viso skaitmenų 10. Vadinasi, visų 3 628 800 galimų atvejų $\frac{1}{10}$ dalyje pirmasis skaitmuo bus nulis, o skaičius — devyniaženklis. O likusiais atvejais (kurių skaičių galima iš karto apskaičiuoti, padauginus 3 628 800 iš $\frac{9}{10}$) gaunami reikiami dešimtženkliai skaičiai.

Taigi, panaudojant kiekvieną iš 10 skaitmenų tiktai po vieną kartą, galima sudaryti $\frac{9 \cdot 3\,628\,800}{10} = 3\,265\,920$ dešimtženklių skaičių.

Pasirauskime šioje skaičių krūvoje. Štai, aš iš jos ištraukiu iš viso tik 6 skaičius:

1 037 246 958, 1 046 389 752, 1 286 375 904,
1 307 624 958, 1 370 258 694, 1 462 938 570.

Iš pažiūros jie niekuo neįsidėmėtini, tačiau padalykite kiekvieną iš 2.

Ką jūs dabar pastebite?

— Gavome devyniaženklius skaičius, kurių kiekviename visi skaitmenys, kaip ir anksčiau, skirtingi, bet iš visų skaičių dingo nuliai.

— Visiškai teisingai. O dabar padalykite visus gautus skaičius iš 9.

— Vieną minutę. Dalijame. Taip ir yra! Visi skaičiai tapo aštuoniaženkliais, ir vėl nė viename iš jų nėra pasikartojančių skaitmenų, be to, šį kartą dingo devyniukė. Štai tie skaičiai:

57 624 831, 58 132 764, 71 465 328,
72 645 831, 76 125 483, 81 274 365.

— Tačiau ir tai dar ne viskas. Jei jūs prirašysite dingusią devyniukę gale vieno iš tų aštuoniaženklių skaičių, tai jis bus pilnas kvadratas, tai yra toks skaičius, iš kurio «pilnai» ištraukiama kvadratinė šaknis.

Raskite, kuris iš tų skaičių turi nurodytą savybę.

II. Ką jūs galite pasakyti apie skaičių 123 456 789?

— Visi jo skaitmenys skirtingi ir išdėstyti taip, kad kuo aukštesnė skiltis, tuo mažesnis skaitmuo ją užima.

— Ar to skaičiaus skaitmenų išdėstymo savybė išskiria kuo nors jį iš kitų devyniaženklių skaičių?

— Taip; jis yra pats mažiausias iš visų devyniaženklių skaičių, kuriuos galima būtų sudaryti iš tų pačių devynių skaitmenų (be nulio), pavartojant kiekvieną iš jų tiktai vieną kartą.

— Žinoma. Tačiau yra ir dar viena ypatybė: jei jį padaugintume iš bet kurio vienaženklio skaičiaus, neturinčio

su juo bendrų daliklių, tai kiekviena gauta sandauga taip pat bus sudaryta iš devynių skirtingų skaitmenų.

— Patikrinsime. Iš 3 ir 9 jis dalijasi. Iš 6 nesidalija, nes nesidalija iš 2, bet su skaičiumi 6 turi bendrą daliklį 3. Su skaičiais 2, 4, 5, 7 ir 8 bendrų daliklių neturi ir, daugindami iš kiekvieno jų, iš tikrųjų gauname vėl devyniaženklį skaičių be pasikartojančių skaitmenų.

Patikrinkite!

— Na, o kaip jūs sudarysite patį didžiausią devyniaženklį skaičių be pasikartojančių skaitmenų ir be nulio?

— Labai paprastai. Aš parašysiu skaičių, kurio visi skaitmenys paeiliui mažėtų vienetu, tai yra 987 654 321.

— Reikia manyti, kad jis turi tas pačias savybes, kaip ir minėtas pats mažiausias skaičius.

— Jūsų spėjimai teisingi. Tiktai dabar, padauginus iš 2, 4, 5, 7 ir 8, kiekvieną kartą gaunami dešimtženkliai skaičiai be pasikartojančių skaitmenų (dešimtas skaitmuo bus nulis). Patikrinkite!

Įdomu, kad

$$123\,456\,789 \cdot 8 + 9 = 987\,654\,321,$$

tai yra jei patį mažiausią devyniaženklį skaičių, parašytą visais skaitmenimis, išskyrus nulį, padaugintume iš 8 ir pridėtume 9, tai gautume patį didžiausią devyniaženklį skaičių, parašytą tais pačiais skaitmenimis. Jei iš didesniojo atimtume mažesnįjį, tai gautume dar vieną devyniaženklį skaičių, kurio visi skaitmenys skirtingi:

$$987\,654\,321 - 123\,456\,789 = 864\,197\,532.$$

III. Tarp dešimtženklių skaičių, kurių visi skaitmenys skirtingi, yra 10 pilnų kvadratų:

$1\,026\,753\,849 = 32\,043^2$, $2\,081\,549\,376 = 45\,624^2$,
$1\,042\,385\,796 = 32\,286^2$, $3\,074\,258\,916 = 55\,446^2$,
$1\,098\,524\,736 = 33\,144^2$, $4\,728\,850\,169 = 68\,763^2$,
$1\,237\,069\,584 = 35\,172^2$, $7\,042\,398\,561 = 83\,919^2$,
$1\,532\,487\,609 = 39\,147^2$, $9\,814\,072\,356 = 99\,066^2$.

343. Keletas įdomių stebėjimų

I. Telegrafo juostelė perplyšo kaip tik per skaičiaus 9801 vidurį. Ant vieno juostelės gabaliuko buvo 98, o ant kito 01. Aš mechaniškai apskaičiavau tų skaičių sumą,

rezultatą pakėliau kvadratu ir..., savo nustebimui, vėl gavau ieškomą skaičių: $(98+01)^2 = 9\,801$.

Nesunku patikrinti, kad tokią pat savybę turi ir skaičius 3025. Jei jį perskeltume į du skaičius: 30 ir 25, juos sudėtume ir sumą pakeltume kvadratu, tai rezultatas būtų lygus ieškomajam skaičiui.

Tarp keturženklių skaičių, išskyrus nurodytus, yra dar tik vienas su tokia pat savybe skaičius. Jūs jį rasite savarankiškai, jei peržiūrėsite skaičių kvadratų lentelę ribose nuo 32 iki 99 ir atliksite atitinkamus skaičiavimus.

II. Jei skaičių 12 345 679, kurio skaitmenys išdėstyti didėjančios sekos tvarka, bet be aštuoniukės, pradžioje padaugintume iš bet kurio v i e n a ž e n k l i o skaičiaus, o paskui iš 9, tai visi galutinio rezultato skaitmenys sutaptų su pirmo daugiklio skaitmeniu. Pavyzdžiui,

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times \quad\quad\quad 7 \\ \hline 86\,419\,753 \\ \times \quad\quad\quad 9 \\ \hline 777\,777\,777 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times \quad\quad\quad 8 \\ \hline 98\,765\,432 \\ \times \quad\quad\quad 9 \\ \hline 888\,888\,888 \end{array}$$

Patikrinkite tai kitiems daugikliams.

III. Parašykite vieną po kita keletą skaičių sekų:

A

1	3	5	7	9	11	13 . .
1	4	7	10	13	16	19 .
1	5	9	13	17	21	25 . . .
1	6	11	16	21	26	31 . . .
1	7	13	19	25	31	37 . . .
1	8	15	22	29	36	43 . . .
1	9	17	25	33	41	49 . . .

. . . . *C*

Kiekvienoje sekoje pirmas skaičius 1, o visi paskesni skaičiai didesni už prieš juos esančius: pirmoje sekoje dviem, antroje trimis, trečioje keturiais ir t. t. (tokios sekos vadinamos aritmetinėmis progresijomis). Gavome tam tikrą skaičių lentelę. Jei tuos skaičius sugrupuotume ir sudėtume pagal punktyrinius koridorius, tai skaičių suma kiekviename punktyriniame koridoriuje būtų lygi koridoriaus numerio n kubui. Pavyzdžiui, koridoriuje Nr. 2:

$$1 + 4 + 3 = 2^3.$$

Koridoriuje Nr. 3:

$$1 + 5 + 9 + 7 + 5 = 3^3$$

ir t. t.

Skaičių suma kiekviename n-tame koridoriuje yra lygi n^3.

Toliau: bet kuris skaičius, esąs ant įstrižainės AC, yra jo užimamos eilutės numerio kvadratas. Skaičių suma bet kuriame kvadrate, kurio įstrižainė yra kuri nors įstrižainės AC dalis, taip pat yra pilnas kvadratas, tai yra lygi tam tikro skaičiaus kvadratui.

Pavyzdžiui, skaičių suma kvadrate, kurio įstrižainė 25, 36 ir 49, bus:

$$25 + 31 + 37 + 29 + 36 + 43 + 33 + 41 + 49 = 324 = 18^2.$$

Patikrinkite tą savybę kitiems įstrižainės AC tarpams. Paieškokite analoginių savybių šios lentelės skaičiuose:

1	3	5	7	9	11	13 ...
1	5	9	13	17	21	25 ...
1	7	13	19	25	31	37 ...
1	9	17	25	33	41	49 ...
1	11	21	31	41	51	61 ...
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

IV. Daug įdomių savybių galima atrasti skaičiuje 37.

1) Jei jį padaugintume iš 3 ar iš skaičiaus, dalaus 3 (iki 27 imtinai), tai rezultatas būtų išreiškiamas kuriuo nors vienu, 3 kartus pakartotu skaitmeniu:

$$37 \cdot 3 = 111,\ 37 \cdot 6 = 222,\ 37 \cdot 9 = 333,$$
$$37 \cdot 12 = 444,\ 37 \cdot 27 = 999.$$

2) Skaičiaus 37 ir jo skaitmenų sumos sandauga lygi tų pačių skaitmenų kubų sumai:

$$37 \cdot (3+7) = 3^3 + 7^3.$$

3) Jei iš skaičiaus 37 skaitmenų kvadratų sumos atimtume tų pačių skaitmenų sandaugą, tai vėl gautume 37:

$$(3^2 + 7^2) - 3 \cdot 7 = 37.$$

4) Įdomiausia savybė: imkime bet kurį triženklį skaičių, dalų 37, pavyzdžiui, $37 \cdot 7 = 259$. Visi skaičiai, gaunami iš skaičiaus 259, perstatant jo skaitmenis cikliškai, t. y. skaičiai 925 ir 592, taip pat dalijasi iš 37.

Cikliniu skaitmenų perstatymu vadinamas toks perstatymas, kai kiekvieną kartą paskutinis skaičiaus skaitmuo, nepakeičiant kitų skaitmenų išdėstymo tvarkos, perkeliamas į pirmą vietą.

Paimkime dar vieną bet kurį triženklį skaičių, dalų 37. Tegul tai bus $37 \cdot 5 = 185$. Ciklinis skaitmenų perstatymas duoda skaičius 518 ir 851. Jie taip pat dalijasi iš 37.

Natūralu, kad siūlosi tokia prielaida: kiekvienas skaičius, gaunamas cikliškai perstatant triženklio skaičiaus, dalaus 37, skaitmenis, taip pat dalus 37.

Patikrinkite, ar visiems triženkliams skaičiams, daliems 37, teisinga ši prielaida. Jei iš tikrųjų visiems, tai ta prielaida pavirsta teisingu matematiniu teiginiu.

Panašia savybe pasižymi ir penkiaženkliai skaičiai, dalūs 41. Antai, skaičiai 15 498, 81 549, 98 154, 49 815, 54 981, kaip lengva patikrinti, visi dalūs 41 ir kiekvienas jų gaunamas iš pirmesnio, cikliškai perstatant skaičių sudarančius skaitmenis.

Nurodysiu dar vieną skaičiaus 37 ypatybę.

Naudojantis veiksmų ženklais, jį galima išreikšti p e n k i ų t r e j u k i ų pagalba, pavyzdžiui, $37 = 33 + 3 + \frac{3}{3}$; tačiau tai ne vienintelis būdas išreikšti skaičių 37 penkių trejukių pagalba. Raskite dar bent vieną šio uždavinio sprendinį.

V. Atlikime šį labai įdomų bandymą.

Parašykime paeiliui keturis b e t k o k i u s sveikus teigiamus skaičius, pavyzdžiui 8, 17, 3, 107. Apskaičiuokime

pirmojo ir antrojo skaičių skirtumą (atimdami iš didesnio skaičiaus mažesnį), antrojo ir trečiojo, trečiojo ir ketvirtojo, galiausiai, ketvirtojo ir pirmojo, kiekvieną kartą atimdami iš didesnio skaičiaus mažesnį: $17-8=9$, $17-3=14$, $107-3=104$, $107-8=99$. Gautus skirtumus pavadinkime pirmaisiais ir išdėstykime juos ta pačia tvarka sekos pavidalu: 9, 14, 104, 99.

Vėl apskaičiuokime pirmųjų skirtumų sekos pirmojo ir antrojo, antrojo ir trečiojo, trečiojo ir ketvirtojo, ketvirtojo ir pirmojo skaičių skirtumus, kiekvieną kartą atimdami iš didesnio skaičiaus mažesnį:

$$14-9=5,\quad 104-14=90,\quad 104-99=5,\quad 99-9=90.$$

Gausime antrųjų skirtumų seką: 5, 90, 5, 90.

Tokiu pat būdu sudarykime trečiųjų skirtumų seką: 85, 85, 85, 85.

Na, o ketvirtųjų skirtumų seka bus sudaryta vien iš nulių: 0, 0, 0, 0.

Bandymą pakartokime su kitos grupės skaičiais. Įveskime pažymėjimus: A_0 — pradinei skaičių grupei, A_1 — pirmųjų skirtumų grupei, A_2 — antrųjų skirtumų grupei ir t. t.

Tegul pradinė grupė A_0 turi šiuos keturis skaičius:

$$(93,\ 5,\ 21,\ 50).$$

Atliekame veiksmus:

$$\begin{aligned}
A_0 &= (93,\ 5,\ 21,\ 50),\\
A_1 &= (88,\ 16,\ 29,\ 43),\\
A_2 &= (72,\ 13,\ 14,\ 45),\\
A_3 &= (59,\ 1,\ 31,\ 27),\\
A_4 &= (58,\ 30,\ 4,\ 32),\\
A_5 &= (28,\ 26,\ 28,\ 26),\\
A_6 &= (2,\ 2,\ 2,\ 2),\\
A_7 &= (0,\ 0,\ 0,\ 0).
\end{aligned}$$

Pakartoję iš viso tik septynis kartus procesą, mes vėl priėjome prie nulių grupės.

Eksperimentatorius turi įvairinti bandymo sąlygas. Bandymą pakartokime su kuriuo nors plačiai ištęstu skaičių ketvertu, pavyzdžiui, su skaičiais: 1, 11, 130, 1 760:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (\ 1,\ 11,\ 130,\ 1\,760),\\
A_1 &= (\ 10,\ 119,\ 1\,630,\ 1\,759),\\
A_2 &= (\ 109,\ 1\,511,\ 129,\ 1\,749),\\
A_3 &= (1\,402,\ 1\,382,\ 1\,620,\ 1\,640),\\
A_4 &= (\ 20,\ 238,\ 20,\ 238),\\
A_5 &= (\ 218,\ 218,\ 218,\ 218),\\
A_6 &= (\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).
\end{aligned}
$$

Nuliai atsirado, ir visai nelauktai, gana greitai, po šešių etapų!

Atlikite patys dar dešimtį tokių bandymų su skirtingomis grupėmis iš k e t u r i ų sveikų teigiamų skaičių; bet kuriuo atveju jūs prieisite prie nulių grupės, be to, dažniausiai (bet ne visada) ne vėliau kaip po 8 etapų.

Ar šis pastebėtas reiškinys yra dėsningas, ar gal yra toks skaičių ketvertas, kurio, kiek mes skirtumų nesudarytume, nepavyks privesti prie nulių? Išaiškinsime tai.

Pirmiausia, aišku, kad skaičių skirtumų sudarymo atžvilgiu galima nelaikyti skirtingomis tas skaičių grupes, kurios gaunamos iš vienos grupės *(a, b, c, d)* perstatant įvairiais būdais skaičius, tačiau taip, kad kiekvieną skaičių suptų tie patys kaimynai (ketvirtojo skaičiaus kaimynu laikome pirmąjį): *(d, a, b, c)*, *(c, d, a, b)*, *(b, c, d, a)* bei *(c, b, a, d)*, *(b, a, d, c)* ir t. t.

Dabar pažiūrėkime, kiek galima sudaryti tarpusavy skirtingų pradinių grupių iš keturių skaičių, kombinuojant lyginius ir nelyginius skaičius, tačiau nekreipiant dėmesio į jų didumą.

Pirma kombinacija: visi skaičiai lyginiai [*l, l, l, l*]; antra kombinacija: trys lyginiai ir vienas nelyginis skaičius: [*l, l, l, n*]. Toliau:

[*l, l, n, n*], [*l, n, n, n*],
[*l, n, l, n*], [*n, n, n, n*].

Viso šešios kombinacijos. Bet kuri kita kombinacija bus vienos iš šių šešių kombinacijų ciklinis perstatinys.

Kiekvienoje šių šešių grupių ketvirtieji skirtumai bus sudaryti vien tik iš lyginių skaičių. Šis tvirtinimas pirmai kombinacijai $[l, l, l, l]$ akivaizdus. Patikrinkime, ar jis teisingas antrai kombinacijai:

$$A_0 = [l, l, l, n].$$

Kadangi visada dviejų lyginių arba dviejų nelyginių skaičių skirtumas — lyginis skaičius, o lyginio ir nelyginio skaičių — nelyginis skaičius, tai

$$\begin{aligned} A_1 &= [l, l, n, n,], \\ A_2 &= [l, n, l, n,], \\ A_3 &= [n, n, n, n,], \\ A_4 &= [l, l, l, l,]. \end{aligned}$$

Ištirkite patys kiekvieną iš kitų keturių galimų kombinacijų.

Visais atvejais ketvirtoji skirtumų seka (A_4) bus sudaryta vien iš lyginių skaičių (tai yra visi sekos A_4 skaičiai bus dalūs skaičiui 2).

Dabar įrodykime, kad aštuntosios skirtumų sekos (A_8) visi skaičiai dalūs 4. Įrodymui laikinai pakeiskime ketvirtosios skirtumų sekos skaičius jų pusėmis ir sudarykime tų pusių pirmąją skirtumų seką. Kuo skirsis ši seka nuo penktosios tikrųjų skirtumų sekos?

A t s a k y m a s. Jos skaičiai taip pat bus sekos A_5 skaičių pusės.

Tegul, pavyzdžiui, $A_4 = (4, 6, 12, 22)$, tada

$$A_5 = (2, 6, 10, 18).$$

Jeigu sudarytume seką iš pusių: (2, 3, 6, 11), tai skirtumų seka (1, 3, 5, 9), kaip matote, taip pat sudaro sekos A_5 skaičių puses.

Tokia skaičių priklausomybė liks ir tolesnėse skirtumų sekose. t. y. antroji pusių skirtumų seka sudarys pusę sekos A_6, trečioji pusių skirtumų seka sudarys pusę sekos A_7, ketvirtoji pusių skirtumų seka sudarys pusę sekos A_8. Padvigubinę visus ketvirtosios pusių sekos skaičius, gausime sekos A_8 skaičius. Tačiau ketvirtoji pusių skirtumų seka, kaip bet kokia ketvirtoji skirtumų seka, būtinai turi susidėti iš lygi-

nių skaičių, o sekos A_8 skaičiai dvigubai už juos didesni, vadinasi, sekos A_8 skaičiai dalijasi ne tiktai iš 2, bet ir iš 4, o tai ir reikėjo įrodyti. Jei, pavyzdžiui, $A_4 = (4, 6, 12, 22)$ — skaičiai, dalūs 2, tai

$$A_5 = (2, 6, 10, 18),$$
$$A_6 = (4, 4, 8, 16),$$
$$A_7 = (0, 4, 8, 12),$$
$$A_8 = (4, 4, 4, 12)$$ — skaičiai, dalūs 4.

Tęsdami samprotavimus, įrodome, kad dar už keturių skirtumų sekų gausime dvyliktosios skirtumų sekos A_{12} skaičius, kurie dalijasi iš 8, tai yra iš 2^3; sekos A_{16} skaičiai dalijasi iš 2^4 ir t. t.

Pavyzdžiui, skirtumų sekos A_{40} skaičiai turi dalytis iš $2^{10} = 1\,024$. Sakysime, kad nė vienas pradinės eilutės skaičius nėra didesnis už 1 000. Kiek tolesnių skirtumų mes besudarytume, gaunami skaičiai juo labiau 1 000 neviršys.

Leiskime, kad iš duotųjų keturių skaičių sudaryti 39 skirtumai ir nė vienas iš jų nesusideda vien iš nulių. Tada keturiasdešimtas skirtumas, A_{40}, būtinai susidės vien tik iš nulių. Štai kodėl: nė vienas šio skirtumo skaičius nėra didesnis už 1 000, o tuo pat metu, kaip nustatyta, visi keturiasdešimto skirtumo A_{40} skaičiai turi dalytis iš $2^{10} = 1\,024$. Tačiau yra tiktai vienas neneigiamas skaičius, kuris mažesnis už 1 000 ir dalijasi iš 1 024,— tai nulis. Vadinasi, visi keturiasdešimto skirtumo skaičiai — nuliai.

Jei pradiniai skaičiai didesni už tūkstantį, bet mažesni už milijoną, tai nuliai kraštutiniu atveju turėtų atsirasti aštuoniasdešimtame skirtume (praktiškai visuomet žymiai anksčiau), nes skirtumo A_{80} skaičiai turi dalytis iš $2^{20} = 1\,048\,576$, o vienintelis neneigiamas skaičius, mažesnis už 1 000 000 ir pasidalijantis iš 1 048 576, yra nulis.

Taip galima įrodymą pritaikyti bet kuriam duotųjų skaičių ketvertui.

Taigi, nėra tokio skaičių ketverto, kurio skirtumai anksčiau ar vėliau nepavirstų nuliais.

1 pastaba. Tokią pat savybę pavirsti nuliais turi bet kurios grupės iš aštuonių skaičių arba iš 16 ir bendrai

iš 2^n skaičių (n — bet kuris sveikas teigiamas skaičius) skirtumai.

2 pastaba. Jei pradinėje grupėje skaičių kiekis nėra 2 laipsnis (tai yra ne 4, ne 8, ne 16 ir t. t.), tai skirtumų sudarymo procesas gali ir niekuomet neprivesti prie nulių sekos. Pavyzdžiui, tegul $A_0 = (2, 5, 9)$, tada

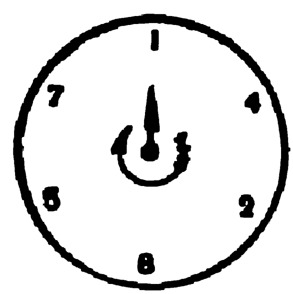
$$\begin{aligned} A_0 &= (2, 5, 9), & A_5 &= (1, 1, 0), \\ A_1 &= (3, 4, 7), & A_6 &= (0, 1, 1), \\ A_2 &= (1, 3, 4), & A_7 &= (1, 0, 1), \\ A_3 &= (2, 1, 3), & A_8 &= (1, 1, 0). \\ A_4 &= (1, 2, 1), \end{aligned}$$

A_8 sutapo su A_5, vadinasi, toliau be galo kartosis skirtumai A_6, A_7, A_8.

344. Skaičių karuselė

1) Iš bedugnės skaičių dėžutės išimu skaičių 142 857. Jis susideda iš šešių skirtingų skaitmenų. Išdėstykime juos apskritimu ciferblato pavidalu: ————↘
Dabar duotąjį skaičių padauginkime paeiliui iš 1, 2, 3, 4, 5 ir 6:

$$142\,857 \times \left| \begin{aligned} 1 &= 142\,857, \\ 2 &= 285\,714, \\ 3 &= 428\,571, \\ 4 &= 571\,428, \\ 5 &= 714\,285, \\ 6 &= 857\,142. \end{aligned} \right.$$



Ciferblate rodyklės kryptimi mes perskaitysime bet kurią iš gautų sandaugų.

Kiekvienas ciferblato skaičius yra vienos iš sandaugų pirmas skaitmuo. Tikra skaičių karuselė, ar ne tiesa?

2) Yra dar viena įdomi savybė. Jei bet kurią šių sandaugų suskaidytume į dvi skiltis po 3 skaitmenis, o paskui abi skiltis sudėtume, tai visais atvejais rezultatas būtų tas pats skaičius: 999. Ir tikrai, $142 + 857 = 999$, $285 + 714 = 999$ ir t. t.

3) Pratęskime skaičiaus 142 857 ir sveikų skaičių, einančių po skaičiaus 7, sandaugų stebėjimus (sandaugą iš 7 išnagrinėsime vėliau):

$$142\,857 \times \begin{cases} 8 = 1\,142\,856 & (142\,856 + 1 = 142\,857), \\ 9 = 1\,285\,713 & (285\,713 + 1 = 285\,714), \\ 10 = 1\,428\,570 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 11 = 1\,571\,427 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 69 = 9\,857\,133 & (857\,133 + 9 = 857\,142). \end{cases}$$

Gauname septyniaženklius skaičius, tačiau taip pat ypatingus: jei užbrauktume pirmą skaitmenį ir jį pridėtume prie paskutiniojo (žr. lygybes lenktiniuose skliaustuose),— vėl gautume vieną iš skaičiaus 142 857 ciklinių perstatinių.

Ta pati skaičiaus 142 857 skaitmenų «karuselė» (su nedidelėmis išimtimis) bus gaunama ir toliau su aštuoniaženkliais daugybos rezultatais, jei tiktai bus užbraukiami pirmi du skaitmenys ir pridedami prie dviejų paskutiniųjų.

4) Skaičiaus 142 857 ir 7 sandauga griežtai skiriasi nuo kitų sandaugų. Ji susideda vien iš devyniukių:

$$142\,857 \times 7 = 999\,999.$$

Štai ši aplinkybė ir nušviečia tiek paties skaičiaus 142 857, tiek ir jo «paslaptingųjų» savybių kilmę. Ar tik nebus jis trupmenos $\frac{1}{7}$, verčiant ją dešimtaine, periodas?

Dalijame 1 iš 7:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ \hline 10 & 0{,}142857 \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 1 & \end{array}$$

Paskutinė liekana yra vėl skaičius 1, vadinasi, toliau dalijant, dalmenyje pasikartos tie patys skaitmenys ir ta pačia tvarka. Tai ir yra periodinė trupmena, tai yra tokia begalinė trupmena, kurios dešimtainių ženklų sekoje pastebimas

(pradedant tam tikru skaitmeniu) tam tikros skaitmenų grupės pasikartojimas.

Spėjimas pasiteisino: skaičius 142 857 iš tikrųjų yra trupmenos $^1/_7$, verčiant ją dešimtaine, periodas. Kad sužinotume, kodėl šio skaičiaus sandaugos iš 2, 3, 4, 5 ir 6 yra jo skaitmenų cikliniai perstatiniai, grįžkime prie dalybos 1 iš 7. Visą trupmenos $^1/_7$ pavertimo dešimtaine procesą galima suskaidyti į šiuos etapus:

$$\frac{1}{7}=0{,}1+\frac{3}{7}\cdot10^{-1}=0{,}14+\frac{2}{7}\cdot10^{-2}=0{,}142+\frac{6}{7}\cdot10^{-3}=$$
$$=0{,}1428+\frac{4}{7}\cdot10^{-4}=0{,}14285+\frac{5}{7}\cdot10^{-5}=0{,}142857+$$
$$+\frac{1}{7}\cdot10^{-6}=\ldots$$ (toliau pasikartoja tie patys skaitmenys). Iš čia aišku, kad, trupmeną $^3/_7$ verčiant dešimtaine, periodas prasidės skaitmeniu, esančiu skaičiuje 1 428 571 428 571 4... už skaitmens 1, tai yra periodas bus 428 571; tas pats skaičius, aišku, turi būti skaičiaus 142 857 sandauga iš 3, nes $\frac{3}{7}=\frac{1}{7}\cdot3$.

Toliau, trupmeną $^2/_7$ verčiant dešimtaine, periodas prasidės skaitmeniu, esančiu skaičiuje 14 285 714 285 714... už skaitmenų 1 ir 4, tai yra periodas bus 285 714; tas pats skaičius, aišku, turi būti ir skaičiaus 142 857 sandauga iš 2, nes $\frac{2}{7}=\frac{1}{7}\cdot2$ ir t. t.

Taip pat nesunku išaiškinti, kodėl skaičiaus 142 857 sandauga iš 7 susideda vien iš devyniukių. Tai yra todėl, kad dešimtainė trupmena su be galo pasikartojančiomis po kablelio devyniukėmis laikoma lygia 1, tai yra $1=0{,}999\,999\ldots$, o trupmenos $^1/_7$ sandauga iš 7 taip pat lygi 1.

5) Visiškai tokias pat savybes turės bet kurios kitos periodinės trupmenos «p i l n a s» periodas. Periodas vadinamas *pilnu,* jei jis susideda iš didžiausio galimo skaitmenų skaičiaus.

Jei trupmena $\frac{a}{b}$ verčiama periodine, tai jos periodas gali turėti ne daugiau kaip $b-1$ skaitmenų. Ir tikrai, dalijant liekana visada turės būti mažesnė už daliklį, tačiau sveikų

teigiamų skaičių, mažesnių už b, yra tiktai baigtinis skaičius, būtent 1, 2, 3 ..., $b-1$.

Kiekvienas tų skaičių gali būti dalybos a iš b liekana ir kiekvieną jų atitinka kuris nors dalmens skaitmuo. Toliau galimas tiktai liekanų pasikartojimas, taigi ir dalmens skaitmenų pasikartojimas. Iš čia ir seka, kad periode didžiausias galimas skaitmenų skaičius yra vienetu mažesnis už vardiklio skaitinę reikšmę. Trupmenoje $^1/_7$ kaip tik ir buvo gautas šis periodo maksimalus ilgis (6 skaitmenys).

Tačiau ne kiekviena trupmena turi pilną periodą. Pavyzdžiui, trupmenos $\frac{1}{39}$ periodas turi ne 38 skaitmenis, o tiktai 6:

$$\frac{1}{39}=0{,}025641\ 025641\ \dots$$

Trupmenų $\frac{1}{17}$ ir $\frac{1}{29}$ periodai pilni:

$$\frac{1}{17}=0{,}(0588235294117647),$$

$$\frac{1}{29}=0{,}(0344827586206896551724137931).$$

Pirmajam — 16 skaitmenų, antrajam — 28. Vadinasi, skaičiai, sudaryti iš tų periodų skaitmenų, turi tas pačias savybes, kaip ir skaičius 142 857.

345. Momentalios daugybos skridinys

Tai pačiai «ciklinių» skaičių šeimai, kaip ir skaičius 142 857 (žr. 344 užd.), priklauso skaičius

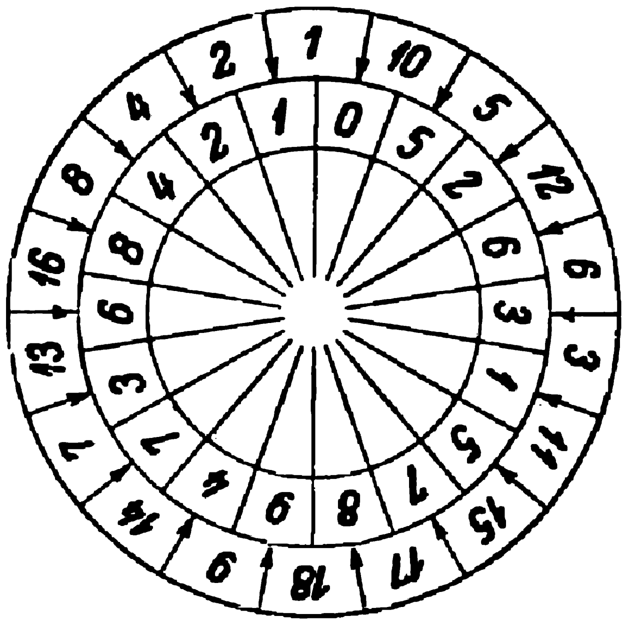
$$M=052\,631\,578\,947\,368\,421.$$

Skridinio, atvaizduoto 210 piešinyje, pagalba jis gali būti «momentaliai» padaugintas iš bet kurio sveiko skaičiaus ribose nuo 1 iki 18.

Ant 210 piešinyje atvaizduoto skridinio išorinio žiedo yra išdėlioti visi aštuoniolika daugiklių. Ant vidinio žiedo — visi dauginamojo M skaitmenys; tie patys skaitmenys sudaro ir kiekvieną iš aštuoniolikos sandaugų.

Norint perskaityti skaičiaus M daugybos iš bet kurio išorinio žiedo skaičiaus rezultatą, reikia pilnai apeiti vidinį žiedą, pradedant nuo skaitmens, kurį nurodo artimiausia rodyklė, esanti daugiklio d e š i n ė j e, jei žiūrėtume į skaitmenį iš skridinio centro. Skaityti reikia pagal laikrodžio rodyklę.

Pavyzdžiui, artimiausia dešinėje skaičiaus 14, esančio ant išorinio žiedo, rodyklė rodo į skaitmenį 7. Tai reiškia, kad skaičius 736 842 105 263 157 894 yra skaičiaus *M* daugybos iš 14 rezultatas. Atlikite dar keletą skaičiaus *M* daugybų.



210 pieš.

Skaičiaus *M* sandauga iš 19 jau visiškai kitokia; ji susideda vien iš devyniukių ir todėl jūs tuojau nuvokiate, kad skaičius *M* yra trupmenos $^1/_{19}$, ją verčiant dešimtaine, periodas. Tos trupmenos periodas pasirodė esąs «pilnas» (turi 18 skaitmenų), vadinasi, jis turi «ciklo» savybę (tų pačių skaitmenų pasikartojimą), aprašytą 344 uždavinyje, kuria ir paaiškinama mūsų skridinio «paslaptis».

Paruoškite iš kartono dar dešimtį įvairių «momentalios daugybos skridinių» su kitų trupmenų periodais ir demonstruokite draugams savo greitojo skaičiavimo «fenomenalius gabumus».

346. Proto gimnastika

Pamėginkite «mintinai» padauginti 142 857, pavyzdžiui, iš 493 arba iš bet kurio kito triženklio ar dviženklio skaičiaus. Nemanykite, kad tai labai sunku. Nereikia pasižymėti kuriais nors ypatingais skaičiavimo gabumais,

kad galėtumėte atsakymą duoti per vieną minutę, o įgudus — dar greičiau.

Prisiminkite skaičiaus 142 857 daugybos iš kurio nors dviženklio ar triženklio skaičiaus savybę: jei septyniaženklėse sandaugose užbrauktume vieną, o aštuoniaženklėse ir devyniaženklėse sandaugose — du ir tris pirmuosius skaitmenis ir pridėtume juos prie paskutinių atitinkamos sandaugos skaitmenų, tai gautume vieną iš ciklinių skaičiaus 142 857 perstatinių (žr. 344 užd.). Skaičius 142 857 yra trupmenos $^1/_7$, ją verčiant dešimtaine, periodas. Vadinasi, skaičiaus 142 857 daugyba iš 493 suvedama į skaičiaus 493 daugybą iš $^1/_7$ ir į rezultato pavertimą periodine trupmena.

Kaip tuos veiksmus atlikti «mintinai»?

Iš pradžių atskirkite trupmenos $^{493}/_7$ sveikąją dalį. Tai bus 70; 70 parašote kaip rezultato p i r m u s d u skaitmenis. Lieka trupmena $^3/_7$, kitaip tariant, trupmenos $^1/_7$ periodas (tai yra 142 857), padaugintas iš 3.

Yra žinoma (žr. 344 užd.), kad šiuo atveju gaunamas vienas iš ciklinių skaičiaus 142 857 perstatinių, vadinasi, uždavinys suvedamas į tai, kad reikia nustatyti pirmąjį rezultato skaitmenį. Paprasčiausia jį rasti kaip pirmąjį po kablelio skaitmenį, dalijant 3 iš 7; aišku, tai bus skaitmuo 4.

(Pirmąjį rezultato skaitmenį galima nustatyti ir kitu būdu: pagal skaičiaus 142 857 sandaugos iš 3 paskutinį skaitmenį. Kadangi $3 \cdot 7 = 21$, tai paskutinis sandaugos skaitmuo 1, vadinasi, pirmas ieškomojo periodo skaitmuo bus tas, kuris skaičiuje 142 857 eina po skaitmens 1, tai yra 4.)

Rastas skaitmuo 4 nustato visą periodo skaitmenų eilę: 428 571. Tęskite ieškomojo skaičiaus sudarymą: prie anksčiau parašytų dviejų pirmųjų rezultato skaitmenų, tai yra prie 70, iš dešinės prirašykite 4 285, o iš 71, kuris užbaigia periodą, atimkite pirmųjų dviejų rezultato skaitmenų sudarytą skaičių 70; tai jums duos ieškomos sandaugos 142 857 iš 493 paskutinius du skaitmenis (01). Taigi galutinai,

$$142\,857 \times 493 = 70\,428\,501.$$

To mintinos daugybos pavyzdžio aprašymas truko ilgai, bet jį atlikti galima iš tikrųjų nepaprastai greitai.

Išsiaiškinę metodo esmę ir pasipraktikavę (tai bus gera proto gimnastika), jūs galite savo dar nepainformuotus draugus nustebinti skaičiavimo greitumu.

Užrašykite ant popieriaus lapelio dauginamąjį 142 857, o draugui pasiūlykite parašyti bet kurį daugiklį iš dviejų ar trijų skaitmenų. Po neilgo galvojimo jūs parašote užbaigtą daugybos rezultatą.

Tegul reikia, pavyzdžiui, padauginti 142 857 iš 816. Mintinai perdirbame trupmeną $^{816}/_7$; $^{816}/_7 = 116^4/_7$; kol kas užrašome 116. Pirmas tolesnės rezultato dalies skaitmuo 5 (kaip pirmasis 4 : 7 dalmens skaitmuo po kablelio). Tas skaitmuo nustato kitų eilę: 571 428, tačiau nuo paskutinių skaitmenų atimame anksčiau rastą 116 ir liekaną 571 312 prirašome prie 116. Gauname:

$$142\,857 \times 816 = 116\,571\,312,$$

ir jūsų «nepaprasto skaičiuotojo» gabumai bus visiškai pripažinti.

Gali atsitikti taip, kad daugiklis iš 7 dalijasi be liekanos. Išnagrinėkime tą atvejį pavyzdžiu: 142 857 $\times$ 378. Turime $^{378}/_7 = 54 = 53^7/_7$; pirmieji rezultato skaitmenys: 53. Skaičiaus 142 857 sandauga iš 7 susideda, kaip žinome, iš 6 devyniukių. Mintinai atimame 53 iš 999 999 ir skirtumą prirašome skaičiaus 53 dešinėje. Gauname:

$$142\,857 \times 378 = 53\,999\,946.$$

347. Skaitmenų ornamentai

Skaitmenys, jungdamiesi skaičiuose ir pagal mūsų valią dalyvaudami matematiniuose veiksmuose, sudaro kartais labai įmantrias ir savotiškai gražias skaičių kombinacijas, primenančias snaigių ant lango stiklo kristalinius ornamentus.

I. Pažvelkite, pavyzdžiui, į šiuos pačius paprasčiausius daugybos veiksmus, atliktus teisingai, tačiau savotiškai:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}77\\77\end{array}\\ \hline 49\\ 4949\\ 49\\ \hline 5929 \end{array} \quad \text{arba} \quad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}77\\77\end{array}\\ \hline 7\\ 777\\ \hline 847 \times 7 = 5\,929 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
666 \\
\times\ 666 \\
\hline
36 \\
3636 \\
363636 \\
3636 \\
36 \\
\hline
443556
\end{array}
$$

arba

$$
\begin{array}{r}
666 \\
\times\ 666 \\
\hline
6 \\
666 \\
66666 \\
\hline
73926 \times 6 = 443556
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
777777777777 \\
\times\ 777777777777 \\
\hline
49 \\
4949 \\
494949 \\
49494949 \\
4949494949 \\
494949494949 \\
49494949494949 \\
4949494949494949 \\
494949494949494949 \\
49494949494949494949 \\
4949494949494949494949 \\
494949494949494949494949 \\
4949494949494949494949 \\
49494949494949494949 \\
494949494949494949 \\
4949494949494949 \\
49494949494949 \\
494949494949 \\
4949494949 \\
49494949 \\
494949 \\
4949 \\
49 \\
\hline
604938271603728395061729
\end{array}
$$

arba

$$
\begin{array}{r}
777777777777 \\
\times\ 777777777777 \\
\hline
7 \\
777 \\
77777 \\
7777777 \\
777777777 \\
77777777777 \\
7777777777777 \\
777777777777777 \\
77777777777777777 \\
7777777777777777777 \\
777777777777777777777 \\
77777777777777777777777 \\
\hline
86419753086246913580247 \\
\times\ 7 \\
\hline
604938271603728395061729
\end{array}
$$

II. Dar 8 sandaugos:

$$1\,738 \times 4 = 6\,952, \quad 483 \times 12 = 5\,796,$$
$$1\,963 \times 4 = 7\,852, \quad 297 \times 18 = 5\,346,$$
$$198 \times 27 = 5\,346, \quad 157 \times 28 = 4\,396,$$
$$138 \times 42 = 5\,796, \quad 186 \times 39 = 7\,254.$$

Dauginamasis, daugiklis ir sandauga kiekvienu atveju turi 9 s k i r t i n g u s skaitmenis.

III. Veiksmų rezultatas išreiškiamas tais pačiais skaitmenimis:

$$42:3=4\cdot3+2, \qquad \sqrt{121}=12-1,$$
$$63:3=6\cdot3+3, \qquad \sqrt{64}=6+\sqrt{4},$$
$$95:5=9+5+5, \qquad \sqrt{49}=4+\sqrt{9}=9-\sqrt{4},$$
$$(2+7)\cdot2\cdot16=272+16, \qquad \sqrt{169}=16-\sqrt{9}=\sqrt{16}+9,$$
$$5^{6-2}=625, \qquad \sqrt{256}=2\cdot5+6,$$
$$(8+9)^2=289, \qquad \sqrt{324}=3(2+4),$$
$$2^{10}-2=1\,022, \qquad \sqrt{11\,881}=118-8-1,$$
$$2^{8-1}=128, \qquad \sqrt{1\,936}=-1+9+36,$$
$$4\cdot2^3=4^3:2=34-2, \qquad \sqrt[3]{1\,331}=1+3+3+1+3.$$

Sugalvokite analoginius gražius pavyzdžius.

IV. Štai mūsų snaigės-skaitmenys sudarė tokį «ornamentą»: skaičiaus sandaugą iš jo skaitmenų sumos

$$37 \times (3+7).$$

Staiga pirmas dauginamasis «ištirpo», o tai, kas liko, pavirto kubų suma: 3^3+7^3, ir — įsivaizduokit — rezultatas nepasikeitė:

$$37 \times (3+7) = 3^3 + 7^3.$$

Pažiūrėkite: dar vienas skaičius dauginamas iš savo skaitmenų sumos:

$$48 \times (4 + 8).$$

Su juo įvyksta visiškai tas pats: pirmas dauginamasis dingsta, likusieji pakeičiami kubų suma: $4^3 + 8^3$, o rezultatas nepasikeičia:

$$48 \times (4 + 8) = 4^3 + 8^3.$$

O štai iš karto keturi analoginiai «ornamentai»:

$$147 \times (14 + 7) = 14^3 + 7^3,$$
$$148 \times (14 + 8) = 14^3 + 8^3,$$
$$111 \times (11 + 1) = 11^3 + 1^3,$$
$$123 \times (1 + 2 + 3) = 1^3 + 2^3 + 3^3.$$

V. Dar dvi snaigės-skaitmenys 1 ir 6 sudarė skaičių

$$16 = 4^2.$$

Ir štai tarp skaitmenų 1 ir 6 įsiterpė tokia «snaigė»: 15. Susidarė naujas skaičius 1 156; jis taip pat kvadratas:

$$1\,156 = 34^2.$$

Vėl nukrinta tokia pati «snaigė» 15 ir pakliūva į patį skaičiaus 1 156 užrašo vidurį. Dabar susidarė skaičius 111 556, kuris, kaip ir anksčiau, yra tikslus kvadratas:

$$111\,556 = 334^2.$$

Snaigė po snaiges krinta skaičiai 15, ir kiekvienas taikliai pataiko į centrinę skaičiaus užrašo dalį. Skaičius nuo to «pailgėja», tačiau vis tiek, kiek besitęstų «skaitmenų lietus», yra kvadratas:

$$11\,115\,556 = 3\,334^2,$$
$$1\,111\,155\,556 = 33\,334^2,$$
$$111\,111\,555\,556 = 333\,334^2 \text{ ir t. t.}$$

Procesas, matyt, vyksta dėsningai, tačiau, kad visiškai įsitikintume jo dėsningumu, reikia, žinoma, įrodyti, jog bet kuris skaičius, kuriame n vyresniųjų skilčių (kur n — bet kuris natūrinis skaičius) yra užimtos skaitmeniu 1, dar $(n-1)$ tolesnių skilčių užimtos skaitmeniu 5, o paskutinė skiltis — vienetų skiltis, užimta skaitmeniu 6, tai yra skaičius

$$\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}\underbrace{55\ldots5}_{(n-1) \text{ kartų}}6$$

yra tikslus tam tikro sveiko skaičiaus kvadratas. Tai įrodyti galima įvairiai. Truputis nuovokos, ir galima gauti palyginti trumpą įrodymą.

Tiriamąjį skaičių sumažinkime 1, kurį prirašykime kaip atskirą dėmenį. Tada skaičius įgaus pavidalą

$$\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}\underbrace{55\ldots5}_{n \text{ kartų}}+1.$$

Kai $n=1$, tai bus $15+1=16$, kai $n=2$; tai bus $1\,115+$ $+1=1\,156$ ir t. t.

Toliau pastebime, kad skaičių $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}$ galima išreikšti skaičiaus 10 laipsnių suma plius 1:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}=10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1.$$

Jei tai aišku, tai vėl imkime tiriamąjį skaičių ir pertvarkykime taip:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}\underbrace{55\ldots5}_{n \text{ kartų}}+1=\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ kartų}}+\underbrace{55\ldots5}_{n \text{ kartų}}+1=$$

$$=\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}\cdot10^n+5\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}+1=\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ kartų}}\cdot(10^n+5)+$$

$$+1=(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)(10^n+5)+1.$$

Reiškinys pirmuose skliaustuose pertvarkomas pagal formulę

$$10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1=\frac{10^n-1}{10-1}$$

(kai kurias žinias apie tą formulę žr. XI skyriuje «Skaičių dalumas», 258 psl.), tada

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ kartų}}\underbrace{55\ldots5}_{n\text{ kartų}}+1=\frac{(10^n-1)(10^n+5)}{10-1}+1=$$
$$=\frac{10^{2n}+4\cdot10^n+4}{9}=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2,$$

o tai ir reikėjo įrodyti.

Taigi, kaip beišaugtų mažasis «skaičių kristalėlis» 16 nuo daugkartinio skaičiaus 15 įrašymo į jo vidurį, skaičius $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ kartų}}\underbrace{55\ldots5}_{n\text{ kartų}}6$ visada bus skaičiaus $\frac{10^n+2}{3}$ kvadratas.

Įrodykite patys, kad

1) $\frac{10^n+2}{3}$ — sveikas skaičius,

2) $\frac{10^n+2}{3}=\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ kartų}}+1,$

kai n — bet kuris sveikas ir teigiamas skaičius.

348. Vienas už visus...

I. Norint parašyti visus skaičius nuo 1 iki 25, pakanka, žinoma, savo žinioje turėti visus 10 skaitmenų: 0, 1, 2, ..., 9. Pakanka, bet nebūtina. Norint galima apsieiti iš viso vien tik su skaitmeniu 2, be to, panaudojant jį l y g i a i penkis kartus ir naudojantis visokiais matematiniais ženklais. Laisvalaikiu užsiiminėkite šia proto gimnastika.

Štai, pavyzdžiui, pirmoji skaičių dešimtis:

$$1 = 2 + 2 - 2 - \frac{2}{2}, \qquad 6 = 2 + 2 + 2 + 2 - 2,$$
$$2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2, \qquad 7 = 22 : 2 - 2 - 2,$$
$$3 = 2 + 2 - 2 + \frac{2}{2}, \qquad 8 = 2 \times 2 \times 2 + 2 - 2,$$
$$4 = 2 \times 2 \times 2 - 2 - 2, \qquad 9 = 2 \times 2 \times 2 + \frac{2}{2},$$
$$5 = 2 + 2 + 2 - \frac{2}{2}, \qquad 10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

Pagal pateiktą pavyzdį išreikškite ir visus kitus 15 skaičių (nuo 11 iki 25 imtinai).

Skaičių 26 išreikšti penkių dvejetų pagalba nepavyks. Dar kartą primenu, kad kiekvienam skaičiui išreikšti turi būti panaudotos lygiai penkios dvejukės.

II. Skaitmens 4 pagalba, sutarus jį panaudoti būtinai k e t u r i s kartus, išreikškite v i s u s sveikus skaičius ribose nuo 1 iki 10.

III. Skaitinių galvosūkių mėgėjams apibendrinsime pirmesnįjį uždavinį.

Reikia išreikšti sveiką skaičių lygiai keturiais b e t k u r i a i s vienodais skaitmenimis, jungiant juos matematiniais ženklais. Tai reiškia: reikia išreikšti skaičių keturiais skaitmenimis taip, kad, pakeitus tuos skaitmenis bet kurių kitų vienodų skaitmenų ketvertu (išskyrus nulį), gautųsi tas pat skaičius.

Imkime, pavyzdžiui, skaičiaus 3 išraišką keturiomis ketveriukėmis:

$$3 = (4 + 4 + 4) : 4.$$

Šioje skaičiaus 3 išraiškoje skaitmuo 4 gali būti pakeistas bet kuriuo kitu skaitmeniu (išskyrus nulį). Pavyzdžiui,

$$3 = (5 + 5 + 5) : 5 \quad \text{arba} \quad 3 = (8 + 8 + 8) : 8$$

ir bendrai

$$3 = (n + n + n) : n.$$

Tačiau skaičiaus 5 išraiškoje keturių ketveriukių pagalba: $5 = (4 \times 4 + 4) : 4$ skaitmens 4 negalima pakeisti kuriuo

nors kitu skaitmeniu. Vadinasi, reikia ieškoti kitos skaičiaus 5 išraiškos. Cia leidžiama pavartoti sudėties, atimties, daugybos ir dalybos ženklus, skliaustus. Jei pasirodytų, kad tų ženklų nepakanka, tai dar leidžiama pavartoti:

1) kvadratinės šaknies ženklą: $\sqrt{\ }$ (turint galvoje šaknies aritmetinę reikšmę, tai yra tiktai jos teigiamą reikšmę iš teigiamo skaičiaus: $\sqrt{9}=3$, bet ne -3);

2) faktorialo ženklą: !. Tas ženklas rašomas skaičiaus dešinėje ir reiškia visų natūrinių skaičių nuo 1 iki to skaičiaus imtinai sandaugą; pavyzdžiui,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$$

bendrai

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n;$$

3) tašką prieš skaičių (eilutės lygyje), pavyzdžiui, .4; tašką prieš skaičių ir virš skaičiaus, pavyzdžiui, $.\dot{4}$. Pirmuoju simboliu kai kuriose šalyse priimta reikšti dešimtainę trupmeną: $.4 = 0{,}4$, o antruoju — periodinę: $.\dot{4} = 0{,}(4)$. Primenu, kad periodinė trupmena gali būti tiksliai pakeičiama paprastąja trupmena: $0{,}(4) = \frac{4}{9}$, $0{,}(n) = \frac{n}{9}$.

Pagalvokite apie tai, kaip, naudojantis nurodytais matematiniais ženklais, išreikšti sveiką skaičių bet kurių keturių vienodų skaitmenų pagalba.

P a v y z d ž i a i.

$$1 = (n : n) \times (n : n),$$

$$5 = \frac{n + .\dot{n}}{.\dot{n} + .n}, \quad 16 = \frac{n}{.n} + \left(\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}}\right)!,$$

kur n — bet kuris skaitmuo nuo 1 iki 9.

Tegul pastarajame pavyzdyje $n = 7$, tada

$$\frac{7}{.7} + \left(\sqrt{\frac{7}{.\dot{7}}}\right)! = \frac{7}{0{,}7} + \left(\sqrt{\frac{7}{0{,}(7)}}\right)! = 10 + (\sqrt{9})! =$$

$$= 10 + 3! = 10 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16.$$

Patys sugalvokite, kaip visus sveikus skaičius nuo 1 iki 21 išreikšti bet kurių keturių vienodų skaičių (išskyrus nulį) pagalba.

Iš nurodytų skaičių aš kol kas neradau tiktai skaičiaus 14 reikalaujamos išraiškos. Jei sugalvosite, — praneškite.

349. ... ir visi už vieną

I. Jei vienas skaitmuo 2, pavartotas ne daugiau kaip 5 kartus, arba vienas skaitmuo 4, pavartotas ne daugiau kaip keturis kartus, gali pakeisti bet kurį iš skaitmenų nuo 1 iki 9, tai ir visa ši vieninga skaitmenų šeima nelieka skolinga.

Dalyvaudami iš karto visa šeima (tik be nulio), jie gali pakeisti bet kurį savo šeimos skaitmenį.

Štai kaip jie pakeičia, pavyzdžiui, 2 ir 4:

$$2=\frac{13\,458}{6\,729}, \qquad 4=\frac{15\,768}{3\,942}$$

Kiekviena iš šių netikrųjų trupmenų turi visus skaitmenis nuo 1 iki 9, tačiau kiekvieną tik po vieną kartą.

Sudarydami analogines trupmenas iš tų pačių skaitmenų ir panaudodami kiekvieną skaitmenį tiktai po vieną kartą, jūs galite sudaryti skaičius 3, 5, 6, 7, 8 ir 9, tai yra visus kitus vienaženklius skaičius, išskyrus 1.

Vienetui išreikšti devynių skaitmenų pagalba reikia sugalvoti ypatingą būdą.

Neskubėkite žvelgti į atsakymą, iš pradžių atsidėję pamėginkite rasti jį patys.

II. Gražinkime tremtinį (nulį) į kitų skaitmenų šeimą. Dabar d e š i m t i e s įvairių skaitmenų pagalba galima sudaryti šešias tokias trupmenas, kad kiekviena jų būtų lygi 9.

Tris trupmenas sudarykite patys, o kitos trys yra tokios:

$$9=\frac{97\,524}{10\,836}=\frac{95\,823}{10\,647}=\frac{57\,429}{06\,381}$$

Vienetą, aišku, sudaryti iš dešimties skaitmenų taip pat lengva (sudarykite!). Galima pamėginti iš visų dešimties skaitmenų sudaryti ir kitus vienaženklius skaičius.

350. Skaitiniai radiniai

Be galo daug įvairiausių tarpusavio ryšių yra tarp skaičių. Vieni iš jų svarbūs ir yra rimtų tyrimų objektas. Kiti — mažiau esmingi, jų savybės siauros, retai pasitaikančios, bet kaip tik savo nepaprastumu jie kartais ir patrauklūs. Juos pavadinsime «skaitiniais radiniais».

I. Tarp sveikų skaičių surasta keletas tokių porų, kur kiekvienos poros skaičių suma ir sandauga skiriasi tiktai skaitmenų išdėstymu:

$$\begin{aligned} 9+9&=18, & 9\times 9&=81,\\ 24+3&=27, & 24\times 3&=72,\\ 47+2&=49, & 47\times 2&=94,\\ 263+2&=265, & 263\times 2&=526,\\ 497+2&=499, & 497\times 2&=994. \end{aligned}$$

II. Keletas dviženklių skaičių porų įstabios visai kita savybe: sandauga, sudaryta iš skaičių poros, nepasikeis, jei kiekviename iš dauginamųjų perstatysime skaitmenis.

Pažvelkite:

$$\begin{aligned} 12\cdot 42&=21\cdot 24, & 24\cdot 63&=42\cdot 36,\\ 12\cdot 63&=21\cdot 36, & 24\cdot 84&=42\cdot 48,\\ 12\cdot 84&=21\cdot 48, & 26\cdot 93&=62\cdot 39,\\ 13\cdot 62&=31\cdot 26, & 36\cdot 84&=63\cdot 48,\\ 23\cdot 96&=32\cdot 69, & 46\cdot 96&=64\cdot 69. \end{aligned}$$

Yra dar 4 poros dviženklių skaičių, turinčių tą savybę. Raskite jas.

III. O štai dar trys poros paeiliui einančių skaičių, kurių k v a d r a t a i parašomi tais pačiais skaitmenimis, tik skirtinga tvarka:

$$\begin{aligned} 13^2&=169, & 157^2&=24\,649, & 913^2&=833\,569,\\ 14^2&=196, & 158^2&=24\,964, & 914^2&=835\,396. \end{aligned}$$

IV. Ar nėra tarp šešiaženklių skaičių bent vieno, kuris turėtų šias savybes:

1) jis turi būti jo paties skaitmenų sumos ketvirtasis laipsnis (iš čia seka, kad jis turi būti ir tikslus tam tikro skaičiaus kvadratas);

2) jei suskaidytume jį į tris skiltis po 2 skaitmenis, tai gautųjų trijų dviženklių skaičių suma taip pat turėtų būti tikslus kvadratas;

3) jei užrašytume jį atvirkščia skaitmenų tvarka ir po to suskaidytume į 3 skiltis po 2 skaitmenis, tai ir tų trijų dviženklių skaičių suma turėtų būti tikslus kvadratas.

Atlikus eilę skaičiavimų, toks skaičius buvo surastas. Štai jis:

234 256.

Patys patikrinkite, ar jis turi visas reikalaujamas savybes.

V. Skaičius, panašiai kaip žvaigždes, mes grupuojame į įvairius skaičių «žvaigždynus».

«Žvaigždynas» iš šešių skaičių 2, 3, 7, 1, 5, 6 įdomus tuo, kad pirmų trijų skaičių suma yra lygi paskutiniųjų trijų sumai; taip pat lygios ir jų kvadratų sumos:

$$2 + 3 + 7 = 1 + 5 + 6,$$
$$2^2 + 3^2 + 7^2 = 1^2 + 5^2 + 6^2.$$

Galima sakyti, kad tie skaičiai 2, 3, 7, 1, 5 ir 6 pakeičia šešis nežinomuosius x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 lygčių sistemoje

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \end{cases}$$

Yra be galo daug ir kitų skaičių, kurie patenkina šią lygčių sistemą. Įdomu, kaip greitai jums pavyktų parinkti dar bent vieną grupę iš šešių tinkamų skaičių?

Dar ryškesni «žvaigždynai» iš aštuonių skaičių

0, 5, 5, 10, 1, 2, 8, 9

ir iš dešimties skaičių

1, 4, 12, 13, 20 2, 3, 10, 16, 19.

Kiekviename iš jų pirmos pusės skaičių suma lygi antros pusės skaičių sumai, be to, kaip ir pirmesniame pavyzdy-

je, lygios tų skaičių kvadratų sumos; dar daugiau, lygios net tų skaičių kubų sumos:

$$\begin{cases} 0+5+5+10=1+2+8+9, \\ 0^2+5^2+5^2+10^2=1^2+2^2+8^2+9^2, \\ 0^3+5^3+5^3+10^3=1^3+2^3+8^3+9^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+4+12+13+20=2+3+10+16+19, \\ 1^2+4^2+12^2+13^2+20^2=2^2+3^2+10^2+16^2+19^2, \\ 1^3+4^3+12^3+13^3+20^3=2^3+3^3+10^3+16^3+19^3. \end{cases}$$

Be abejo, yra ir kitos grupės skaičių, surištų lygiai tokiais pat tarpusavio ryšiais, bet kaip tokius skaičius parinkti?

Į visų čia pateiktų «skaičių žvaigždynų» «paslaptį» pirmą kartą įsiskverbė, dar prieš 200 metų (1750—1751 m.), du Peterburgo akademikai: Goldbachas ir genialusis Euleris. Jie atrado eilę formulių, tinkamų kai kurioms lygčių sistemoms spręsti sveikais skaičiais, skyrium imant, ir toms, kurios atveda prie paminėtų «skaičių žvaigždynų».

Pavyzdžiui, parinkti skaičiams, sudarantiems pirmą «žvaigždyną»:

$$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3,$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2,$$

pasirodė tinkamos tokios formulės:

$$x_1=a+c, \qquad x_2=b+c, \qquad x_3=2a+2b+c$$

ir

$$y_1=c, \qquad y_2=2a+b+c, \qquad y_3=a+2b+c.$$

Tik reikia tose formulėse pakeisti raides a, b ir c bet kuriais skaičiais, ir jūs gausite tiek to «žvaigždyno» skaičių, kiek panorėsite.

Skyrium imant, kai $a=1$, $b=2$ ir $c=1$, gaunamas «žvaigždynas», pateiktas pirmame pavyzdyje: 2, 3, 7, 1, 5, 6.

Sudarykite kitas pirmo «žvaigždyno» skaičių grupes, suteikdami raidėms a, b ir c įvairias reikšmes.

Euleris ir Goldbachas davė pirmo «žvaigždyno» skaičiams dar ir kitą formulių grupę:

$$x_1 = ad, \quad x_2 = ac + bd, \quad x_3 = bc,$$
$$y_1 = ac, \quad y_2 = ad + bc, \quad y_3 = bd,$$

kur a, b, c ir d — taip pat bet kokie skaičiai.

Skaičiams, sudarantiems antrą «žvaigždyną»:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3, \end{array}\right.$$

parinkti tinkamos šios formulės:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = 3a + 3b, \quad x_4 = 2a + 4b,$$
$$y_1 = 2a + b, \quad y_2 = a + 3b, \quad y_3 = 3a + 4b, \quad y_4 = 0.$$

Vėl pakeiskite raides a ir b bet kuriais skaičiais, ir jūs gausite tiek antro «žvaigždyno» skaičių, kiek panorėsite.

Naudinga patikrinti čia pateiktas formules ne tiktai atskirais pavyzdžiais, bet ir bendru pavidalu, pakeičiant kiekvienoje lygtyje visus nežinomuosius jų reikšmėmis.

VI. Po Eulerio atsirado daug kitų skaitinių radinių, surištų su vadinamuoju lygčių sprendimu sveikais skaičiais*, kurio pavyzdžius jūs radote XII skyriuje (žr. 341). Darbas, atkaklumas ir matematinė nuovoka visą laiką papildo mūsų skrynelę su «skaičių žvaigždynais» naujais, įdomiais pavyzdžiais.

Ar nenorite susipažinti, pavyzdžiui, su vienu iš naujų, labai gausių «žvaigždynų»? Šešių skaičių: 1, 6, 7, 17, 18 ir 23 visų laipsnių, nuo pirmojo iki penktojo, suma lygi kitų šešių skaičių: 2, 3, 11, 13, 21 ir 22 tų pačių laipsnių sumai:

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 =$$
$$= 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22,$$

* Žr. taip pat: А. О. Гельфонд, Решение уравнений в целых числах, Популярные лекции по математике, вып. 8, Гостехиздат, 1952. (Lietuvių kalba ši knygelė neišleista. *Red.*)

$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2,$$
$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3,$$
$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4,$$
$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5.$$

Kitų šio «žvaigždyno» skaičių gavimo «raktas» yra tapatybė

$$a^n + (a + 4b + c)^n + (a + b + 2c)^n + (a + 9b + 4c)^n + (a + 6b + 5c)^n + (a + 10b + 6c)^n = (a + b)^n + (a + c)^n + (a + 6b + 2c)^n + (a + 4b + 4c)^n + (a + 10b + 5c)^n + (a + 9b + 6c)^n.$$

Pakeiskite čia raides a, b ir c bet kuriais skaičiais, o raidei n duokite reikšmes iš pradžių 1, paskui 2, 3, 4 ir 5, ir jūs gausite tiek kartų po 5 lygias sumas, kiek panorėsite.

VII. Jūs galite dar sudaryti gražias dviženklių skaičių su p e r s t a t y t a i s skaitmenimis kvadratų sumas. Tuo tikslu iš pradžių sudarykite dvi grupes su vienodu kiekiu tokių v i e n a ž e n k l i ų skaičių, kad pirmos grupės kvadratų suma būtų lygi antros grupės kvadratų sumai, pavyzdžiui

$$4^2 + 5^2 + 6^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2.$$

O dabar iš skaičių 4, 5, 6 ir 8, 3, 2, pirmus tris skaičius panaudodami kaip dešimtis, o paskutinius tris kaip vienetus ir jungdami juos bet kokiu būdu, sudarykite tris dviženklius skaičius. Jūs būtinai gausite tokius tris dviženklius skaičius, kurių kvadratų suma bus lygi apsuktų skaičių kvadratų sumai.

Pavyzdžiui, iš skaičių 4, 5, 6 ir 8, 3, 2 grupių galima sudaryti šias lygybes:

$$48^2 + 53^2 + 62^2 = 26^2 + 35^2 + 84^2,$$

arba

$$43^2 + 52^2 + 68^2 = 86^2 + 25^2 + 34^2 \text{ ir t. t.}$$

Šiose lygybėse visi dešinės pusės skaičiai yra apsukti kairės pusės skaičiai.

Atkreipkite dėmesį dar į tokį gražų šių lygybių bruožą: kiekvienoje iš jų skaitmenys išdėstyti simetriškai lygybės ženklo atžvilgiu.

Apibendrinant galima pasakyti, kad jei n vienaženklių skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir n kitų vienaženklių skaičių $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tarpusavy surišti lygybe

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2,$$

tai būtinai bus teisinga ir tokia lygybė:

$$(10x_1 + y_1)^2 + (10x_2 + y_2)^2 + \ldots + (10x_n + y_n)^2 = (10y_n + x_n)^2 + (10y^{n-1} + x_{n-1})^2 + \ldots + (10y_1 + x_1)^2 .$$

Kas panorės,— galės pats tai patikrinti, antroje lygybėje atskliausdamas skliaustus ir atkreipdamas dėmesį į pirmąją lygybę. Pasipraktikuokite tokias sumas sudarinėti.

Imkite, pavyzdžiui, aštuonis pirmuosius natūrinius skaičius: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8. Suvokite, kurie iš jų turi būti grupės x_1, x_2, x_3 ir x_4 skaičiai, o kurie — grupės y_1, y_2, y_3 ir y_4 skaičiai, o paskui, remdamiesi nurodyta taisykle, sudarykite kelias lygias dviženklių skaičių su perstatytais skaitmenimis kvadratų sumas.

VIII. Mūsų skrynelės su «skaičių žvaigždynais» naujiena yra ir dar painesnės dviženklių skaičių su perstatytais skaitmenimis grupės.

Pavyzdžiui,

$$13 + 42 + 53 + 57 + 68 + 97 = 79 + 86 + 75 + 35 + 24 + 31,$$
$$13^2 + 42^2 + 53^2 + 57^2 + 68^2 + 97^2 = 79^2 + 86^2 + 75^2 + 35^2 + 24^2 + 31^2,$$
$$13^3 + 42^3 + 53^3 + 57^3 + 68^3 + 97^3 = 79^3 + 86^3 + 75^3 + 35^3 + 24^3 + 31^3$$

arba

$$12 + 32 + 43 + 56 + 67 + 87 = 78 + 76 + 65 + 34 + 23 + 21,$$
$$12^2 + 32^2 + 43^2 + 56^2 + 67^2 + 87^2 = 78^2 + 76^2 + 65^2 + 34^2 + 23^2 + 21^2,$$
$$12^3 + 32^3 + 43^3 + 56^3 + 67^3 + 87^3 = 78^3 + 76^3 + 65^3 + 34^3 + 23^3 + 21^3.$$

Ištirkite, ar nėra tik ir čia ryšio tarp vienaženklių skaičių laipsnių sumų ir ieškomųjų sumų.

IX. Dar vienas radinys! Skaičius 145 gali būti išreikštas savo skaitmenų faktorialų suma (žr. 348 užd., III): $145 = 1! + 4! + 5!$. Nežinoma, ar yra dar skaičių, turinčių tą pačią savybę.

X. Yra tiktai du triženkliai skaičiai, kurių bet kuris laipsnis baigiasi tais pačiais skaitmenimis, išdėstytais ta pačia tvarka: 376 ir 625.

Iš tikrųjų,

$$376^2 = 141\,\mathbf{376}, \quad 376^3 = 53\,157\,\mathbf{376} \text{ ir t. t.,}$$
$$625^2 = 390\,\mathbf{625}, \quad 625^3 = 244\,140\,\mathbf{625} \text{ ir t. t.}$$

Kaip tie triženkliai skaičiai buvo atrasti ir kaip buvo įrodyta, kad jų tiktai du? Tai buvo konkursinis uždavinys matematinės nuovokos mėgėjams. Jis turi trumpą, tačiau, gana painų sprendimą. Išnagrinėti jį, žinoma, naudinga. Tegul n — ieškomasis skaičius. Pagal sąlygą, n^2 baigiasi tais pačiais trimis skaitmenimis. Vadinasi, skirtumas $n^2 - n$ baigiasi trimis nuliais.

Išnagrinėkime reiškinį $n^k - n$, kur k — bet kuris sveikas teigiamas skaičius. Iškelkime n už skliaustų:

$$n^k - n = n(n^{k-1} - 1).$$

Iš karto matyti, kad tas reiškinys dalijasi iš n, bet jis dalijasi ir iš $n - 1$, nes $n^{k-1} - 1$ dalijasi iš $n - 1$ (žr. 258 psl.). Vadinasi, reiškinys $n^k - n$ dalijasi iš skaičių n ir $n - 1$ sandaugos, tai yra iš $n^2 - n$. Tačiau, kadangi $n^2 - n$ baigiasi trimis nuliais, tai ir $n^k - n$ turi baigtis ne mažiau kaip trimis nuliais, tai yra n^k, kai k bet kuris sveikas ir teigiamas, turi baigtis tais pačiais trimis skaitmenimis, kaip ir n.

Vadinasi, uždavinį sprendžiant pakanka apsiriboti tiktai tais skaičiais, kurių k v a d r a t a i baigiasi tais pačiais trimis skaitmenimis.

Skaičiai n ir $n - 1$, kaip du gretimi natūriniai skaičiai,— reliatyviai pirminiai, o jų sandauga, kaip įrodyta,

turi dalytis iš 1 000, vadinasi, vienas jų turi buti lyginis ir dalytis iš 8, o antras turi būti nelyginis ir dalytis iš 125. Triženklius skaičius, patenkinančius pastarąją sąlygą, nesunku parinkti. Jų tiktai keturi: 125, 375, 625 ir 875. O jiems gretimi skaičiai tokie: 124 ir 126, 374 ir 376, 624 ir 626, 874 ir 876. Tačiau iš 8 dalijasi tik du iš jų: 376 ir 624. Taigi, jie — ieškomieji.

351. Stebėdami natūrinių skaičių seką...

1. Išdėstykime natūrinius skaičius 1, 2, 3, 4, ... trikampio forma:

```
                                  .
                                .....
                             ..........
                       50.................
                    37 51.................
                 26 38 52.......  .......
              17 27 39 53......107.......
           10 18 28 40 54......108.......
         5 11 19 29 41 55......109.......
       2 6 12 20 30 42 56......110.......
    *1 3 7 13 21 31 43 57......111.......
       4 8 14 22 32 44 58......112.......
         9 15 23 33 45 59......113.......
           16 24 34 46 60......114.......
              25 35 47 61......115.......
                 36 48 62.................
                    49 63.................
                       64.................
                             ..........
                                ....
                                  .
```

Įsižiūrėkite į šį skaičių trikampį, ir jūs, be abejo, rasite nemažai dėsningumų skaičių išdėstyme eilutėse ir stulpeliuose, ryšių tarp skaičių ir jų užimamų vietų ir pan. Ar pastebėjote, pavyzdžiui, tokius dėsningumus:

1) Apatinis kiekvieno stulpelio skaičius — stulpelio numerio kvadratas.

2) Bet kurių dviejų gretimų kurios nors eilutės skaičių sandauga yra tos pačios eilutės skaičius. Pavyzdžiui, $5 \times 11 = 55$. Abu dauginamuosius ir sandaugą jūs rasite **vienoje** eilutėje.

Nesunku nusakyti iš anksto, kurioje eilutės vietoje yra sandauga: reikia prie mažesniojo dauginamojo pridėti vienetą ir eilutės vietas pradėti skaičiuoti nuo to paties mažesniojo dauginamojo. Pavyzdžiui, dauginame: 5×11. Atskaičiuojame į dešinę šešias ($5 + 1 = 6$) vietas, pradėję skaičiuoti nuo 5, ir randame sandaugą: 55.

3) Eilutės, pažymėtos žvaigždute (*), visi skaičiai gaunami pagal formulę $n^2 - n + 1$, kur $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Toje eilutėje kiekvienas trečias skaičius po skaičiaus 3 dalijasi iš 3; kiekvienas septintas skaičius po skaičiaus 7 arba po 21 dalijasi iš 7; kiekvienas tryliktas skaičius po 13 arba po 91 dalijasi iš 13 ir t. t. Analogines savybes turi kiekvienos eilutės skaičiai.

II. Ar negalima visą natūrinių skaičių $1, 2, 3, 4, 5, \ldots n-1, n, n+1, \ldots$ seką suskaidyti į **lygių sumų poras**, nekeičiant skaičių tvarkos?

Pabandykime. Pirmoji pora iš karto krinta į akis:

$$1 + 2 = 3.$$

Tiriame tolesnius skaičius

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8.$$

Kol kas pavyksta. Dar keletas mėginimų, ir vėl pasisekimas:

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15.$$

Pastebime, kad dėmenų skaičius didėja, tačiau didėja dėsningai: kiekvieną kartą tiek kairėje lygybės pusėje, tiek ir dešinėje prisideda po vieną dėmenį, be to, kiekvienos lygybės kairėje pusėje dėmenų yra vienu daugiau, nei dešinėje. Tai patikrinkime šios sumų poros pagalba:

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24.$$

Pasitvirtina!

Dabar pažiūrėkime, kas per vienas yra kiekvienos lygių sumų poros mažiausias dėmuo (kraštinis kairėje). Stebėjimai parodo, kad jis yra tos sumos, kurioje dėmenų yra mažiau, dėmenų skaičiaus kvadratas.

Ir tikrai, dešinioji pirmos lygybės pusė susideda iš vieno skaičiaus (3), ir mažiausias tos lygybės dėmuo yra 1^2; dešinėje antros lygybės pusėje — du dėmenys $(7+8)$, ir mažiausias tos lygybės dėmuo yra 2^2; dešinėje trečios lygybės pusėje — trys dėmenys, ir mažiausias tos lygybės dėmuo yra 3^2 ir t. t.

Pastarasis dėsningumas padeda greitai parašyti porą lygių sumų, atitinkančių iš anksto numatytam dėmenų skaičiui.

Tegul, pavyzdžiui, reikia rasti 7 iš eilės einančius skaičius, patenkinančius sąlygą. Randame mažiausią dėmenį:

$$7-1=6,\quad 6^2=36.$$

Vadinasi, ieškomoji lygių sumų pora tokia:

$$36+37+38+39+40+41+42=$$
$$=43+44+45+46+47+48.$$

Taigi stebėjimai parodė, kad $n+1$ paeiliui einančių skaičių suma, kurioje mažiausias dėmuo n^2, yra lygi tolesnių n skaičių sumai. Jei pirmos sumos pirmas dėmuo n^2, tai tos sumos antras dėmuo, pagal sąlygą, vienetu didesnis, trečias dėmuo dviem didesnis, ketvirtas — trimis didesnis, $(n+1)$-as dėmuo n didesnis, negu pirmasis; vadinasi, pirmos sumos paskutinis dėmuo bus n^2+n. Iš čia antros sumos pirmas dėmuo, pagal sąlygą, n^2+n+1, antras dėmuo, kaip ir anksčiau, vienetu didesnis, trečias — dviem didesnis, n-tas dėmuo $(n-1)$ didesnis, negu pirmasis; taigi antros sumos paskutinis dėmuo bus:

$$n^2+n+1+(n-1),\ \text{arba}\ n^2+2n.$$

Galutinį mūsų stebėjimų rezultatą galima išreikšti šia algebrine forma:

$$\underbrace{n^2+(n^2+1)+(n^2+2)+\ldots+(n^2+n)}_{(n+1)\ \text{dėmenų}}=$$
$$=\underbrace{(n^2+n+1)+(n^2+n+2)+\ldots+(n^2+2n)}_{n\ \text{dėmenų}}.$$

Susipažinusieji su skaičių, sudarančių aritmetinę progresiją, sumos formule be didelių pastangų įrodys, kad ši lygybė teisinga.

III. Po sėkmingų natūrinių skaičių sumų stebėjimų nagrinėsime natūrinių skaičių kvadratų sumas.

Iš pradžių išnagrinėkime n paeiliui einančių natūrinių skaičių kvadratų sumą:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2.$$

Tai — ne progresija. Šiai sumai apskaičiuoti reikalinga speciali formulė, ir ji pateikiama algebros vadovėliuose:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Jei sudedami kvadratai tiktai lyginių arba, atvirkščiai, tiktai nelyginių natūrinės sekos skaičių, tai reikalingos kitos formulės. Visų nelyginių skaičių nuo 1 iki 9 kvadratų sumą galima apskaičiuoti, pavyzdžiui, pagal tokią formulę:

$$1^2+3^2+5^2+7^2+9^2=\frac{1}{6}(10^3-10).$$

O taikant formulę visų lyginių skaičių nuo 2 iki 10 kvadratų sumai, patogus toks jos pavidalas:

$$2^2+4^2+6^2+8^2+10^2=\frac{1}{6}(11^3-11).$$

Sudėję tas dvi lygybes, gausime tokią visų sveikų skaičių nuo 1 iki 10 kvadratų sumos formulę:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+10^2+\frac{1}{6}[10^3+11^3-(10+11)].$$

Patys išplėskite šias formules bet kuriam dėmenų skaičiui.

IV. Jei trikampio statiniai 3 ir 4, o įžambinė 5 (vadinamasis egiptiečių trikampis), tai

$$3^2+4^2=5^2.$$

Čia dviejų paeiliui einančių natūrinių skaičių kvadratų suma lygi sekančio skaičiaus kvadratui.

Dar vienas stebėjimas. XIX amžiaus gale tapytojas-žanristas N. P. Bogdanovas-Bielskis (1868—1945) nutapė paveikslą «Sunkus uždavinys», kuriame atvaizdavo

grupę kaimo mokyklos mokinių, įsigilinusių į S. A. Račinskio uždavinio, mokytojo užrašyto ant mokyklinės lentos:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} \; ?$$

«mintinį» sprendimą.

Iš tikrųjų, neiengvas uždavinys greitam «mintiniam» sprendimui, nežinant «paslapties». O «paslaptis» labai paprasta. Mat, $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$ ir $13^2 + 14^2 = 365$. Vadinasi, ieškomasis atsakymas 2.

Bet atkreipkime dėmesį į kitką. Iš aukščiau parašytų lygybių sugretinimo seka, kad

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2,$$

tai yra keleto iš eilės einančių natūrinių skaičių kvadratų suma lygi sekančių skaičių kvadratų sumai ir vėl (kaip 351 užd., II) dėmenų skaičius kairėje lygybės pusėje tiktai vienetu didesnis, nei dešinėje.

Aš numatau bent du jūsų klausimus:

1) Ar yra natūrinių skaičių tarpe dar lygių sumų porų, susidedančių iš dviejų bei vieno ir iš trijų bei dviejų dėmenų, išskyrus tuos, kurie duoda egiptiečių trikampį ir Račinskio uždavinį, ar gal tai vienintelės galimos tokios rūšies poros?

2) Ar galima sudaryti lygias iš eilės einančių natūrinių skaičių kvadratų sumas, susidedančias iš keturių ir trijų dėmenų, iš penkių ir keturių dėmenų ir bendrai iš $n + 1$ ir n dėmenų.

Be jokių papildomų žinių patys galite išspręsti tokį uždavinį:

Uždavinys. Rasti $n + 1$ iš eilės einančių skaičių, kurių kvadratų suma būtų lygi tolesnių n skaičių kvadratų sumai.

Sprendimas. Tegul x — mažiausias iš ieškomųjų skaičių; pavadinkime jį pirmuoju skaičiumi; tada pirmos dėmenų grupės antrasis skaičius bus $x + 1$, trečiasis bus $x + 2, \ldots, (n + 1)$-is skaičius bus $x + n$.

Antros grupės pirmasis skaičius bus $x + n + 1$, antrasis bus $x + n + 2$, trečiasis bus $x + n + 3, \ldots$, n-is skaičius bus $x + n + n = x + 2n$.

Išeidami iš sąlygos, sudarome lygybę

$$\underbrace{x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+n)^2}_{(n+1)\ \text{dėmenų}}=$$

$$=\underbrace{(x+n+1)^2+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n)^2}_{n\ \text{dėmenų}}. \quad (*)$$

Tolesniam šios lygybės pertvarkymui palengvinti kairėje lygybės pusėje palikime x^2, o visus kitus n dėmenų perkelkime į lygybės dešinę pusę ir sugrupuokime kaip kvadratų skirtumus:

$$x^2=[(x+n+1)^2-(x+1)^2]+[(x+n+2)^2-(x+$$
$$+2)^2]+\ldots+[(x+2n)^2-(x+n)^2].$$

Kiekvienus laužtinius skliaustus pertvarkome pagal formulę $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$x^2=\underbrace{n(2x+n+2)+n(2x+n+4)+\ldots+n(2x+n+2n)}_{n\ \text{dėmenų}},$$

arba

$$x^2=n[(\underbrace{2x+2x+\ldots+2x}_{n\ \text{dėmenų}})+(\underbrace{n+n+\ldots+n}_{n\ \text{dėmenų}})+$$
$$+(\underbrace{2+4+\ldots+2n}_{n\ \text{dėmenų}})].$$

Paskutiniuose lenktiniuose skliaustuose turime aritmetinės progresijos n narių sumą:

$$2+4+\ldots+2n=\frac{(2+2n)n}{2}=(n+1)n.$$

Tada

$$x^2=n[2xn+n^2+n(n+1)],$$

arba

$$x^2-2n^2x-n^3-n^3-n^2=0.$$

Išsprendę kvadratinę lygtį

$$x^2-2n^2x-n^2(2n+1)=0,$$

gausime

$$x_1=n(2n+1) \text{ ir } x_2=-n, \text{ kur } n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Kol kas imkime tiktai

$$x_1=n(2n+1).$$

Imkime $n = 1$, kitaip tariant, apsiribokime dešinėje lygybės (*) pusėje vienu, o kairėje dviem dėmenimis. Kai $n = 1$, $x_1 = 3$, ir mes turime:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Kai $n = 2$, dešinėje lygybės (*) pusėje bus 2 dėmenys, o kairėje — trys. Kai $n = 2$, $x_1 = 10$, ir mes turime:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

Kai $n = 3$, dešinėje lygybės (*) pusėje bus 3 dėmenys, o kairėje — keturi. Kai $n = 3$, $x_1 = 21$, ir mes turime:

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

Dabar jūs paeiliui einančių skaičių kvadratų lygių sumų sudarymo procesą galite tęsti, kiek tik norite. Antroji šaknies reikšmė $x_2 = -n$, įstatyta į lygtį (*), kai n — bet koks, atveda prie tapatybės:

$$(-n)^2 + (-n+1)^2 + \ldots + (-1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

V. Tarp natūrinių skaičių nėra dviejų iš eilės einančių skaičių kubų, kurių suma būtų lygi tolesnio skaičiaus kubui. Tuo įsitikinti padės algebra.

Jei bet kuriuos tris paeiliui einančius skaičius pažymėtume $x - 1$, x, $x + 1$, tai, pagal sąlygą,

$$(x-1)^3 + x^3 = (x+1)^3,$$

arba po pertvarkymo:

$$x^3 - 6x^2 - 2 = 0.$$

Suteikime gautajai kubinei lygčiai tokį pavidalą:

$$x^2(x-6) = 2.$$

Lengva įrodyti, kad tos lygties nepatenkins nė vienas sveikas skaičius. Ir tikrai, lygties dešinioji pusė — teigiamas skaičius, vadinasi, x turi būti didesnis už šešis. Pati mažiausia galima x reikšmė — tai septyni. Bet, kai $x = 7$, lygčių kairioji pusė žymiai viršys dešiniąją ir viršys ją ir visoms paskesnėms x reikšmėms, tai yra iš tikrųjų sveikų skaičių tarpe nėra gautosios kubinės lygties šaknų.

Vis dėlto prieš 15 metų panašios rūšies skaitinių galvosūkių mėgėjams pavyko ir iš paeiliui einančių skaičių k u b ų dėsningai sudaryti lygias sumas, tiesa, kiekvieną kartą su kai kuriais priedais:

$$[5^3+\underline{6}^3]+1^3=[7^3]-1^3,$$

$$[16^3+17^3+\underline{18}^3]+(1^3+2^3)=[19^3+20^3]-(1^3+2^3),$$

$$[33^3+34^3+35^3+\underline{36}^3]+(1^3+2^3+3^3)=$$
$$=[37^3+38^3+39^3]-(1^3+2^3+3^3) \text{ ir t. t.}$$

Laužtiniuose skliaustuose — paeiliui einančių skaičių kubų sumos, be to, vėl kiekvieniems n dėmenims dešiniuose skliaustuose tenka $n+1$ dėmenų kairiuose skliaustuose; lenktiniuose skliaustuose tiek dešinėje, tiek ir kairėje — vienodos iš eilės einančių skaičių, pradedant 1, kubų sumos.

Be to, pastebėta, kad kiekvienoje lygybėje pabrauktas skaičius (be laipsnio rodiklio) surištas su dėmenų skaičiumi laužtiniuose skliaustuose šiuo būdu: pabrauktas skaičius yra lygus narių skaičiaus laužtiniuose skliaustuose kairėje ir dešinėje p a t r i g u b i n t a i s a n d a u g a i. Antai, pirmoje lygybėje laužtiniuose skliaustuose kairėje — 2 nariai, o dešinėje — 1, vadinasi,

$$3(2\cdot 1)=\underline{6}.$$

Antroje lygybėje laužtiniuose skliaustuose kairėje 3 nariai, o dešinėje 2 ir atitinkamai

$$3(3\cdot 2)=\underline{18}.$$

Trečioje lygybėje

$$3(4\cdot 3)=\underline{36}.$$

Neapsistodami prie pastebėto dėsningumo aiškinimo, apsiribosime tokių kuriozinių sumų lygybių sudarymu bei praktiniu patikrinimu dar vienu atskiru atveju. Pareikalausime, pavyzdžiui, kad laužtiniuose skliaustuose kairėje būtų 5 dėmenys, o dešinėje 4. Patrigubinam jų sandaugą: $3(5\cdot 4)=\underline{60}$. Tada

$$[56^3+57^3+58^3+59^3+\underline{60}^3]+(1^3+2^3+3^3+4^3)=$$
$$=[61^3+62^3+63^3+64^3]-(1^3+2^3+3^3+4^3).$$

Patikrinkite aritmetiškai šią lygybę!

Tarp kitko, analoginį dėsningumą galima pastebėti taip pat ir pačių natūrinių skaičių bei jų kvadratų lygiose sumose. Prisiminkite, kokias mes turėjome lygybes:

pirmiesiems laipsniams:

$$1+\underline{2}=3,$$
$$4+5+\underline{6}=7+8,$$
$$9+10+11+\underline{12}=13+14+15;$$

pabrauktasis skaičius yra lygus dėmenų skaičių kairėje ir dešinėje lygybės pusėje sandaugai;

antriesiems laipsniams:

$$3^2+\underline{4}^2=5,$$
$$10^2+11^2+\underline{12}^2=13^2+14^2,$$
$$21^2+22^2+23^2+\underline{24}^2=25^2+26^2+27^2.$$

Pabrauktas skaičius (be laipsnio rodiklio) yra lygus dėmenų skaičių kairėje ir dešinėje lygybės pusėje **d v i g u b a i s a n d a u g a i**.

IV. Ar pažįstama jums tokia daugybos lentelė:

1	2	3	4	5	...	...	p	...	n
2	4	6	8	10	...	...	$2p$	...	$2n$
3	6	9	12	15	...	...	$3p$	...	$3n$
4	8	12	16	20	...	...	$4p$	...	$4n$
5	10	15	20	25	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
p	$2p$	$3p$	$4p$	...	...	...	p^2	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	$2n$	$3n$	$4n$	...	...	...	...	...	n^2

Kurio nors viršutinės eilutės skaičiaus ir bet kurio kraštinio kairiojo stulpelio skaičiaus sandauga randama stulpelio ir eilutės, kuriems priklauso dauginamieji, susikirtime. Taip, pavyzdžiui, skaičius 12 randamas ketvirto stulpelio ir trečios eilutės susikirtime arba šešto stulpelio ir antros eilutės susikirtime.

Tačiau, atidžiai peržiūrėdami šią lentelę, jūs rasite dar keletą įdomių prikiausomybių:

a) Bet kuriame kvadrate su viršūne kairiajame viršutiniame lentelės kampe skaičių suma yra pilnas kvadratas (kitaip tariant, ji yra tam tikro skaičiaus kvadratas):

$$1 = 1^2,$$
$$1 + 2 + 2 + 4 = 3^2 = (1 + 2)^2,$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 9 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$$

ir t. t.

b) Kiekvienas iš aukščiau paminėtų kvadratų yra sudaromas prie pirmesnio kvadrato prijungiant kampu sulenktą juostelę, vadinamą gnomonu. Skaičių suma bet kuriame gnomone yra tam tikro skaičiaus kubas:

$$1 = 1^3,$$
$$2 + 4 + 2 = 2^3,$$
$$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 3^3 \text{ ir t. t.}$$

c) Kiekvienas iš aukščiau paminėtų kvadratų susideda iš 1, 2, 3, ..., n gnomonų. Iš čia seka formulė, žinoma dar iš antikinių laikų:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

VII. Klasikinėje formulėje kubų sumai apskaičiuoti dėmenys yra paeiliui einą natūrinės sekos 1, 2, 3, 4 ir t. t. skaičiai. Matematikas Liuvilis (Prancūzija) iškėlė kur kas platesnį uždavinį: rasti b e t k o k i u s sveikus skaičius $a, b, c, d, \ldots$, kurių kubų suma būtų lygi jų sumos kvadratui:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \ldots = (a + b + c + \ldots)^2.$$

Skaičių $a, b, c, d, \ldots$ tarpe gali būti ir tarp savęs lygūs skaičiai.

Parinkti tinkamus skaičius, nesivadovaujant kokia nors taisykle, atsitiktinai — beveik beviltiškas reikalas.

Vis dėlto padarykite du-tris mėginimus, o po to tęskite skaitymą.

Liuviliui pavyko gauti įdomų rezultatą, kurio esmė lengvai išaiškinama tolesniais dviem pavyzdžiais.

1 pavyzdys. Imkime skaičių 6. Jis dalijasi iš 1, 2, 3 ir 6. O kiekgi daliklių turi kiekvienas iš tų daliklių? Skaičius 1 — vieną daliklį, skaičius 2 — du daliklius (1 ir 2), skaičius 3 — du daliklius (1 ir 3) ir pagaliau skaičius 6 — keturis daliklius (1, 2, 3 ir 6). Štai tie daliklių skaičiai 1, 2, 2 ir 4 ir surišti mus dominančia priklausomybe, tai yra turime:

$$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2=81.$$

2 pavyzdys. Imkime skaičių 30. Jo dalikliai: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Kiekvieno jų daliklių skaičius yra atitinkamai 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 8. Turime:

$$1^3+2^3+2^3+2^3+4^3+4^3+4^3+8^3=$$
$$=(1+2+2+2+4+4+4+8)^2.$$

Būdas paprastas ir sąmojingas. Savarankiškai pritaikykite jį kitiems skaičiams.

VIII. Natūrinių skaičių sekos stebėjimą galima, suprantama, tęsti be galo. Štai dar vienas įdomaus natūrinių skaičių tarpusavio ryšio pavyzdys.

Suskaidome natūrinių skaičių seką į šias grupes: 1; 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9, 10; ... Pirmoje grupėje — vienas skaičius, antroje — du tolesnieji, trečioje — trys ir t. t., n-toje grupėje — n skaičių. Pastebime, kad kiekvienoje grupėje pirmas ir paskutinis skaičiai surandami pagal formules:

$$\frac{(n-1)n}{2}+1 \text{ ir } \frac{n(n+1)}{2},$$

kur n — grupės numeris.

Kiekvienos grupės skaičiai sudaro aritmetinę progresiją su skirtumu $d=1$. Žinant kiekvienoje grupėje narių skaičių (n), o taip pat jos pirmąjį a_1 ir paskutinį a_n narius, galima apskaičiuoti skaičių sumą kiekvienoje grupėje.

Aritmetinės progresijos narių suma surandama pagal formulę:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}.$$

Kiekvienai grupei:

$$S = \frac{\left[\frac{(n-1)\, n}{2} + 1 + \frac{n(n+1)}{2}\right] n}{2} = \frac{(n^2+1)\, n}{2} = \frac{n^3+n}{2}.$$

Skirtingų grupių sumas pažymėję $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ ir domėdamiesi tiktai grupių su nelyginiais numeriais sumomis, turėsime:

$$S_1 = \frac{1^3+1}{2}; \qquad S_3 = \frac{3^3+3}{2};$$

$$S_5 = \frac{5^3+5}{2}; \ \ldots; \quad S_{2k-1} = \frac{(2k-1)^3 + (2k-1)}{2}.$$

Visų šių sumų suma lygi

$$S_1 + S_3 + \ldots + S_{2k-1} = \frac{[1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3] + [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)]}{2}.$$

Yra žinoma, kad $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$ (žr. 355 psl.). Jei n — lyginis ($n = 2k$), tai formulės kairioji pusė įgauna šį pavidalą:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (2k-1)^3 + (2k)^3.$$

Sugrupuojame šios sumos dėmenis kas antrą. Tada

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (2k-1)^3 + (2k)^3 =$$
$$= [1^3 + 3^3 + \ldots + (2k-1)^3] + [2^3 + 4^3 + \ldots + (2k)^3] =$$
$$= [1^3 + 3^3 + \ldots + (2k-1)^3] + 2^3 [1^3 + 2^3 + \ldots + k^3],$$

iš kur

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3 =$$
$$= [1^3 + 2^3 + \ldots + (2k)^3 - 8 [1^3 + 2^3 + \ldots + k^3],$$

arba

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3=$$
$$=(1+2+3+\ldots+2k)^2-8(1+2+3+\ldots+k)^2.$$

Gavome nelyginių skaičių sumos kubų formulę. Ji reikalinga tolesniam reiškinio $S_1+S_3+\ldots+S_{2k-1}$ perdirbimui. Grįškime prie jo:

$$S_1+S_3+\ldots+S_{2k-1}=$$
$$=\frac{[1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3]+[1+3+5+\ldots+(2k-1)]}{2}=$$
$$=\frac{(1+2+\ldots+2k)^2-8(1+2+\ldots+k)^2+[1+3+\ldots+(2k-1)]}{2}.$$

Kiekvienus skliaustelius pertvarkome kaip aritmetinės progresijos narių sumą. Tada

$$S_1+S_3+\ldots+S_{2k-1}=$$
$$=\frac{\left[\frac{(1+2k)\,2k}{2}\right]^2-8\left[\frac{(1+k)\,k}{2}\right]^2+\frac{[1+(2k-1)]\,k}{2}}{2}=$$
$$=\frac{(1+2k)^2k^2-2(1+k)^2k^2+k^2}{2}=$$
$$=\frac{k^2(1+4k+4k^2-2-4k-2k^2+1)}{2}=\frac{k^2\cdot 2k^2}{2}=k^4.$$

Atliktos algebrinės operacijos mums atskleidė nurodytų skaičių grupių:

1; 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9, 10; ...

gana įdomų tarpusavio ryšį, būtent: jei iš šių grupių sekos atmestume grupes su lyginiais numeriais (antrą, ketvirtą ir t. t.), o likusias grupes sudėtume, tai jų suma būtų lygi sudedamųjų grupių skaičiaus ketvirtajam laipsniui.

Pavyzdžiui, iš karto galima pasakyti, kad skaičių suma $1+(4+5+6)+(11+12+13+14+15)$ lygi 3^4, tai yra 81.

IX. Kiekvienas, kuris susidomėjo įvairiomis išnagrinėtomis priklausomybėmis, rišančiomis natūrinius skaičius, negalėjo nepastebėti jų sumų, skyrium imant n e l y g i n i ų

skaičių 1, 3, 5, ..., $(2n-1)$ sumos, paprasčiausių savybių.

Pirmųjų d v i e j ų nelyginių skaičių $1+3$ suma lygi 2^2, t. y. skaičiaus 2 kvadratui.

Pirmųjų t r i j ų nelyginių skaičių $1+3+5$ suma lygi 3^2, t. y. skaičiaus 3 kvadratui.

Pirmųjų k e t u r i ų nelyginių skaičių $1+3+5+7$ suma lygi 4^2, t. y. skaičiaus 4 kvadratui ir t. t.

Natūralu spėti, kad pastebėtas dėsningumas yra teisingas bet kurio kiekio n pirmųjų nelyginių skaičių sumai, t. y. kad ši suma visada lygi dėmenų skaičiaus kvadratui:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{n\ \text{dėmenų}}=n^2.$$

O gal šis spėjimas nepasitvirtins? Gal mūsų sumos, pradedant nuo kurios nors, gal būt, su labai dideliu dėmenų skaičium, nebepatenkins rastojo dėsnio?

Su dėsningumais, rastais mėginimų keliu, gali taip įvykti.

Kadangi natūrinių skaičių seka begalinė, tai mėginimų keliu neįmanoma pastebėtą dėsningumą patikrinti visoms nelyginių skaičių sumoms. Bet tai ir nėra būtina. Matematika turi priemones rezultatui numatyti.

Samprotaujame taip: tegul kuriam nors dėmenų skaičiui k yra teisingas tvirtinimas, kad jų suma lygi jų skaičiaus kvadratui:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{k\ \text{dėmenų}}=k^2.$$

Dabar pridėkime tolesnį nelyginį skaičių $2k+1$ ir pažiūrėkime, ar galios tas pats dėsningumas $k+1$ dėmenų sumai: $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+$ $+1=(k+1)^2$.

Dėsningumas galioja!

Suma, kaip ir anksčiau, yra lygi dėmenų skaičiaus kvadratui. Taip mes įrodėme, kad jei spėjamas dėsningumas tinka bent vienam kuriam nors dėmenų skaičiui k, tai jis yra teisingas ir dėmenų skaičiui, vienetu didesniam už k.

Vadinasi, dėsningumo empyrinį patikrinimą reikia atlikti, t a č i a u t i k v i e n ą k a r t ą. Imkime patį mažiausią dėmenų skaičių: du. Turime: $1+3=2^2$. Dviejų

dėmenų ($k=2$) suma lygi dėmenų skaičiaus kvadratui. Vadinasi, pagal įrodytą teiginį dėsnis galios ir trims nariams ($k+1=3$); bet jei jis teisingas trims dėmenims ($k=3$), tai jis bus teisingas ir keturiems ($k+1=4$); jei jis teisingas, kai $k=4$, tai jis galios ir kai $k+1=5$; jei jis teisingas, kai $k=5$, tai jis galios ir kai $k+1=6$ ir t. t.

Tas paprastas, tačiau griežtas samprotavimų būdas vadinamas matematine indukcija.

Taigi abejojimai išsklaidyti! n pirmųjų nelyginių skaičių suma, kai n — bet kuris dėmenų skaičius, yra lygi dėmenų skaičiaus kvadratui. Formulės

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

teisingumą, kai n — bet koks, galima patikrinti paprastai apskaičiavus sumą $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ pagal aritmetinės progresijos narių sumos formulę (atlikite!), bet iš esmės tai būtų tas pats samprotavimų būdas, nes aritmetinės progresijos narių sumos formulės įrodymas taip pat remiasi matematinės indukcijos principu.

X. Ne mažiau įdomi yra dar viena nelyginių skaičių sumų ypatybė. Jei nelyginių skaičių seką, pradedant vienetu, suskaidytume į grupes, atskirdami pirmai grupei vieną skaičių, antrai — du, trečiai — tris ir t. t., tai kiekvienos grupės skaičių s u m a būtų lygi grupės numerio k u b u i (Nikomacho teorema).

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1,\\
2^3 &= 3+5,\\
3^3 &= 7+9+11,\\
4^3 &= 13+15+17+19,\\
5^3 &= 21+23+25+27+29,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Kiekviena eilutė — aritmetinės progresijos su pastoviu skirtumu $d=2$, n narių suma (n — eilutės numeris), tačiau šios progresijos pirmas ir paskutinis nariai skirtingi skirtingose eilutėse. Ar priklauso jie nuo eilutės numerio? Be abejo.

Jei norite įrodyti, kad suformuluota savybė yra teisinga bet kuriam n, tai iš pradžių mobilizuokite savo nuovoką pri-

klausomybei rasti tarp progresijos pirmojo nario (a_1) ir eilutės, kurioje jis yra, numerio. Tačiau turėkite galvoje: aklu spėjimu toli nenuvažiuosi. Ieškokite sprendimo kelio.

Taip, pavyzdžiui, jei sunumeruotume kiekvienos eilutės pirmuosius narius, tai gautume tokią seką: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_4 = 13$, $a_5 = 21$ ir t. t.

Pradžioje pabandykime nustatyti kiekvieno sekos nario, pradedant antruoju, priklausomybę nuo jo vietos numerio ir nuo pirmesnio nario. Matome, kad

$$3 = 1 + 2 \cdot 1, \quad 7 = 3 + 2 \cdot 2,$$
$$13 = 7 + 2 \cdot 3, \quad 21 = 13 + 2 \cdot 4$$

ir t. t.

Atitinkamai nariui a_n turime:

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1).$$

Savo ruožtu

$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-2),$$
$$a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-3),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1.$$

Gauta pakopomis kylanti priklausomybė. Žengiant tomis pakopomis, galima gauti ryšį tarp pirmosios pakopos a_n ir paskutiniosios a_1. Tuo tikslu pirmoje lygybėje atsipalaiduokime nuo a_{n-1}, pakeisdami jį atitinkama išraiška iš antrosios lygybės. Gausime:

$$a_n = a_{n-2} + 2(n-1) + 2(n-2).$$

Čia tokiu pat būdu atsipalaiduokime nuo a_{n-2}, po to gautame reiškinyje atsipalaiduokime nuo a_{n-3} ir t. t.

Tada gausime:

$$a_n = a_1 + 2[(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1] =$$
$$= a_1 + 2\frac{(n-1)+1}{2}(n-1) = a_1 + n(n-1),$$

arba

$$a_n = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1.$$

Tokia yra Nikomacho trikampio bet kurios eilutės pirmojo nario priklausomybė nuo tos eilutės numerio.

Žinodami, kad kiekvienoje eilutėje yra n dėmenų, o skirtumas tarp jų $d = 2$, jūs dabar galite patys apskaičiuoti skaičių sumą eilutėje ir patikrinti, ar ji iš tikrųjų lygi n^3.

352. Neperkąsti riešutai

I. Simetrinė suma. Parašykite bet kurį sveiką skaičių iš 2, 3 ar daugiau ženklų. Prie jo pridėkite tą patį skaičių, pakeitę jo skaitmenų tvarką atvirkščia. Tą patį atlikite su gautąja suma. Bandymas parodo, kad, pakartoję tuos veiksmus tam tikrą skaičių kartų, būtinai gausite skaičių, kuris vienodai skaitosi iš kairės į dešinę ir iš dešinės į kairę.

Keletas pavyzdžių:

$$
\begin{array}{r} 38 \\ +\;83 \\ \hline 121 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 139 \\ +\;931 \\ \hline 1\,070 \\ +\;0\,701 \\ \hline 1\,771 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 48\,017 \\ +\;71\,084 \\ \hline 119\,101 \\ +\;101\,911 \\ \hline 221\,012 \\ +\;210\,122 \\ \hline 431\,134 \end{array}
$$

Kartais, norint gauti simetrinį rezultatą, tenka pakartoti procesą daugiau kartų. Pavyzdžiui, jei jūs paimsite skaičių 89, tai laukiamą rezultatą negreit tegausite. Tiktai po 24 etapų pasirodys simetrinė suma: 8 813 200 023 188. Įsitikinkite!

O gal būt yra ir toks skaičius, kuris niekada neatves prie simetrinio rezultato? Matyt, kad ne, b e t t o d a r n i e k a s n e į r o d ė!

II. «Lemtinga» suma. Parašykite bet kurį sveiką skaičių ir sudėkite j o s k a i t m e n ų k v a d r a t u s. Gautosios sumos skaitmenų kvadratus vėl sudėkite. Pakartoję šią operaciją tam tikrą skaičių kartų, jūs būtinai gausite arba skaičių 1, arba skaičių 89. Pavyzdžiui, skaičiui 31 turime:

$$3^2 + 1^2 = 10,$$
$$1^2 + 0^2 = 1.$$

Prie tokio pat rezultato, aišku, prives skaičiai 10^n pavidalo, kur n — bet kuris sveikas skaičius, o taip pat skaičiai,

sudaryti iš skaitmenų 1 ir 3 arba 6 ir 8, paimtų po vieną kartą ir iš bet kurio skaičiaus nulių, tai yra tokie, pavyzdžiui, kaip 13, 103, 3 001, 68, 608, 8 006 ir t. t.

Dabar imkime kurį nors kitą skaičių, pavyzdžiui, 48. Šiuo atveju

$$4^2+8^2=80, \quad 5^2+2^2=29,$$
$$8^2+0^2=64, \quad 2^2+9^2=85,$$
$$6^2+4^2=52, \quad 8^2+5^2=89.$$

Tęsdami operaciją toliau, gausime:

$$8^2+9^2=145, \quad 4^2=16,$$
$$1^2+4^2+5^2=42, \quad 1^2+6^2=37,$$
$$4^2+2^2=20, \quad 3^2+7^2=58,$$
$$2^2+0^2=4, \quad 5^2+8^2=89.$$

Aštuntame etape pasikartojo skaičius 89. Matome, kad tarpiniai skaičiai yra 145, 42, 20, 4, 16, 37 ir 58. Iš čia seka, kad jei iš tikrųjų bet kurio skaičiaus skaitmenų kvadratų sudėtis atveda prie skaičiaus 1 arba prie skaičiaus 89, tai pastaruoju atveju galutinė suma gali būti ne tik 89, bet ir bet kuris iš 7 skaičių: 145, 42, 20, 4, 16, 37 arba 58.

Atlikite patys dar keletą mėginimų su įvairiais skaičiais.

Pageidautina būtų gauti ir šios savybės įrodymą.

Nemažiau įdomių dėsningumų galima rasti, apskaičiuojant bet kurio skaičiaus skaitmenų kubų sumą arba ketvirtųjų laipsnių sumą ir pakartojant tą operaciją su gaunamomis sumomis.

Beje, tuos stebėjimus ir išvadas iš jų palieku jums kaip temą jūsų savarankiškiems tyrimams.

KETURIOLIKTASIS SKYRIUS

SENI, BET AMŽINAI NAUJI SKAIČIAI

A. PIRMINIAI SKAIČIAI

353. Pirminiai ir sudėtiniai skaičiai

Sveikas skaičius *a* vadinamas sveiko skaičiaus *N* dalikliu, jei, padaliję *N* iš *a*, gauname vėl sveiką skaičių. Mažiausias sveikas skaičius 1. Jis dalijasi be liekanos tiktai pats iš savęs; vadinasi, skaičius 1 turi tiktai vieną daliklį. Bet kuris kitas sveikas skaičius turi arba du daliklius: vienetą ir patį save, arba daugiau kaip du daliklius.

Tiktai iš vieneto ir iš savęs dalijasi, pavyzdžiui, tokie skaičiai kaip 2, 3, 5, 7 ir kiti.

Skaičius 4 turi tris daliklius: 1, 2 ir 4, skaičius 6 — keturis daliklius: 1, 2, 3 ir 6 ir t. t.

Skaičius, turinčius lygiai du daliklius, sutarta vadinti *pirminiais* skaičiais. Skaičiai, kurie turi daugiau kaip du daliklius, vadinami *sudėtiniais*.

Mažiausias pirminis skaičius yra skaičius 2. Tai vienintelis lyginis pirminis skaičius. Visų kitų pirminių skaičių, aišku, reikia ieškoti tiktai tarp nelyginių skaičių, bet, suprantama, toli gražu ne kiekvienas nelyginis skaičius — pirminis.

Pavyzdžiui, nelyginiai skaičiai 3, 5, 7, 11, 13,... — pirminiai, o tokie nelyginiai skaičiai kaip 9, 15, 21, ... — sudėtiniai; pirmasis turi tris daliklius: 1, 3, 9, antrasis — keturis daliklius: 1, 3, 5, 15 ir t. t.

Bet kurį sudėtinį skaičių galima skaidyti į dauginamuosius iki tol, kol jis nebus suskaidytas vien tik į pirminius skaičius. Pavyzdžiui, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $363 = 3 \cdot 11 \cdot 11$ ir t. t. Pirminiai skaičiai yra lyg tai pirminiai elementai, iš kurių susideda visi skaičiai. Todėl suprantamas matematikų dėmesys pirminiams skaičiams.

354. «Eratosteno rėtis»

Kaip gi atrinkti pirminius skaičius iš visų sveikų skaičių? Aišku, kad kuo didesnis skaičius, tuo sunkiau išspręsti klausimą, ar turi jis mažesnius už save daliklius.

Grūdams atskirti nuo priemaišų vartojami specialūs sietai su skylutėmis, atitinkančiomis grūdų matmenis.

Kaip tik maždaug tokiu būdu yra atskiriami pirminiai skaičiai nuo sudėtinių.

Reikia, sakysime, išskirti visus pirminius skaičius ribose nuo 2 iki tam tikro duoto sveiko skaičiaus N. Iš pradžių surašome paeiliui visus sveikus skaičius nuo 2 iki N: 2, 3, 4, 5, ..., N. Pirmasis pirminis skaičius yra 2. Pabraukime jį, o visus skaičius, dalius dviem (lyginius), užbraukime. Pirmasis iš likusių skaičių 3. Pabraukime jį kaip pirminį, o visus skaičius kas trečią (tai yra dalius trims) užbraukime. Pirmasis skaičius iš likusiųjų dabar yra 5 (skaičius 4 jau užbrauktas). Pabraukime jį kaip pirminį ir užbraukime visus skaičius kas penktą (tai yra dalius penkiems), ir taip toliau.

Visi pabrauktieji skaičiai ir sudaro pirminių skaičių lentelę ribose nuo 2 iki N:

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~,
11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~,
~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~,
31, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, 37, ~~38~~, ~~39~~, ~~40~~,
. . . .

Tokį nuoseklų skaičių «sijojimo» būdą sugalvojo daugiau kaip prieš 2 000 metų graikų matematikas Eratostenas (276—196 m. prieš m. e.). Eratostenas ne užbraukdavo skaičius, dalius 2, 3, 5 ir t. t., o pradurdavo ties jais skylutes. Gaudavo kažką panašaus į rėtį, pro kurio skylutes lyg tai išsisijodavo sudėtiniai skaičiai, o pirminiai pasilikdavo. Todėl iki šio laiko šis pirminių skaičių lentelės gavimo būdas ir vadinamas *Eratosteno rėčiu.*

Kaip matote, būdas labai kruopštus, bet visiškai patikimas. Per 2 000 metų, praslinkusių nuo «Eratosteno rėčio» išradimo, taip niekas ir neįnešė kokių nors radikalių pakeitimų į pirminių skaičių lentelės sudarymo būdą.

Kolektyvinėmis jėgomis pirminių skaičių lentelė šiuo metu išplėsta iki 10 milijonų, tai yra turime v i s ų pirminių skaičių nuo 1 iki 10 000 000 lentelę. Už šios lentelės ribų žinomi tiktai atskiri pirminiai skaičiai. Pavyzdžiui, matematikas-savamokslis I. M. Pervušinas 1883 m. įrodė, kad skaičius

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

yra pirminis skaičius. Ilgą laiką skaičius

$$2^{127}-1=170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$$

buvo didžiausias iš žinomųjų pirminių skaičių. Šių laikų automatinių skaičiavimo mašinų pagalba Los-Andželose 1954 m. buvo gautas dar didesnis pirminis skaičius:

$$2^{2281} - 1.$$

Be to, I. M. Pervušinas įrodė, kad skaičius $2^{2^{25}}+1$ yra s u d ė t i n i s, nes jis dalijasi iš 167 772 161. Skaičius $2^{2^{25}}$ turi 2 525 223 skaitmenis... Pervušino rezultatai buvo patikrinti Peterburgo ir Paryžiaus mokslų akademijose ir patvirtinti*.

* Labai kruopštų darbą apie $2^p \pm 1$ pavidalo didelių skaičių daliklių nustatymą neseniai atliko M. I. Slobodskojus, būdamas dar Grozno pedagoginio instituto studentas. Jis savarankiškai rado ir įrodė įdomią teoremą, leidžiančią iš karto rasti skaičiaus $2^p - 1$ daliklį įvairiausioms skaičiaus p reikšmėms. Pavyzdžiui, jis įrodė, kad skaičius $2^{5002331}-1$, turintis daugiau kaip pusantro milijono skaitmenų, dalijasi iš skaičiaus 10 004 663. (M. I. Slobodskojaus darbas atspausdintas žurnale «Математика в школе», 1953, № 1.)

Žinoma, matematikai negalėjo taikstytis su tuo, kad pirminiai skaičiai gaunami tokiais primityviais būdais. Jie, natūralu, norėjo sudaryti tokią bendrą f o r m u l ę, kuri priklausomai nuo visokių sveikų dydžio n reikšmių duotų tiktai pirminius skaičius. Deja, tokia formulė pasirodė besanti «mėlynasis paukštis». Iki šiol jo niekas ir nepagavo.

355. Naujas «rėtis» pirminiams skaičiams

Iki šiol nerasta bendros formulės pirminiams skaičiams gauti, yra tiktai senovinis «rėtis». Beje, prieš keletą metų Sundaram (Indija) pateikė n a u j ą «r ė t į» p i r m i n i a m s s k a i č i a m s:

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
16	27	38	49	60	71	...
.	.	.	.	.	.	.

Šis «rėtis» yra lentelė, susidedanti iš begalinio skaičiaus begalinių aritmetinių progresijų, be to, pirmosios progresijos

$$4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$$

k i e k v i e n a s narys p r a d e d a naują progresiją. Progresijų skirtumai yra visi nelyginiai skaičiai, pradedant 3:

$$d_1 = 3,\ d_2 = 5,\ d_3 = 7,\ d_4 = 9 \text{ ir t. t.}$$

Jei kuris nors skaičius N randamas šioje lentelėje, tai $2N + 1$ būtinai yra sudėtinis skaičius. Jeigu šioje lentelėje nėra skaičiaus N, tai $2N + 1$ — pirminis skaičius.

P a v y z d ž i a i. 1) Lentelėje nėra skaičiaus $N = 3$, vadinasi, $2N + 1 = 7$ — pirminis skaičius.

2) Lentelėje nėra skaičiaus $N = 5$, vadinasi, $2N + 1 = 11$ — pirminis skaičius.

3) Skaičiaus $N = 6$ taip pat nėra lentelėje, vadinasi, $2N + 1 = 13$ — pirminis skaičius.

4) Skaičius $N = 7$ yra lentelėje, vadinasi, $2N + 1 = 15$ — sudėtinis skaičius ir t. t.

Formulėje $2N+1$ pakeitę N paeiliui visais skaičiais, kurių nėra lentelėje (kurie tartum išsijoti pro šį «rėtį»), galime gauti visus pirminius skaičius, išskyrus skaičių 2. Įrodysime, kad $2N+1$ — sudėtinis skaičius skaičiams, «užsilaikiusiems rėtyje», ir pirminis — «išsijotiems skaičiams».

Įrodymui iš pradžių raskime lentelės kiekvienos eilutės bendrąjį narį. Bet kurios aritmetinės progresijos bendrasis narys (a_n), kaip žinoma, yra lygus sumai jos pirmojo nario (a_1) ir progresijos skirtumo (d) bei pirmesnių narių skaičiaus sandaugos

$$a_n = a_1 + d\,(n-1).$$

Pirmajai lentelės eilutei turime: $a_1 = 4$, $d = 3$, vadinasi,

$$a_{n1} = 4 + 3(n-1) = 1 + 3n.$$

Antrajai eilutei: $a_1 = 7$, $d = 5$, vadinasi,

$$a_{n2} = 7 + 5(n-1) = 2 + 5n.$$

Trečiajai eilutei: $a_1 = 10$, $d = 7$, vadinasi,

$$a_{n3} = 10 + 7(n-1) = 3 + 7n.$$

Pagal analogiją* k-tajai eilutei:

$$a_{nk} = k + (2k+1)n.$$

Formulė $a_{nk} = k + (2k+1)n$, kur $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ir nuo jo nepriklausomai $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, išreiškia bet kurį lentelės narį.

Jei kuris nors skaičius N yra lentelėje, tai jis lygus vienam iš skaičių a_{nk}, tai yra

$$N = k + (2k+1)n.$$

---

* Formulę, išreiškiančią k-tosios eilutės bendrąjį narį a_{nk}, tai yra bet kurį visos lentelės narį, galima išvesti taip: pirmasis k-tosios eilutės narys a_{1k} pagal sąlygą lygus $a_{1k} = 1+3k$ (pirmosios eilutės k-tajam nariui), o $d_k = 2k+1$, vadinasi, $a_{nk} = 1+3k+(2k+1)(n-1) = 1+ +3k+2nk+n-2k-1 = k+2nk+n = k+(2k+1)n$.

Tada

$$2N+1=2[k+(2k+1)n]+1=$$
$$=2k+1+2n(2k+1)=(2k+1)(2n+1),$$

kitaip sakant, skaičius $2N+1$ yra sandauga bent dviejų daugiklių, iš kurių nė vienas nėra lygus 1, vadinasi, pagal apibrėžimą $2N+1$ — sudėtinis skaičius, o tai ir reikėjo įrodyti.

Atvirkščiai, tegul $2N+1$ — bet kuris sudėtinis nelyginis skaičius, vadinasi, jį galima suskaidyti į du nelyginius daugiklius, iš kurių nė vienas nėra lygus 1:

$$2N+1=(2k+1)(2n+1),$$

kur k ir n — kurie nors natūrinės sekos skaičiai. Gautąją lygybę išsprendę N atžvilgiu, rasime:

$$N=\frac{(2k+1)(2n+1)-1}{2}=k+(2k+1)n=a_{nk},$$

tai yra šiuo atveju N turi būti vienas iš lentelės skaičių.

Tokiu būdu mes įrodėme, kad skaičiai N, esantieji lentelėje, pagal formulę $2N+1$ sudaro tiktai sudėtinius skaičius ir kad kiekvienam iš anksto duotam sudėtiniam nelyginiam $2N+1$ pavidalo skaičiui lentelėje būtinai yra jį sudarąs skaičius N.

Tačiau visi pirminiai skaičiai (išskyrus 2) — nelyginiai ir kiekvienas nelyginis skaičius (išskyrus 1) — arba sudėtinis, arba pirminis. Iš čia darome išvadą, kad $2N+1$ pavidalo **pirminis** nelyginis skaičius lentelėje neturi atitinkamo jį sudarančio skaičiaus N.

356. Pusšimtis pirmųjų pirminių skaičių

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229

357. Dar vienas pirminių skaičių gavimo būdas

Imkime 1 ir bet kurį kiekį n pirmųjų pirminių skaičių. Visus tuos skaičius bet kokiu būdu suskirstykime į 2 grupes. Sudauginkime kiekvienos grupės skaičius; gaunamos dvi sandaugos. Jei tų sandaugų suma arba skirtumas yra skaičius N, mažesnis už $(n+1)$-jo pirminio skaičiaus kvadratą, tai N — pirminis skaičius.

Pavyzdžiui, imkime 1 ir keturis pirmuosius pirminius skaičius, tai yra 1, 2, 3, 5 ir 7. Penktasis pirminis skaičius 11. Pastebėsime, kad $11^2 = 121$. Vadinasi, nurodytu būdu mes galėsime sudaryti pirminius skaičius, mažesnius už 121.

Suskirstykime paimtus skaičius į 2 grupes: 2, 3, 5, 7 ir 1. Sudarykime skaičių: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 209$.

Kadangi gautasis skaičius 209 didesnis už 121, tai laiduoti, kad jis pirminis, mes negalime. Iš tikrųjų, pirminių skaičių lentelėje (žr. 369 psl.) jo nėra.

Suskirstykime paimtus skaičius kitaip: 1, 3, 5, 7 ir 2. Sudarykime du skaičius:

$$N_1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 = 103, \quad N_2 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 = 107.$$

Kiekvienas iš jų mažesnis už 121, vadinasi, abu turi būti pirminiai. Ir tikrai, jei jie būtų sudėtiniai, tai suskiltų į pirminius daugiklius (žr. 365 psl.), bet iš tų skaičių sudarymo būdo seka, kad nė vienas iš jų nesidalija iš 2, 3, 5 arba 7. Skaičiai N_1 ir N_2 negali dalytis ir iš tolesnio vyresniojo pirminio skaičiaus, tai yra iš 11.

Ir tikrai, sakykime, kad N_1 (arba N_2) dalijasi iš 11. Kadangi kiekvienas iš jų mažesnis už 121, tai dalmuo bus mažesnis už 11 ir, vadinasi, negalės turėti kitokių pirminių daugiklių, kaip 2, 3, 5 ar 7. Bet tokiu atveju N_1 (arba N_2) dalysis iš kurio nors tų daugiklių, o tai prieštarauja skaičiaus N_1 (arba N_2) sudarymo būdui.

Jei prie pirmos grupės priskirsime skaičius 1, 5 ir 7, o prie antros 2 ir 3, tai galėsime sudaryti dar du pirminius skaičius:

$$1 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 29 \text{ ir } 1 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 41.$$

Dar keletas galimų kombinacijų:

$$1 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11, \quad 1 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 31,$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 - 7 = 23, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + 7 = 37 \text{ ir t. t.}$$

Taip pat aišku, kad galima padidinti bet kurio pirmos ar antros grupių dauginamojo laipsnį, o sandaugų suma ar skirtumas, jei tik jie bus mažesni už $(n-1)$-jo pirminio skaičiaus kvadratą, po senovei bus pirminiai skaičiai.

Iš tikrųjų:

$$1\cdot3\cdot5\cdot7-2^3=97,\quad 1\cdot3\cdot5\cdot7+2^3=113,$$
$$1\cdot5\cdot7-2\cdot3^2=17,\quad 1\cdot5\cdot7+2\cdot3^2=53,$$
$$1\cdot3\cdot5^2-2^2\cdot7=47,\quad 1\cdot3\cdot5^2+2^2\cdot7=103 \text{ ir t. t.}$$

Sudarant panašios rūšies kombinacijas iš viso tik iš trijų skaičių: 1, 2 ir 3, galima sudaryti visus pirminius skaičius, mažesnius už 25 (žr. 369 psl.). Jūs be didelio vargo šį pratimą atliksite patys.

358. Kiek pirminių skaičių?

Pirminių skaičių lentelė neturi paskutinio skaičiaus. Pirminių skaičių be galo daug. Tai įrodė* dar Euklidas. Bet pirminiai skaičiai natūrinių tarpe pasiskirsto labai netolygiai. Pirmoje natūrinių skaičių dešimtyje yra 4 pirminiai, tai yra 40%. Pirmame natūrinių skaičių šimte yra 25 pirminiai, tai yra 25%. Pirmųjų natūrinių skaičių milijone pirminių skaičių jau yra tik 8% ir t. t.

Kaip bent apytikriai apskaičiuoti, kiekgi pirminių skaičių yra natūrinių skaičių sekoje nuo 1 iki bet kurio skaičiaus N?

Daugiau kaip dvidešimt šimtmečių nebuvo pilno atsakymo į tą klausimą, kuris pasirodė esąs labai sunkus. Tikslios formulės nėra ir dabar. Bet surasta artutinė formulė, įgalinanti tuo tiksliau rasti n pirminių skaičių, tenkančių N pirmiesiems natūrinės sekos skaičiams (pirminių skaičių pasiskirstymo «tankumas»), kuo didesnis N**.

---

* Euklido įrodymas yra skaičių teorijos vadovėliuose, o taip pat knygose: Г. Н. Берман, Число и наука о нем, Гостехиздат, 1949, Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, ОНТИ, 1936, (Šių knygų lietuviškų leidimų nėra. *Red.*)

**
$$n\approx\frac{0{,}43429\ldots}{\lg N}\cdot N.$$

Susipažinti su smulkmenomis skaitytojui rekomenduoju išnašoje aukščiau nurodytas knygas.

B. FIBONAČI SKAIČIAI

359. Viešas bandymas

XIII šimtmečio pradžioje Pizos mieste (Italija) gyveno didelis visokiausių ryšių tarp skaičių žinovas ir iš viso įgudęs skaičiuotojas Leonardo (vadinamas Piziečiu). Jį dar vadino Fibonači, tai reiškia: Bonačio sūnus. 1202 metais jis išleido lotynų kalba knygą, pavadintą «Knyga apie abaką» (Incipit Liber, Abbaci compositus a Leonardo filius Bonacci Pisano), apimančią visas to laiko aritmetikos ir algebros žinias. Tai buvo viena iš pirmųjų knygų Europoje, mokinanti naudoti dešimtainę skaičiavimo sistemą.

Leonardo Piziečio knyga labai plačiai paplito ir daugiau kaip du šimtmečius buvo skaičių srityje autoritetingiausias žinių šaltinis.

Pagal ano meto papročius Fibonači dalyvaudavo matematiniuose turnyruose (viešos geriausio ir visų greičiausio sunkių uždavinių sprendimo varžybos; kažkas panašaus į dabartines matematines olimpiadas).

Leonardo sumanumas sprendžiant skaitinius uždavinius stebino visus.

Aukšta Fibonači reputacija kartą (1225 m.) į Pizą priviliojo Romos imperijos valdovą Fridrichą II, kuris atvyko lydimas grupės matematikų, norinčių viešai išbandyti Leonardo. Vieno iš uždavinių, pateiktų turnyre, turinys buvo toks.

Rasti pilną kvadratą, pasiliekantį pilnu kvadratu tiek jį padidinus, tiek ir sumažinus penkiais. Priminsiu, kad pilnu kvadratu vadinamas skaičius, iš kurio tiksliai išsitraukia kvadratinė šaknis.

Fibonači po kai kurių svarstymų tokį skaičių rado. Pasirodė, kad jis yra trupmena:

$$\frac{1\,681}{144}, \quad \text{arba} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2.$$

Iš tikrųjų,

$$\frac{1\,681}{144} - 5 = \frac{961}{144}, \quad \frac{1\,681}{144} + 5 = \frac{2\,401}{144},$$

kitaip

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

ir

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Kokiais samprotavimais Fibonači vadovavosi turnyre, to mes niekada nesužinosime, bet uždavinį jis išsprendė puikiausiai.

Apgalvokime ir mes truputį šį turnyro uždavinį. Pagal sąlygą reikia rasti pilną kvadratą, kuris lieka pilnu kvadratu tiek jį padidinus, tiek ir sumažinus tam tikru duotu skaičiumi d. Tai tas pat, kaip ir rasti tris pilnus kvadratus, sudarančius aritmetinę progresiją su skirtumu d.

Išnagrinėkime kvadratus šių trijų skaičių:

$$M = a^2 - b^2 - 2ab, \quad N = a^2 + b^2 \text{ ir } P = a^2 - b^2 + 2ab$$

Turime:

$$M^2 = a^4 - 4a^3b + 2a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$N^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4,$$
$$P^2 = a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

Apskaičiuokime skirtumus: $N^2 - M^2$ ir $P^2 - N^2$:

$$N^2 - M^2 = 4a^3b - 4ab^3 = 4ab(a^2 - b^2),$$
$$P^2 - N^2 = 4a^3b - 4ab^3 = 4ab(a^2 - b^2).$$

Skirtumai vienodi. Vadinasi, trys skaičiai M^2, N^2 ir P^2 sudaro aritmetinę progresiją su skirtumu

$$d = 4ab(a^2 - b^2).$$

Kiekvienam $d = 4ab(a^2 - b^2)$ ieškomasis skaičius

$$N^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Dabar aišku, kad uždavinys turi daug sprendinių, nes, imant įvairias a ir b reikšmes, galima gauti tą patį duotą skaičių d.

Skyrium imant, d bus lygus 5, jei, pavyzdžiui, paimtume: $a = \frac{5}{\sqrt{12}}$, $b = \frac{4}{\sqrt{12}}$. Ieškomąjį skaičių N^2 turėsime tokį:

$$N^2 = \left(\frac{25}{12} + \frac{16}{12}\right)^2 = \left(\frac{41}{12}\right)^2,$$

tai yra tą patį skaičių, kurį rado Fibonači.

Įrodykite, kad egzistuoja tiktai dvi poros a ir b reikšmių, iš kurių kiekviena paverčia $d = 4ab(a^2 - b^2)$ skaičiumi 5, o $N = (a^2 + b^2)$ — skaičiumi $\frac{41}{12}$, ir raskite tas reikšmes.

Viena pora reikšmių turi, žinoma, sutapti su tomis, kurias aš nurodžiau aukščiau:

$$a = \frac{5}{\sqrt{12}}, \quad b = \frac{4}{\sqrt{12}}.$$

Kokia kita a ir b reikšmių pora?

Taip pat patikrinkite, ar skaičius

$$N^2 = \left(\frac{11\,183\,412\,793\,921}{2\,234\,116\,132\,416}\right)^2$$

liks pilnas kvadratas tiek jį padidinus, tiek ir sumažinus penkiais.

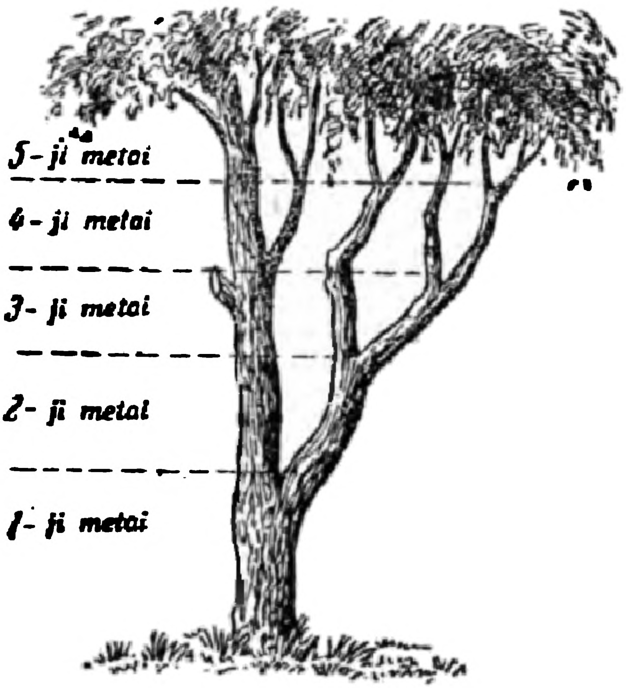
360. Fibonači seka

Fibonači iš naturinių skaičių sudarė tokią seką, kuri vėliau pasirodė naudinga moksle:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Šios sekos narių sudarymo dėsnis labai paprastas: pirmieji du nariai — vienetai, o paskui kiekvienas tolesnis narys gaunamas sudedant du betarpiškai prieš jį esančius narius. Pavyzdžiui, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $8 = 3 + 5$ ir t. t. Ši eilutė yra žinoma ne tiktai matematikams, bet ir gamtininkams.

A n t a u g a n č i o m e d ž i o. Jei medis (211 pieš.) išsišakoja kiekvienais metais ir antrais metais turi dvi



211 pieš.

šakas, tai trečiais metais šakų skaičius paprastai pasiekia tris, ketvirtais — penkis, penktais — aštuonis ir taip kiekvieną kartą pagal Fibonači seką.

A n t š a k e l ė s. Jei lapai ant šakelės auga po vieną, tai jie visada išsidėsto aplink stiebelį, bet ne pagal apskritimą, o pagal sraigtinę liniją, tai yra kiekvienas tolimesnis lapas yra aukščiau ir į šoną nuo prieš jį esančio. Be to, kiekvienai augalų rūšiai būdingas dviejų gretimų lapų nesutapimo kampas, kuris, kaip tvirtina botanikai, yra daugiau ar mažiau pastovus visose stiebelio dalyse. Paprastai tas kampas išreiškiamas trupmena, parodančia, kurią apskritimo dalį jis sudaro, pavyzdžiui, $^1/_3$ arba $^3/_8$ ir t. t

Vienos rūšies augalams tas kampas yra toks pat ir šakų, pumpurų, žvynų pumpurų viduje, žiedų išdėstyme.

Augaluose labiausiai paplitę šie nesutapimo kampai (apskritimo dalimis):

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{13},\ \frac{8}{21},\ \ldots$$

Čia skaitiklių ir vardiklių sekos — Fibonači skaičiai, be to, kiekviena iš trupmenų (pradedant trečiąja) gaunama sudedant dviejų pirmesnių trupmenų skaitiklius ir vardiklius:

$$\frac{2}{5}=\frac{1+1}{2+3},\quad \frac{3}{8}=\frac{1+2}{3+5}\ \text{ir t. t.}$$

A l g e b r o j e. Bet kuri Fibonači sekos

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

gretimų skaičių pora patenkina vieną iš lygčių

$$x^2 - xy - y^2 = 1$$

arba

$$x^2 - xy - y^2 = -1,$$

be to, didesnis skaičius yra nežinomojo x reikšmė, o mažesnis — nežinomojo y reikšmė.

Pavyzdžiui:

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x=5, \\ y=3, \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x=13, \\ y=8 \end{cases} \text{ir t. t.}$$

yra pirmosios lygties šaknys, o

$$\begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=8, \\ y=5, \end{cases} \begin{cases} x=21, \\ y=13 \end{cases} \text{ir t. t.}$$

yra antrosios lygties šaknys.

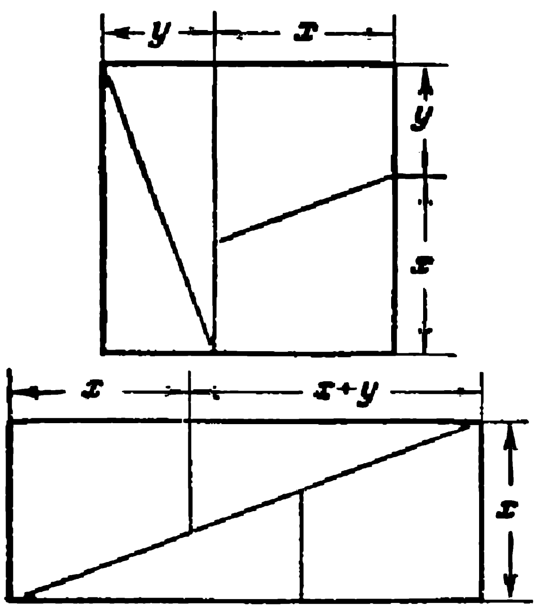
Šios savybės įrodymas bendru atveju pateiktas 383 puslapyje (3-ji savybė).

361. Paradoksas

Su Fibonači skaičiais netiesiogiai susietas įdomus geometrinis paradoksas.

Visiškai aišku, kad jei kurią nors plokščiąją figūrą padalytume į keletą dalių, po to, pridėdami gautąsias dalis vieną prie kitos (bet neuždėdami vieną ant kitos), sudarytume naują figūrą, tai savo forma naujoji figūra galėtų skirtis nuo pradinės, bet jos plotas liktų tas pats: nė vienu kvadratiniu vienetu jis negali nei padidėti, nei sumažėti. Šis aiškus teiginys geometrijoje laikomas vienu tų pirminių pagrindinių nuostatų, kuriais remiasi visa plotų matavimo teorija.

Tai kaip tada paaiškinti vieną keistą reiškinį?



212 pieš

212 piešinyje parodytas kvadrato pavertimas stačiakampiu.

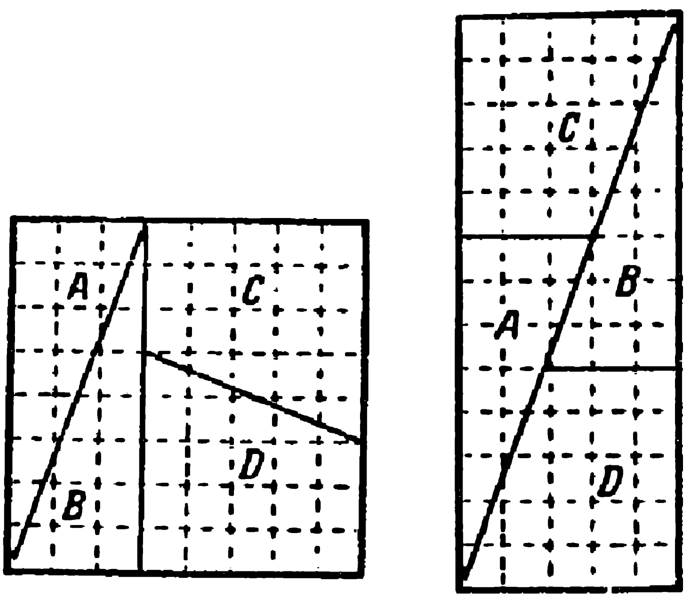
Kvadratas padalytas į du lygius trikampius ir į dvi lygias trapecijas. Iš tų dalių sudarytas stačiakampis.

— Duokš, galvoju,— rašo man vienas jaunas draugas,— aš pats atliksiu pavertimą praktiškai. Iš knygos

piešinį kopijuoti nenorėjau. Aš nusprendžiau pats nužymėti savo kvadratą, naudodamasis 212 piešinio nurodymais.

Nusibrėžiau ant languoto popieriaus kvadratą iš 64 langelių ir susimąsčiau šiuo klausimu: į kokias dalis x ir y reikia padalyti kvadrato kraštines. Pradžioje aš pagalvojau, kad tai nesvarbu, ir paėmiau $x = 6$, $y = 2$. Nužymėjau kvadratą, padalijau jį į du lygius trikampius ir dvi lygias trapecijas, pradėjau sudarinėti stačiakampį, kaip nurodyta 212 piešinyje, ir... nieko neišėjo! Ištiso stačiakampio negavau. Ištiso stačiakampio negavau, imdamas ir kitas x ir y reikšmes, pavyzdžiui, $x = 4^1/_2$, $y = 3^1/_2$.

Tiktai, kai $x = 5$, $y = 3$, aš galėjau iš susidariusių kvadrato dalių sudaryti stačiakampį, bet čia pat buvau naujo nemalonumo pritrenktas: stačiakampio plotas buvo lygus 65 langeliams, tai yra vienu langeliu d i d e s n i s, nei iš pradžių paimto kvadrato plotas (213 pieš.).



213 pieš.

Ir tikrai, stačiakampio ilgis (žr. 212 pieš.) turi turėti $x + x + y = 2x + y = 2 \cdot 5 + 3 = 13$ vienetų; aš ir gavau lygiai 13 vienetų; stačiakampio plotis x, ir aš gavau stačiakampio plotį 5 (213 pieš.). Pagal tai jo plotas turi lygiai $13 \cdot 5 = 65$ langelius! Atlikite tai patys!

Bet tai dar ne viskas. Pagal tą patį sukirpimą (žr. 212 pieš.) aš dalijau į dalis ir kitą kvadratą su 13 vienetų kraštine. Jei aš ėmiau $x = 8$ ir $y = 5$, tai iš kvadrato dalių sudėdavau stačiakampį, bet... šiuo atveju su plotu, m a ž e s n i u už kvadrato plotą, tarp kitko, taip pat lygiai vienu langeliu.

Spręskite patys: kvadrato plotas turi $13^2 = 169$ langelius, o stačiakampio plotas turi $(2x + y)x = (2 \cdot 8 + 5) \cdot 8 = 168$ langelius.

Dar du pavyzdžiai.

1) Imu kvadratą iš $21 \times 21 = 441$ langelio. Padaliju kraštines į dalis $x = 13$, $y = 8$. Supiaustau. Sudedu. Stačiakampį gaunu. Apskaičiuoju plotą:

$$(2x + y)x = (12 \cdot 13 + 8) \cdot 13 = 442 \text{ langeliai!}$$

Ir vėl vienu langeliu per daug.

2) Imu kvadratą iš $34 \times 34 = 1\,156$ langelių. Padaliju kraštines į dalis $x = 21$, $y = 13$. Supiaustau. Sudedu. Stačiakampį gaunu. Apskaičiuoju plotą:

$$(2x + y)x = (2 \cdot 21 + 13)21 = 1\,155 \text{ langeliai.}$$

Trūksta vieno langelio!

Ką tai reiškia?! Kodėl taip yra?

Ką jūs būtumėte atsakę mano jaunajam draugui? Prieš skaitydami sprendimą, gerai apgalvokite visą šį paradoksą. Kokį vaidmenį jame turi Fibonači skaičiai?

S p r e n d i m a s. Mano jaunasis draugas per daug pasitikėjo savo akimis ir nepatvirtino savo veiksmų į r o d y m a i s, o tai ir atvedė jį prie menamų prieštaravimų.

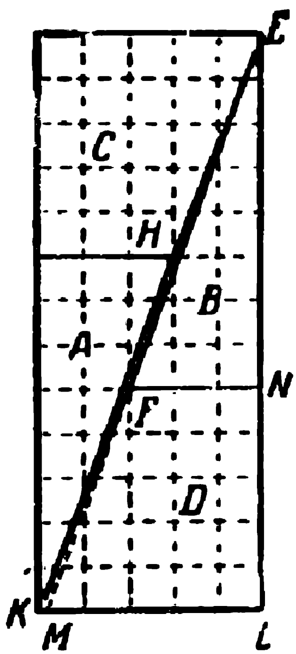
Priešingai jo tvirtinimams, jis n ė k a r t o iš kvadrato dalių negavo i š t i s o stačiakampio; būtinai turėjo būti gaunami plyšiai, gal būt, nepastebimi akiai, arba nepastebimas vienos dalies persiklojimas su kita.

Išanalizuokime kurį nors iš jo «palankių» atvejų, pavyzdžiui, tą, kada 64 langelių kvadrato kraštinės buvo padalytos į 5 ir 3 vienetų ilgio dalis (213 pieš.). Sudedant trikampį *A* su trapecija *C* ir trikampį *B* su trapecija *D*, kaip parodyta 214 piešinyje, linijos *EFK* ir *EHK* nesutaps į vieną stačiakampio įstrižainę *EK*, nes linijos *EFK* ir *EHK* —

ne tiesės, o laužtinės su labai nedideliu lūžiu taškuose F ir H.

Tai lengva įrodyti. Tegul M — taškas, kuriame susikerta stačiakampio kraštinė KL su trikampio EFN kraštinės EF tąsa.

Jei EFK tiesė, o ne laužtinė, tai taškas M sutaps su tašku K. Skaičiavimais patikrinkime, ar sutampa šie taškai. Iš trikampių EFN ir EML panašumo turime:



214 pieš.

$$ML : FN = EL : EN,$$

arba

$$ML : 3 = 13 : 8.$$

Iš čia

$$ML = \frac{13 \cdot 3}{8} = 4{,}875,$$

kai tuo tarpu $KL = 5$.

Taškas M, kaip matote, nesutampa su viršūne K, vadinasi, EFK, o taip pat ir EHK — laužtinės.

Stačiakampio plotas iš tikrųjų turi 65 langelius, tačiau jame yra lygiagretainio pavidalo plyšys $EFKH$, kurio plotas kaip tik ir sudaro vieną langelį.

Lieka išaiškinti du klausimus:

1) kodėl mūsų «eksperimentatoriui» kvadrato ir stačiakampio plotų nesutapimas visais, jam atrodžiusiais pasisekusiais, atvejais sudarė lygiai vieną langelį ir

2) kokiu kvadrato kraštinių padalijimo atveju jis galėjo gauti ištisą stačiakampį, taigi, ir visišką plotų sutapimą?

Pasinaudokime algebra. Kvadrato (žr. 212 pieš.) plotas lygus

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Stačiakampio (žr. 212 pieš.) plotas lygus

$$(2x + y)x = 2x^2 + xy.$$

Stačiakampio ir kvadrato plotų skirtumas R lygus

$$R = x^2 - xy - y^2.$$

Kvadrato ir stačiakampio plotai bus lygūs, jei

$$x^2 - xy - y^2 = 0.$$

Padaliję iš y^2, gausime $\frac{x}{y}$ atžvilgiu kvadratinę lygtį:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0.$$

Atsižvelgdami tiktai į teigiamą sprendinį, turėsime:

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

T i k t a i esant tokiam (iracionaliniam) kvadrato kraštinių dalių x ir y santykiui, kai kvadratas padalijamas į du lygius trikampius ir į dvi lygias trapecijas, galimas lygiavertis kvadrato pavertimas stačiakampiu.

Esant racionalinėms x ir y reikšmėms, R negali būti lygus nuliui. Esant s v e i k o m s x ir y reikšmėms, m a ž i a u s i a s galimas plotų skirtumas $R = 1$. Štai šį mažiausią s v e i k ą skirtumą R mano jaunasis draugas ir gaudavo, kai x ir y reikšmėmis imdavo Fibonači sekos gretimų skaičių porą (pirmo mėginimo metu ėmė $x = 5$, $y = 3$, antro $x = 8$, $y = 5$, dviejų tolesnių $x = 13$, $y = 8$ ir $x = 21$, $y = 13$), nes kaip tik jie patenkina vieną iš lygčių $x^2 - xy - y^2 = 1$ arba $x^2 - xy - y^2 = -1$ (žr. 376 psl.).

362. Fibonači sekos skaičių savybės

Surasta daug įdomių Fibonači sekos

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

skaičių tarpusavio ryšių.

1) Šios sekos narių sudarymo principas atveda prie šios bet kurių jos trijų gretimų narių S_{n-2}, S_{n-1} ir S_n priklausomybės:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

Šios formulės pagalba galima iš pirmųjų dviejų sekos narių nustatyti jos trečiąjį narį, iš antrojo ir trečiojo — ketvirtąjį, iš trečiojo ir ketvirtojo — penktąjį ir t. t.

2) Gera būtų mokėti iš karto gauti bet kurį sekos narį S_n, žinant tik jo vietos numerį n. Pasirodo, kad tai pilnai galima, bet čia mes susiduriame su vienu iš keistų netikėtumų, kurie matematikoje neretai pasitaiko.

Bet kuris Fibonači sekos narys — sveikas skaičius, vietos numeris — taip pat sveikas skaičius. Natūralu būtų laukti, kad bet kuris sekos narys S_n gaunamas, priklausomai nuo jo užimamos vietos numerio n, veiksmų tik su sveikais skaičiais pagalba (pavyzdžiui, kaip progresijose). Bet tai ne taip. Ne tiktai iš sveikų, bet net iš visų sveikų ir trupmeninių (racionalinių) skaičių negalima sudaryti mus dominančios formulės.

Iš keblios padėties išeiti padeda du irracionaliniai skaičiai:

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ir} \quad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Prisiminkite, kaip tie patys du skaičiai paversdavo stačiakampio ir kvadrato plotų skirtumą R nuliu (žr. 361 užd., 381 psl.). Iš tiesų nelauktas susitikimas!

Taigi, jei n — vietos numeris, tai bet kurį Fibonači sekos narį S_n jūs galite gauti pagal formulę

$$S_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}. \qquad (*)$$

Kai $n = 1$,

$$S_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1;$$

kai $n = 2$,

$$S_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1.$$

Kadangi ši formulė dviem gretimiems sekos nariams pasitvirtina, o kiekvienas tolesnis Fibonači sekos narys gaunamas kaip suma dviejų pirmesnių, tai toliau neverta tikrinti formulės teisingumą atskiriems atvejams; galima iš

karto įsitikinti, kad ji teisinga bet kuriam numeriui n. Parašykime jos išraišką dviem gretimiems n:

$$S_{n-2}=\frac{a_1^{n-2}-a_2^{n-2}}{\sqrt{5}} \text{ ir } S_{n-1}=\frac{a_1^{n-1}-a_2^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Formulė (*) bus teisinga bet kuriam n, jei šių dviejų reiškinių suma duos atitinkamą S_n išraišką:

$$S_{n-2}+S_{n-1}=\frac{a_1^{n-2}-a_2^{n-2}}{\sqrt{5}}+\frac{a_1^{n-1}-a_2^{n-1}}{\sqrt{5}}=$$
$$\frac{a_1^{n-2}(a_1+1)-a_2^{n-2}(a_2+1)}{\sqrt{5}}.$$

Žinodami, kas yra tie a_1 ir a_2, jūs galite lengvai patikrinti skaičiavimu, kad

$$a_1+1=a_1^2 \text{ ir } a_2+1=a_2^2.$$

Grįžę prie sumos $S_{n-2}+S_{n-1}$, gausime:

$$S_{n-2}+S_{n-1}=\frac{a_1^{n-2}a_1^2-a_1^{n-2}a_2^2}{\sqrt{5}}=\frac{a_1^n-a_2^n}{\sqrt{5}}=S_n;$$

tai ir reikėjo įrodyti.

3) Žinant, kaip randamas bet kuris Fibonači sekos narys S_n pagal jo užimamos vietos numerį:

$$S_n=\frac{a_1^n-a_2^n}{\sqrt{5}}, \text{ kur } a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ir } a_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

lengva įrodyti, kad bet kuri Fibonači sekos gretimų skaičių pora S_n ir S_{n+1} patenkina vieną iš lygčių $x^2-xy-y^2=$ $=\pm 1$, be to, jei $y=S_n$, tai $x=S_{n+1}$. Pakeitę lygties nežinomuosius atitinkamomis išraiškomis

$$y=\frac{a_1^n-a_2^n}{\sqrt{5}},\ x=\frac{a_1^{n+1}-a_2^{n+1}}{\sqrt{5}},$$

turėsime:

$$\frac{\left(a_1^{n+1}-a_2^{n+1}\right)^2}{5}-\frac{\left(a_1^{n+1}-a_2^{n+1}\right)\left(a_1^n-a_2^n\right)}{5}-\frac{\left(a_1^n-a_2^n\right)^2}{5}=\pm 1,$$

$$a_1^{2n+2}-2a_1^{n+1}a_2^{n+1}+a_2^{2n+2}-a_1^{2n+1}+a_1^na_2^{n+1}+a_1^{n+1}a_2^n-$$
$$-a_2^{2n+1}-a_1^{2n}+2a_1^na_2^n-a_2^{2n}=\pm 5.$$

Sugrupuojame narius su vienodais pagrindais:

$$a_1^{2n}\left(a_1^2-a_1-1\right)+a_2^{2n}\left(a_2^2-a_2-1\right)+$$
$$+a_1^na_2^n\left(-2a_1a_2+a_2+a_1+2\right)=\pm 5.$$

Įstatę atitinkamas a_1 ir a_2 reikšmes į reiškinius, esančius skliaustuose, gausime: $5a_1^n\cdot a_2^n=\pm 5$, arba $5(a_1a_2)^n=$ $=\pm 5$, bet

$$a_1a_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-1.$$

Vadinasi, kai n lyginis, $5(-1)^n=5$, o kai n nelyginis, $5(-1)^n=-5$.

4) Labai įdomus Fibonači sekos n narių sumos formulės pavidalas:

$$S_1+S_2+\ldots+S_n=S_{n+2}-1.$$

Fibonači sekos pirmųjų n narių suma vienetu mažesnė už tos pačios eilutės $(n+2)$-tąjį narį.

Į r o d y m a s. Pagal eilutės narių sudarymo dėsnį turime:

$$\begin{aligned}
S_{n+2}&=S_{n+1}+S_n,\\
S_{n+1}&=S_n+S_{n-1},\\
S_n&=S_{n-1}+S_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_4&=S_3+S_2,\\
S_3&=S_2+S_1.
\end{aligned}$$

Sudėję tas lygybes ir sutraukę panašius narius, gausime:

$$S_{n+2}=(S_n+S_{n-1}+\ldots+S_1)+S_2;$$

vadinasi,

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = S_{n+2} - S_2,$$
$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = S_{n+2} - 1,$$
$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} - 1.$$

5) Fibonači sekos skaičių kvadratų suma išreiškiama dviejų gretimų tos pačios sekos narių sandauga:

$$S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2 = S_n \cdot S_{n+1}. \qquad (**)$$

Pavyzdžiui,

$$1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2,$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3,$$
$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5 \text{ ir t. t.}$$

Įrodymui pritaikykime pilnosios matematinės indukcijos metodą. Tegul formulė (**) teisinga kuriam nors narių skaičiui k:

$$S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_k^2 = S_k \cdot S_{k+1}.$$

Pridėkime prie abiejų lygybės pusių po S_{k+1}^2:

$$S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_k^2 + S_{k+1}^2 = S_k \cdot S_{k+1} + S_{k+1}^2 =$$
$$= S_{k+1}(S_k + S_{k+1}) = S_{k+1} \cdot S_{k+2}.$$

Formulė, pagal prielaidą teisinga k dėmenims, yra teisinga ir $(k+1)$ dėmeniui.

Kaip parodė betarpiškas patikrinimas, formulė (**) teisinga, kai $k = 2$. To užtenka, kad dabar galima būtų tvirtinti, jog ji bus teisinga ir bet kuriam sveikam skaičiui n.

Pasinaudodami formule (*) arba pilnosios matematinės indukcijos metodu, savarankiškai įrodykite toliau duodamas priklausomybes.

6) Fibonači sekos kiekvieno nario kvadratas, sumažintas prieš jį esančio ir po jo einančio narių sandauga, yra pakaitomis tai $+1$, tai -1.

Pavyzdžiui,

$$2^2 - 1\cdot 3 = +1,$$
$$3^2 - 2\cdot 5 = -1,$$
$$5^2 - 3\cdot 8 = +1,$$
$$\cdots\cdots$$

bendrai

$$S_n^2 - S_{n-1}S_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

7) $S_1 + S_3 + \ldots + S_{2n-1} = S_{2n}$.

8) $S_2 + S_4 + \ldots + S_{2n} = S_{2n+1} - 1$.

9) Fibonači sekos kiekvienas trečias skaičius — lyginis, kiekvienas ketvirtasis dalijasi iš 3, kiekvienas penktasis — iš 5, kiekvienas penkioliktasis — iš 10.

10) Negalima nubrėžti trikampio, kurio kraštinės būtų Fibonači sekos skaičiai*.

C. FIGŪRINIAI SKAIČIAI

363. Figūrinių skaičių savybės

1) Dar seniai prieš mūsų erą mokslininkai, kombinuodami natūrinius skaičius, sudarydavo iš jų sudėtingas sekas, suteikdami tų sekų elementams tą ar kitą geometrinę interpretaciją.

Taip, pavyzdžiui, V—IV amžiuose prieš m. e. atsirado vadinamosios *figūrinių skaičių* sekos.

Iš pradžių išnagrinėsime tokią seką, kurioje kiekvienų dviejų gretimų narių skirtumas yra lygus tam pačiam natūriniam skaičiui (aritmetinė progresija), pavyzdžiui,

1, 2, 3, 4, 5, ... (skirtumas $d = 1$),
1, 3, 5, 7, 9, ... (skirtumas $d = 2$),
1, 4, 7, 10, 13, ... (skirtumas $d = 3$);

---

* Papildomos žinios apie Fibonači skaičių savybes yra knygelėje: Н. Н. Воробьев, Числа Фибоначчи, Гостехиздат, 1951. Skaičių sekoms, analoginėms Fibonači sekai, paskirta knyga: А. И. Маркушевич, Возвратные последовательности, Гостехиздат, 1950. (Lietuvių kalba šios knygelės neišleistos. *Red.*)

arba bendru pavidalu:

$$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d,\ 1+4d,\ \ldots$$

Kiekvienas sekos elementas turi savo vietą. Kad gautume n-tąjį sekos elementą (pavadinkime jį a_n), reikia prie pirmojo sekos elemento pridėti sekos skirtumo ir skaičiaus, kuris vienetu mažesnis už to elemento a_n užimamos vietos numerį, sandaugą:

$$a_n = 1 + d(n-1).$$

Kiekvienos tokios sekos elementai vadinami *tiesiniais figūriniais* skaičiais arba, kitaip, *pirmos eilės figūriniais skaičiais.*

2) Iš sekų su tiesiniais figūriniais skaičiais sudarome tų skaičių paeiliui einančias sumas: pirmąją «sumą» iš vieno pirmojo tiesinių figūrinių skaičių sekos elemento, antrąją sumą — sudėdami tos pačios sekos pirmuosius du elementus, trečiąją sumą — sudėdami pirmuosius tris elementus ir t. t., n-tąją sumą — sudėdami pirmuosius n elementų.

Iš pirmosios tiesinių figūrinių skaičių sekos

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

sudaroma ši nauja seka — sumų seka:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1+2=3,\ S_3 = 1+2+3=6,$$
$$S_4 = 1+2+3+4=10,\ S_5 = 1+2+3+4+5=15, \ldots,$$

arba

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots$$

Šie skaičiai buvo pavadinti *trikampiniais.*

Iš antrosios tiesinių figūrinių skaičių sekos

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

sudaroma tokia sumų seka:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots$$

Šie skaičiai buvo pavadinti *kvadratiniais.*

Iš trečiosios tiesinių figūrinių skaičių sekos

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots$$

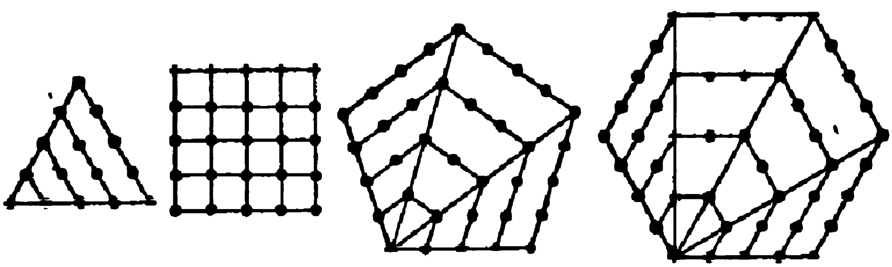
galima sudaryti *penkiakampinių* skaičių seką:

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ \ldots$$

Analogiškai galima sudaryti *šešiakampinius, septyniakampinius* ir pan. skaičius.

Visi tie daugiakampiniai skaičiai vadinami *plokštuminiais* figūriniais skaičiais arba *antros eilės figūriniais skaičiais.*

3) Geometriniai «vardai», kuriuos gavo tie skaičiai, paaiškinami tuo, kad juos galima interpretuoti geometriškai. Nubrėžkime lygiakraštį trikampį, kvadratą, taisyklinguosius penkiakampį, šešiakampį ir t. t. su kraštinėmis, lygiomis 1. Po to kiekvienoje figūroje, imdami išeities tašku vieną iš viršūnių, pailginkime visas kraštines 2, 3, 4, ... kartus, tai yra, kaip sako matematikai, nubrėžkime daugiakampius, perspektyviškai panašius duotiesiems (215 pieš.).



215 pieš.

Visose gautųjų figūrų viršūnėse ir ant jų kraštinių nuotoliais, lygiais 1, išdėliokime skritulėlius. Suskaičiuodami skritulėlius, išdėstytus kiekviename trikampyje, gausime trikampinių skaičių seką:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots$$

Suskaičiuodami skritulėlius, esančius kiekviename kvadrate, gausime kvadratinių skaičių seką:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots$$

Analogiškai suskaičiuodami skritulėlius kiekviename penkiakampyje, šešiakampyje ir t. t. gausime atitinkamai penkiakampinių, šešiakampinių ir t. t. skaičių sekas.

4) Duosime visų plokštuminių figūrinių skaičių santrauką:

d	Figūra	Skaičiai						Bendrasis narys S_n
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5		
1	Trikampis	1	3	6	10	15	...	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	Kvadratas	1	4	9	16	25	...	n^2
3	Penkiakampis	1	5	12	22	35	...	$\frac{n(3n-1)}{2}$
4	Šešiakampis	1	6	15	28	45	...	$n(2n-1)$
.	......	.	.	.	.	.	...	......
d		1	$2+d$	$3+3d$	$4+6d$	$5+10d$		$\frac{n[dn-(d-2)]}{2}$

Bendrasis kiekvienos plokštuminių figūrinių skaičių sekos narys S_n, kaip tai seka iš jų apibrėžimo, yra atitinkamos tiesinių figūrinių skaičių sekos n elementų suma:

$$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d, \ldots, 1+d(n-1),$$

kur $d = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Kitais žodžiais, S_n — tai aritmetinės progresijos, kurios $a_1 = 1$, $a_n = 1 + d(n-1)$ ir skirtumas $d = 1, 2, 3, \ldots$, n narių suma.

Prisiminkite aritmetinės progresijos narių sumos formulę:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Pagal tą formulę turime:

$$S_n = \frac{[1+1+d(n-1)]n}{2} = \frac{n[dn-(d-2)]}{2}.$$

Iš čia, kai $d = 1$, gauname lentelės pirmosios eilutės S_n formulę, kai $d = 2$, gauname lentelės antrosios eilutės S_n formulę ir t. t.

5) Tarp natūrinių skaičių ir plokštuminių figūrinių skaičių ir tarp pačių plokštuminių figūrinių skaičių egzistuoja daug įdomių priklausomybių.

Pjeras Fermá (1601—1665), Tulūzos miesto (Prancūzija) juristas ir visuomeninis veikėjas, užsiiminėdamas matematika poilsio valandomis (tačiau tai nekliudė jam padaryti didelių atradimų skaičių teorijoje) surado, pavyzdžiui, kad

a) *kiekvienas natūrinis skaičius yra trikampinis arba dviejų ar trijų trikampinių skaičių suma;*

b) *kiekvienas natūrinis skaičius yra arba kvadratas, arba dviejų, trijų ar keturių kvadratinių skaičių suma; kiekvienas natūrinis skaičius yra arba penkiakampinis, arba dviejų, trijų, keturių ar penkių penkiakampinių skaičių suma;*

c) *bendrai kiekvienas natūrinis skaičius gali būti išreikštas ne daugiau kaip k k-kampinių skaičių sumos pavidalu.*

Atskiriems atvejams šią teoremą įrodė Peterburgo matematikas Euleris, o bendrą įrodymą 1815 m. rado prancūzų matematikas Koši.

Pasimiklinkite: imkite kurį nors natūrinį skaičių ir jį suskaidykite į trikampinių, kvadratinių ar penkiakampinių skaičių sumą. Galima lenktyniauti, kas greičiau tai atliks.

6) Matematikas Diofantas (Graikija, III šmtm. prieš m. e.) rado tarp trikampinių skaičių T ir kvadratinių K paprastą ryšį:

$$8T + 1 = K.$$

Galima labai vaizdžiai tą Diofanto formulę pavaizduoti kad ir trikampinio skaičiaus 21 pavyzdžiu.

216 piešinyje atvaizduoti 169 ratukai, išdėstyti kvadrate. Jie sudaro kvadratinį skaičių K. Vienas ratukas užima kvadrato centrą, o kiti 168 sugrupuoti į 8 trikampinius skaičius T, aštuonių «stačiakampių trikampių» su laužtinėmis įžambinėmis pavidalu.

Gaunama: $8T + 1 = K$.

7) Savarankiškai algebros pagalba įrodykite:

a) kad Diofanto formulė teisinga,

b) kad joks trikampinis skaičius negali baigtis skaitmenimis 2, 4, 7 ir 9,

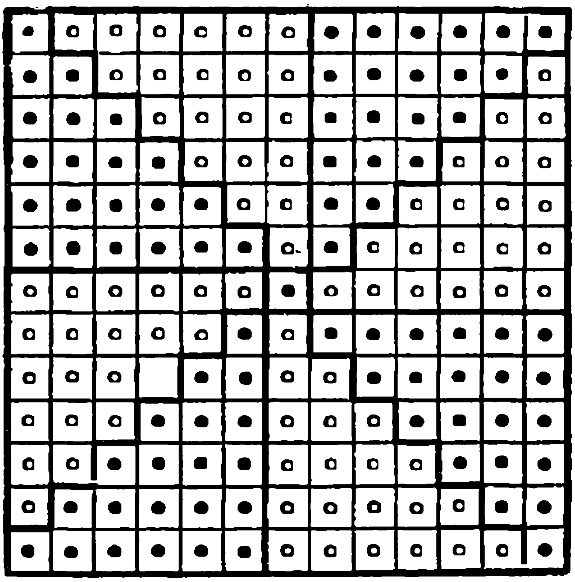
c) kad kiekvienas šešiakampinis skaičius yra trikampinis su nelyginiu numeriu.

8) Natūrinių skaičių, tai yra vienos iš tiesinių figūrinių skaičių rūšių, laipsnių sumoms žinoma tokia formulė:

$$(1+2+3+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$$

(žr. 355 psl.). Jakobi atrado kitą įdomią priklausomybę tarp tų pačių skaičių:

$$2(1+2+3+\ldots+n)^4 = \\ =(1^5+2^5+\ldots+n^5)+(1^7+2^7+\ldots+n^7).$$



8T+1=K

216 pieš.

Analoginė priklausomybė buvo surasta tarp trikampinių skaičių, tai yra vienos iš plokštuminių figūrinių skaičių rūšių, laipsnių sumų:

$$3\left[1+3+6+10+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}\right]^3 = \\ =\left[1^3+3^3+\ldots+\frac{[n(n+1)]^3}{2^3}\right]+ \\ +2\left[1^4+3^4+\ldots+\frac{[n(n+1)]^4}{2^4}\right].$$

Pavyzdžiui,

$$3(1+3+6)^3 = 1^3+3^3+6^3+2(1^4+3^4+6^4) = 3\,000,$$
$$3(1+3+6+10)^3 =$$
$$= 1^3+3^3+6^3+10^3+2(1^4+3^4+6^4+10^4) = 24\,000.$$

9) Sudarydami iš plokštuminių figūrinių skaičių paeiliui einančias sumas $V_1 = S_1$, $V_2 = S_1 + S_2$, $V_3 = S_1 + S_2 + S_3$, $V_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ ir t. t., gausime *erdvinius* figūrinius skaičius arba *trečios eilės figūrinius skaičius:* $V_1, V_2, V_3, \ldots$

Pavyzdžiui, trikampinių skaičių eilutė

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

sudaro šią trečios eilės figūrinių skaičių eilutę:

$$1, 4, 10, 20, 35, \ldots$$

Tie skaičiai vadinami dar piramidiniais, kadangi, geometriškai juos vaizduojant, iš vienodo skersmens rutulių sudėliojamos piramidės.

Padėkime po rutuliu tris rutulius. Gausime «piramidę» iš keturių rutulių, kaip skaičiaus 4 atvaizdavimą. Iš apačios pakiškime dar 6 rutulius, gausime piramidę iš 10 rutulių, kaip skaičiaus 10 atvaizdavimą (217 pieš.) ir t. t.

10) Duosime visų trečios eilės figūrinių skaičių santrauką:

d	Skaičiai						Bendrasis narys V_n
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5		
1	1	4	10	20	35	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
2	1	5	14	30	55	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3	1	6	18	40	75	...	$\frac{1}{2}n^2(n+1)$
4	1	7	22	50	95	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
.	.	.	..	..	..	...	. . . .
d	1	$3+d$	$6+4d$	$10+10d$	$15+20d$		$\frac{1}{6}n(n+1)[dn-(d-3)]$

Išvesti bendrojo nario V_n formulę erdviniams figūriniams skaičiams sunkiau, nei plokštuminiams. Prireiks tam tikrų žinių iš junginių teorijos. Tie skaitytojai, kurie junginių teo-



217 pieš.

rijos dar nesimokė, gali praleisti tolesnį V_n formulės išvedimą.

Įveskime pažymėjimus:

$V_2 - V_1 = b_1$, čia $b_1 = 3 + d - 1 = 2 + d$;
$V_3 - V_2 = b_2$, čia $b_2 = 6 + 4d - 3 - d = 3 + 3d$;
$V_4 - V_3 = b_3$, čia $b_3 = 10 + 10d - 6 - 4d = 4 + 6d$;
$V_5 - V_4 = b_4$, čia $b_4 = 15 + 20d - 10 - 10d = 5 + 10d$;
$V_6 - V_5 = b_5$
. . . .

$$V_2 = V_1 + b_1,$$
$$V_3 = V_2 + b_2,$$
$$V_4 = V_3 + b_3,$$
$$V_5 = V_4 + b_4,$$
$$V_6 = V_5 + b_5,$$
. . . .

Toliau:

$b_2 - b_1 = r_1$, čia $r_1 = 3 + 3d - 2 - d = 1 + 2d$;
$b_3 - b_2 = r_2$, čia $r_2 = 4 + 6d - 3 - 3d = 1 + 3d$;
$b_4 - b_3 = r_3$, čia $r_3 = 5 + 10d - 4 - 6d = 1 + 4d$;
$b_5 - b_4 = r_4$
. . . .

$$b_2 = b_1 + r_1,$$
$$b_3 = b_2 + r_2,$$
$$b_4 = b_3 + r_3,$$
$$b_5 = b_4 + r_4,$$
. . . .

Dabar matome, kad

$$r_2 - r_1 = d,$$
$$r_3 - r_2 = d,$$
$$r_4 - r_3 = d \text{ ir t. t.},$$

iš kur

$$r_2 = r_1 + d,$$
$$r_3 = r_2 + d = r_1 + 2d,$$
$$r_4 = r_3 + d = r_1 + 3d \text{ ir t. t.}$$

Šie tarpusavio ryšiai įgalina išreikšti skaičius

$V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ per V_1, b_1, r_1 ir d;
$V_2 = V_1 + b_1,$
$V_3 = V_2 + b_2 = V_1 + b_1 + b_1 + r_1 = V_1 + 2b_1 + r.$

Matome, kad koeficientai prie b_1 ir r_1 gali būti išreikšti derinių iš dviejų elementų formulėmis:

$$2 = C_2^1, \ 1 = C_2^2.$$

Tada

$$V_3 = V_1 + C_2^1 b_1 + C_2^2 r_1 .$$

Toliau:

$$V_4 = V_3 + b_3 = V_1 + 2b_1 + r_1 + b_2 + r_2 =$$
$$= V_1 + 2b_1 + r_1 + b_1 + r_1 + r_1 + d = V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d.$$

Kadangi $3 = C_3^1 = C_3^2$ ir $1 = C_3^3$, tai

$$V_4 = V_1 + C_3^1 b_1 + C_3^2 r_1 + C_3^3 d,$$
$$V_5 = V_4 + b_4 = V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d + b_3 + r_3 =$$
$$= V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d + b_2 + r_2 + r_1 + 2d =$$
$$= V_1 + 3b_1 + 3r_1 + d + b_1 + r_1 + r_1 + d + r_1 + 2d =$$
$$= V_1 + 4b_1 + 6r_1 + 4d.$$

Kadangi $4 = C_4^1 = C_4^3$, $6 = C_4^2$, tai

$$V_5 = V_1 + C_4^1 b_1 + C_4^2 r_1 + C_4^3 d.$$

V_6-jam gauname:

$$V_6 = V_1 + C_5^1 b_1 + C_5^2 r_1 + C_5^3 d.$$

V_n -jam:

$$V_n = V_1 + C_{n-1}^1 b_1 + C_{n-1}^2 r_1 + C_{n-1}^3 d.$$

Į čia įstatę b_1, r_1 išraiškas ir išsikleidę derinių formules, gausime:

$$V_n = 1 + (n-1)(2+d) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}(1+2d) + \\ + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3}d.$$

Po pertvarkymo

$$V_n = \frac{1}{6}n(n+1)[dn-(d-3)].$$

Kai $d=1$, gausime:

$$V_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Kai $d=2$,

$$V_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ ir t.t.}$$

(žr. lentelės 392 puslapyje pirmąją ir antrąją eilutes).

11) Tema savarankiškiems pratimams (tiktai tiems, kurie susipažinę su «derinių» formulėmis ir savybėmis):

Tokiu pat keliu, kaip buvo gauti trečios eilės figūriniai skaičiai, sudarykite ketvirtos eilės figūrinius skaičius ir raskite bendrojo nario formulę.

364. Pitagoro skaičiai

Kai kada tenka nubrėžti tokį statųjį trikampį, kurio abu statiniai ir įžambinė būtų reiškiami sveikais skaičiais. Šiam tikslui tinkami sveiki skaičiai ir yra vadinami *Pitagoro* skaičiais, nes jie turi patenkinti Pitagoro surastą priklausomybę tarp statinių x ir y bei įžambinės z:

$$x^2+y^2=z^2.$$

Duodami statiniams x ir y bet kokius ilgius, įžambinę galime apskaičiuoti pagal formulę $z=\sqrt{x^2+y^2}$; tačiau sunku atsitiktinai taip parinkti sveikas x ir y reikšmes, kad z taip pat būtų sveikas.

Pavyzdžiui, kai $x = 3$, $y = 4$, gauname $z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, gerai žinomą «egiptiečių» trikampį (3, 4, 5), bet kai $x = 2$, $y = 6$, įžambinė $z = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$ neišreiškiama sveiku skaičiumi.

Nepaisant to, Pitagoro skaičių yra begalinė daugybė. Bet kuris kompleksinis skaičius $a + bi$ su sveikais a ir b yra skaičius, iš kurio gaunami Pitagoro skaičiai.

Prieš tai priminsiu, kad raide i pažymėta $\sqrt{-1}$, be to, $i^2 = -1$. Turint galvoje tą priklausomybę, kompleksinis skaičius keliamas kvadratu pagal «sumos kvadrato» formulę.

Pavyzdžiui,

a) $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$,
b) $(2 + 5i)^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i$.

Kiekvieno kompleksinio skaičiaus $a + bi$ kvadratas taip pat yra kompleksinis skaičius $x + yi$ pavidalo. Skaičiai x, y ir $(a^2 + b^2)$ visada bus Pitagoro skaičiai.

Pavyzdžiui a) turime:

$$x = 5,\ y = 12,$$
$$a^2 + b^2 = 3^2 + 2^2 = 13,$$

be to,

$$5^2 + 12^2 = 13^2;$$

pavyzdžiui b) turime:

$$x = -21,\ y = 20,$$
$$a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 29,$$

be to,

$$21^2 + 20^2 = 29^2.$$

Sakysim, mes panorėjome iš skaičių 1 ir 4 sudaryti Pitagoro skaičių trejetą. Sudarome kompleksinį skaičių $1 + 4i$ (arba kitą: $4 + i$). Pakeliame kvadratu:

$$(1 + 4i)^2 = -15 + 8i.$$

Dabar turime:

$$15^2 + 8^2 = 17^2 \ (17 = 1^2 + 4^2).$$

Paprastas, lengvai įsimenamas būdas!

Jei šie skaičiavimai atliekami raidėmis, gaunamos gerai žinomos Pitagoro skaičių x, y ir z parinkimui formulės:

$$(a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

Iš čia

$$x = a^2 - b^2,\ y = 2ab,\ z = a^2 + b^2,$$

kur a ir b — bet kokie sveiki skaičiai.

Įdomu dar pastebėti, kad bet kurio kompleksinio skaičiaus kubas analoginiu keliu atveda prie lygties

$$x^2 + y^2 = z^3$$

sprendimo.

Pavyzdžiui, tegul

$$a + bi = 1 + 2i.$$

Pakelkime kubu:

$$(1+2i)^3 = 1 + 3\cdot 2i + 3\cdot 4i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i$$

(kadangi $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$);

$$(1+2i)^3 = -11 - 2i.$$

Iš čia turime:

$$x = 11,\ y = 2,\ z = 1^2 + 2^2 = 5.$$

Iš tikrųjų,

$$11^2 + 2^2 = 5^3.$$

Dar vienas pavyzdys:

$$(5+3i)^3 = 125 + 3\cdot 25\cdot 3i + 3\cdot 5\cdot 9i^2 + 27i^3 = -10 + 198i.$$

Turime:

$$10^2 + 198^2 = 34^3.$$

Tokiu metodu jūs lengvai rasite bet kurį lygties

$$x^2 + y^2 = z^n$$

sprendinių sveikais skaičiais kiekį, kai n — bet koks sveikas skaičius.

Raskite, pavyzdžiui, kurį nors trejetą skaičių x, y ir z, patenkinančių lygtį

$$x^2 + y^2 = z^4.$$

PENKIOLIKTASIS SKYRIUS

GEOMETRINĖ NUOVOKA DARBE

365. Sėjos geometrija

Prieš keletą metų Ukrainos Tarybų Socialistinės Respublikos laukuose kolūkiečiai-novatoriai pradėjo taikyti naują grūdinių kultūrų sėjos metodą. Vietoje įprastos sėjos eilėmis jie panaudojo vadinamąją kryžminę sėją, o pastaruoju metu ir kryžminę-įstrižinę sėją.

Kokia kryžminės sėjos esmė?

Užbaigus visame lauke priešsėjinį dirvos paruošimą, eilinės sėjamosios paleidžiamos iš pradžių išilgai lauko ir tokiu būdu išsėjama pusė visos sėklos, paskirtos tam laukui; antra sėklos pusė įsėjama kryptimi, statmena pirmajai (218 pieš., *a*), tai yra skersai lauko.

Tie patys kolūkiai iš laukų, kuriuose buvo pritaikytas kryžminis sėjos metodas, gavo žieminių kviečių iš hektaro 10—12 centnerių daugiau, nei iš tų laukų, kuriuose buvo pritaikytas paprastas sėjimas*.

Naudojant kryžminį sėjos metodą, sėjimą skersine kryptimi, statmena išilginei, galima būtų atlikti vienu metu su išilgine (antro sėjamojo agregato pagalba), bet vis tik ne anksčiau, kaip užbaigus visame lauke priešsėjinį dirvos paruošimą.

Nuovoka padėjo nugalėti ir šį sunkumą.

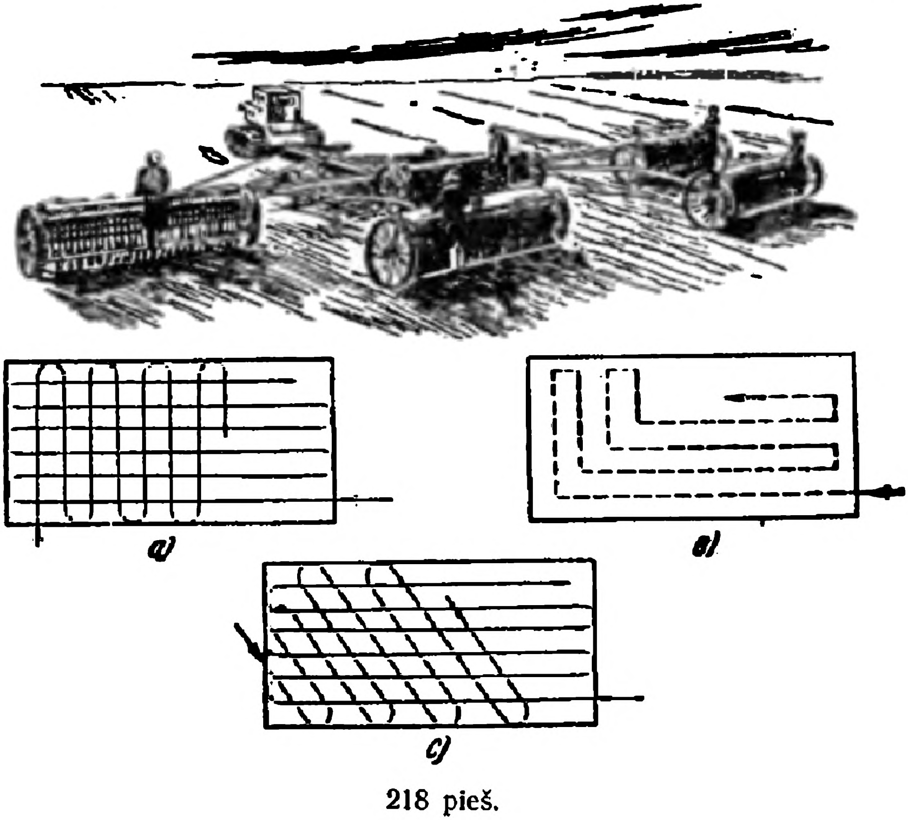
Kultivatoriai, kuriais įdirbama žemė prieš sėjimą, buvo paleisti maršrutu, atvaizduotu 218 piešinyje, *b*, punktyrine

---

* Faktai, išdėstyti šioje apybraižoje, paimti iš žemės ūkio mokslų kandidato P. Prisiažniuko straipsnio, išspausdinto laikraščio «Київська правда» 1951 m. rugpiūčio 15 d. numeryje.

linija, juos pasukant stačiu kampu kiekvienos varsnos gale. Šis nuoseklus išilginis-skersinis dirvos įdirbimas, kaip lengva suprasti, įgalino vienu metu paleisti du sėjamuosius agregatus dviem tarpusavy statmenomis kryptimis, beveik įkandin kultivatoriaus.

Didžiulis sėjos laiko sutrumpinimas padengdavo nedidelį trūkumą, būdingą tam išilginio-skersinio priešsėjinio dirvos įdirbimo būdui (žr. 218 pieš., *b*): kultivatoriaus



218 pieš.

varsnos palaipsniui trumpės ir į darbo pabaigą liekantį nedidelį stačiakampį lauko sklypą sunku bus įdirbti mašinomis; be to, kultivatorius tenka pasukti ne lauko pakraščiuose, o vidury ploto; kiekvieną kartą pasukant kultivatorių, pasilieka apylanka.

Žemės ūkio pirmūnų kūrybinė mintis nenorėjo taikstytis ir su tuo trūkumu.

Bet kaip pašalinti trūkumą ir tuo pat metu išsaugoti vienlaikio dirvos įdirbimo ir sėklos įsėjimo iš karto dviem kryptimis pranašumą?

Kol kas geriausias šio uždavinio sprendimas yra perėjimas prie kryžminio-įstrižinio sėjos metodo.

Naudojant kryžminį-įstrižinį sėjos metodą, kultivatorius, įdirbantis žemę prieš sėjimą, paleidžiamas tiktai viena kryptimi, sakysime, išilgai lauko, o įkandin jo — pirmasis sėjamasis agregatas (218 pieš., *c*). Kai tiktai įdirbtas stačiakampis laukas bus pakankamai didelis (vadinasi, dar daug laiko prieš viso lauko priešsėjinio įdirbimo užbaigimą), paleidžiamas antras sėjamasis agregatas, bet ne stačiu kampu kultivatoriaus judėjimo linijoms, o «pagal įstrižaines» (218 pieš., *c*).

Sėkla įpilama į sėjamąją lauko pakraščiuose, jai bejudant posūkiuose.

Gausių derlių meistrai pakeistą sėjos geometriją sujungia su apskaičiavimais išsėjimo normų, tai yra grūdų skaičiaus, būtino geriausiam augimo tankumui gauti.

Kas gi tai per apskaičiavimai? Jie yra tokie:

1) Nustatomas 1 000 sėklos grūdų svoris gramais (sakysime, 46 *g*).

2) Nustatomas sėklos daigumas procentais (sakysime, 98%).

3) Nustatomas sėklos švarumas procentais (sakysime, 96%).

4) Apskaičiuojamas sėklos ūkinio vertingumo koeficientas (procentais), kaip daigumo procentų skaičiaus ir švarumo procentų skaičiaus sandauga, padalyta iš 100 (mūsų pavyzdyje sėklos ūkinio vertingumo koeficientas (procentais) lygus $\frac{98 \cdot 96}{100} \approx 94\%$).

5) Nustatomas išsėjimo koeficientas, t. y. sėklų milijonų skaičius, kuris rekomenduojamas pasėti į hektarą, kad būtų gautas geriausias tankumas (pavyzdžiui, sėjant į hektarą 4 100 000 sėklų, išsėjimo koeficientas yra lygus 4,1).

6) 100 sėklos grūdų svoris gramais padauginamas iš išsėjimo koeficiento; gautasis rezultatas sudaro tiek išsėjimo normos (kilogramais) procentų, koks sėklos ūkinio vertingumo koeficientas.

Tegul, pavyzdžiui, 1 000 sėklos grūdų sveria 46 *g*, išsėjimo koeficientas — 4,1, ūkinio vertingumo koeficientas — 94%. Tada $46 \cdot 4,1 = 188,6$ *kg* sudaro 94% išsėjimo normos. Iš čia išsėjimo norma į hektarą lygi:

$$\frac{188,6 \cdot 100}{94} \approx 200\,kg.$$

Vadinasi, nustatant sėklos išsėjimo normą (kilogramais) į hektarą iš grūdų skaičiaus, reikia 1 000 sėklos grūdų svorį (kilogramais) padauginti iš išsėjimo koeficiento, padauginti iš 100 ir padalyti iš sėklos ūkinio vertingumo koeficiento.

1 uždavinys. Socialistinio Darbo Didvyrio Danilo Tkačenkos laukininkystės brigada (Čerkasų srities Špolos rajono K. Markso vardo kolūkis), naudodama kryžminį sėjos metodą, 1950 metais iš 58 *ha* ploto gavo po 52 *cnt* kviečių iš kiekvieno hektaro.

Raskite, kokią išsėjimo normą turėjo ta brigada, jei 1 000 grūdų svėrė 46 *g*, išsėjimo koeficientas buvo priimtas 4,1, o sėklos ūkinio vertingumo koeficientas 99%.

2 uždavinys. Drg. Kasjanienkos laukininkystės brigada (Čerkasų srities Korsun-Ševčenkovskio rajono Vorošilovo v. kolūkis), naudodama kryžminį sėjos metodą, 1950 metais iš 60 *ha* ploto gavo taip pat po 52 *cnt* žieminių kviečių iš kiekvieno hektaro.

Raskite, kokį ūkinio vertingumo koeficientą turėjo jų sėkla, jei 1 000 grūdų svėrė 49,6 *g*, išsėjimo koeficientas buvo priimtas 4,2, o išsėjimo norma 212 *kg* į hektarą.

366. Darbininkai-geometrai

Kas yra nužymėtojai. Ar jūs žinote apie vieną nepaprastai įdomią profesiją fabrike — nužymėtojo profesiją?

Kas yra nužymėtojas: darbininkas, inžinierius?

Jis ir darbininkas, ir inžinierius, dar daugiau: jis ir geometras, ir braižytojas, ir konstruktorius, net ir... menininkas.

Nužymėtojas daugiausia dirba prie vadinamosios «nužymėjimo lentos». Jis naudojasi įrankiais, kuriuos dažnai

pats ir sugalvoja. Nužymėtojas gali pataisyti konstruktorių ir duoti technologui patarimą; jis «skaito» brėžinius ir pats juos brėžia, bet ne ant popieriaus, ne ant klasės lentos, o betarpiškai ant daikto, ant špižiaus, ant plieno, ant detalės — tai daug kartų sunkiau ir beveik yra menas.

Ant ruošinio, ant detalės nužymėtojas nubrėžia busimo daikto piešinį. Toliau, pagal nubrėžtas linijas, «brėžius», kaip jas vadina nužymėtojai, ruošinį apdirba tekintojai, gręžikai, frezuotojai ir kt.

Jie pašalina metalo atliekas — «užleidimus» — ir suteikia daiktui tą formą, kurios kontūrus nubrėžė nužymėtojas.

Nužymėtojo darbas labai atsakingas. Jo darbo paprastai niekas nekontroliuoja. Jei jis nužymėdamas suklys, įkandin jo klaidą pakartos ir darbininkas — bus gautas niekalas.

Nužymėtojas turi pats suvokti, kaip jam greitai ir tiksliai įvykdyti nužymėjimą, nuo ko tikslingiau pradėti, kaip pasigaminti darbui pagreitinti ir suprastinti prietaisą ar šabloną.

Kuo gilesnės nužymėtojo matematinės žinios, tuo didesni jo kūrybiniai laimėjimai.

Turbogeneratoriaus statoriaus nužymėjimas. Leningrado S. M. Kirovo v. gamykloje «Elektrosila» gaminami didelio galingumo, milžiniški turbogeneratoriai (elektros srovės gamintojai).

Išorinė nejudamoji turbogeneratoriaus dalis (statorius) būna 5 *m* ilgio ir siekia iki 12—20 *t* svorio.

Iš pradžių, iki apdirbimo, statoriaus (219 pieš.) liejinys turi ilgį (L), truputį didesnį už tą (l), kurį jis turi turėti pagal brėžinį.

Ilgių skirtumas $\delta = L - l$ vadinamas užleidimu. Užleileidimas pagal nužymėtojo nurodymus bus pašalintas, toliau apdirbant priekinę ir užpakalinę statoriaus sieneles, arba, kaip jos vadinamos, *galus (1)*, frezavimo staklėmis.

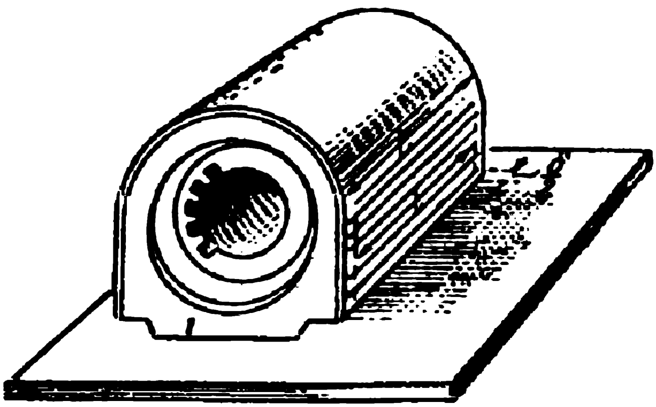
Vertikalios punktyrinės linijos, kurias jūs matote ant šoninio statoriaus paviršiaus (219 pieš.), ir yra «brėžiai», nurodantieji, iki kokios ribos reikia apipiauti galus.

Nužymėtojo uždavinys — tuos brėžius išvesti ant statoriaus paviršiaus. Bet kaip tai atlikti?

Atrodytų, paprasta: pastatyti statorių ant nužymėjimo stalo, ant vienos korpuso pusės atidėti nuo kiekvieno jo

krašto po ilgio atliekos pusę (po «užleidimo» pusę: $\frac{l}{2}$), o po to gautą konstruktorinį (tai yra atitinkantį brėžinį) ilgį l slankmačio pagalba pernešti ant kitos korpuso pusės ir padaryti atitinkamas įkarpas. Paprastai taip ir būdavo nužymima.

Naudojant šį nužymėjimo būdą, visada po frezavimo būdavo užtikrintas galų plokštumų lygiagretumas, bet toli



219 pieš.

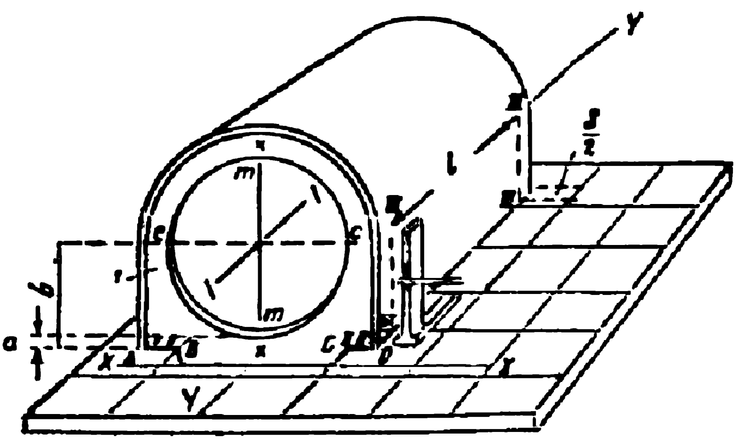
gražu ne visuomet pavykdavo gauti galų statmenumą statoriaus ašiai. Tai reiškia, kad jei mes po apdirbimo pastatytume statorių ant vieno iš galų (stačiomis), tai jis dažnai būtų ne statusis cilindras, kaip griežtai turėtų būti, o pasviręs. Būtų gautas niekalas.

Gamyklos nužymėtojas, gamybos novatorius Michailas Pudovičius Boicovas taip pakeitė statoriaus nužymėjimo būdą, kad visiškai pašalino niekalą dėl galų nestatmenumo statoriaus ašiai. Pradėdamas statoriaus nužymėjimą, jis ant nužymėjimo lentos nubrėžia dvi tarp savęs statmenas ašis XX ir YY ir statorių patalpina ant lentos taip, kad ašis XX sutaptų su galo plokštuma (I), o ašis YY būtų lygiagreti statoriaus ašiai $I - I$ (220 pieš.).

Patikrinęs pagal svambalą ir pakišęs, jei reikia, pleištus, jis suteikia statoriui tokią padėtį, kad tiek ašis $I - I$, tiek

ir letenų plokštumos (220 piešinyje *AB* ir *CD*) būtų lygiagretės lentos plokštumai.

Dabar nužymėtojui reikia ant galo nubrėžti skylės horizontalųjį ir vertikalųjį skersmenis, arba, kaip jie vadinami, horizontaliąją ir vertikaliąją centrines ašis. Tuo tikslu jis ima skylės (neapdirbtos) skersmenį *d*, prideda prie jo pusės reikiamą atstumą *a* nuo susidariusios skylės apačios iki letenų plokštumos po jų apdirbimo, atideda nuo skylės



220 pieš.

centro žemyn nuotolį $b = \frac{d}{2} + a$ ir padaro letenų apdirbimui brėžius *II — II*. Dabar nuo tų brėžių tuo pačiu slankmačio prasiskėtimu *b* pažymi horizontalią centrinę ašį *ce*, kur *c* ir *e* — ženklai taškų, atidėtų lygiais nuotoliais nuo išorinio statoriaus paviršiaus ant horizontalios ašies.

Iš taškų *c* ir *e* bet kokiu skriestuvo prasiskėtimu, didesniu kaip pusė *ce*, padaro ant galo (*I*) žymes.

Per įkarpų susikirtimo tašką nutiesia vertikalią ašį *mm*. Horizontalios nužymėjimo linijos pernešamos brėžtuvu ant antro galo, o vertikalioji ašis išvedama ant antro galo tokiu pat, ką tik aprašytu būdu.

Po to M. P. Boicovas statorių pastato taip, kad vertikaliosios ašys *mm*, išvestos abiejuose galuose, susikirstų su ašimi *YY* arba būtų nutolusios nuo jos lygiais nuotoliais, ir tiktai tada pradeda galų nužymėjimą frezavimui.

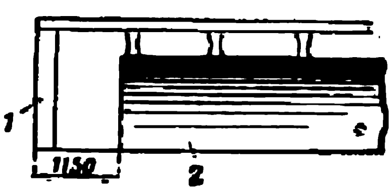
Nuo ašies *XX* jis atideda $\frac{l}{2}$ — pusę visos atliekos (užleidimo) ilgio ir su kampainiu pažymi brėžį *III — III* ant šoninio statoriaus paviršiaus. Nuo to brėžio jis atideda konstruktyvinį statoriaus ilgį *l* ir pažymi antrą brėžį *III — III*.

Iš paprastų geometrinių samprotavimų nesunku suprasti, kad toks nužymėjimo būdas iš tikrųjų užtikrina ir tarpusavį statoriaus galų lygiagretumą, ir jų statmenumą statoriaus ašiai.

Matematinė M. P. Boicovo nuovoka galutinai pašalino vieną iš dažniausių niekalo priežasčių tokiame brangiame gaminyje, kaip 20-toniniame turbogeneratoriaus statoriuje.

Daug dar ir kitų matematinių ir techninių uždavinių išsprendė darbininkas M. P. Boicovas, daugiau kaip 40 metų kūrybiškai dirbdamas prie gamyklos «Elektrosila» nužymėjimo lentos.

Prietaisas skylės centrui surasti. Dabar pažvelkite į išilginį turbogeneratoriaus statoriaus piūvį (221 pieš.). Statoriaus viduje, 1 150 *mm* atstume nuo jo galo (*1*) yra dar vadinamosios aktyvinės geležies skylė (*2*), be to, šios skylės centras gali ir nebūti ant statoriaus ašies *I — I* (žr. 220 pieš.), jungiančios skylių centrus jo priekiniame ir užpakaliniame galuose.



221 pieš.

Geometriškai jūs galite įsivaizduoti du cilindrus, vieną (mažesnio skersmens) viduje kito (didesnio skersmens), kurių ašys truputį nesutampa.

Uždavinys toks: ant statoriaus (219 pieš.) galo (*1*) nužymėti skyles išorinių ir vidinių skydų pritvirtinimui. O sunkumai yra štai kokie: pritvirtinus skydus prie statoriaus galų šių skydų centrai turi būti ne ant ašies *I — I*, o ant ašies, jungiančios skylių su aktyvine geležimi centrus (prisiminkite, kad šios ašys gali nesutapti).

Pasinaudodami geometrine analogija, sakysime taip: skydų centrai turi būti ant vidinio cilindro ašies, o ne ant išorinio.

Uždavinio esmė yra tokia: ant išorinio galo (*1*) paviršiaus reikia nubrėžti apskritimą, kurio centras būtų įsivaizduojamame vidinės skylės ašies susikirtimo su galo plokštuma taške.

Boicovas ir šį geometrinį uždavinį išsprendė sumaniai ir paprastai.

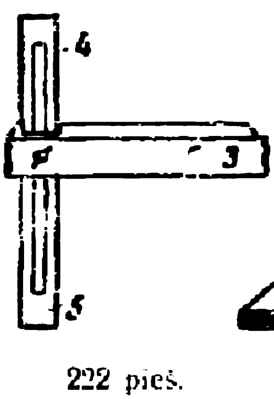
Ką jūs sugalvotumėte šiuo atveju?

Papildomai pažymiu, kad

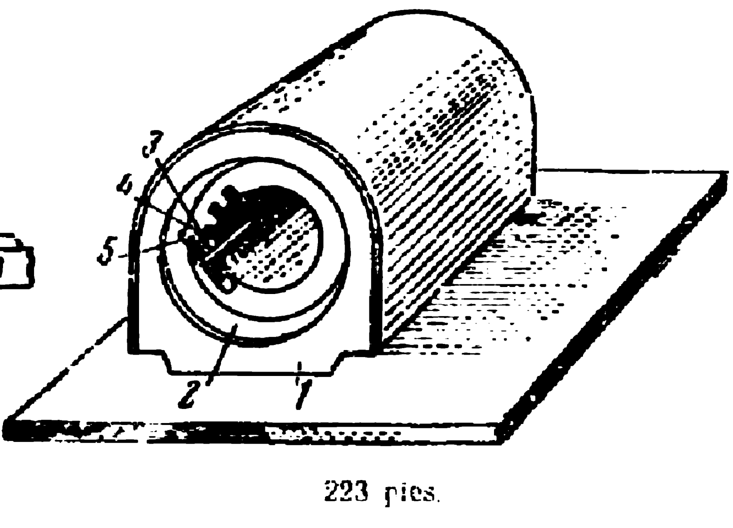
1) vidinės skylės centre negalima pastatyti skriestuvo kojelės;

2) jūs 219 piešinyje matote palei vidinės skylės apskritimą iškyšulius; tai — išpiovos, išdėstytos lygiais nuotoliais viena nuo kitos išilgai viso apskritimo; kad būtų konkrečiau, sakykime, kad tų išpiovų yra 40.

Kaip išsprendė uždavinį Boicovas. Michailas Pudovičius sukonstruavo ir pagamino paprastą reišinos tipo prietaisą (222 pieš.). Stiebą (*3*) jis įdeda į išpiovą, kaip parodyta 223 piešinyje, ir brėžikliu (*4*), įtvirtintu skersinyje (*5*), pa-



222 pieš.



223 pieš.

žymi ant statoriaus galo tašką. Michailas Pudovičius pastebėjo, kad išpiovų skaičius visada dalus keturiems. Vadinasi, įdėdamas stiebą kas $^1/_4$ visų išpiovų skaičiaus ir kiekvieną kartą pažymėdamas brėžikliu tašką, jis gauna ant statoriaus galo dvi poras diametraliai priešingų taškų. Dabar

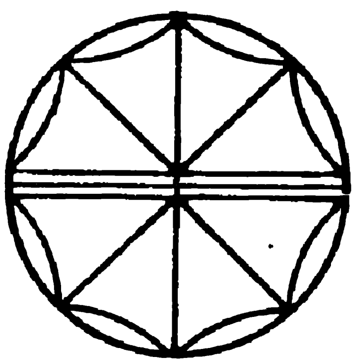
į skylę gale galima įstatyti medinę lentelę ir ant jos pažymėti tiesių, jungiančių rastųjų taškų poras, susikirtimo tašką. Šis taškas bus (kaip seka iš konstruavimo būdo) ant vidinės skylės ašies, ir dabar jame bus galima patalpinti skriestuvo kojelę, o antrąja kojele nubrėžti ant statoriaus galo duoto skersmens apskritimą, išilgai kurio ir sužymėti reikalingą skydų pritvirtinimui skylių kiekį.

SPRENDIMAI IR ATSAKYMAI

I skyriui

1. Reikia atkreipti dėmesį į kylančius iš garvežio dūmus. Jeigu traukinys stovėtų, tai garvežio dūmai kryptų į tą pusę, į kurią pučia vėjas. Ir atvirkščiai, jeigu, nesant vėjo, traukinys judėtų pirmyn, tai garvežio dūmai kryptų atgal. Kaip parodyta 1 pieš. (žr. 12 psl.), j u d a n č i o garvežio dūmai kyla į viršų, vadinasi, traukinys juda greičiu, lygiu vėjo greičiui, tai yra 7 *m* per sekundę arba apie 25 *km* per val.

2. Sprendinys parodytas 224 piešinyje.

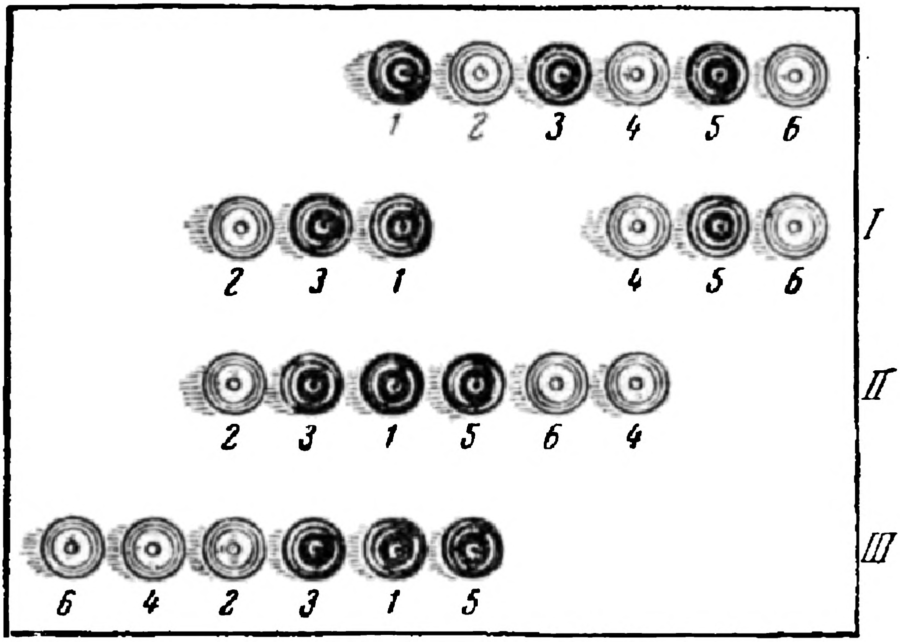


224 pieš.

3. Sunumeruokime šaškes iš kairės į dešinę, kaip parodyta 225 piešinyje. Šaškes Nr. 2 ir Nr. 3 perkelkime į kairę — į eilės pradžią taip, kad šaškė Nr. 3 atsirastų greta šaškės Nr. 1 (žr. I perkėlimą 225 pieš.). Į laisvą vietą perkelkime šaškes Nr. 5 ir Nr. 6 (II perkėlimas). Pagaliau perkelkime šaškes Nr. 6 ir Nr. 4 į kairę greta šaškės Nr. 2 (III perkėlimas).

Šio uždavinio sprendimą atlikite priešinga tvarka. Iš paskutinės šaškių padėties, taip pat 3 ėjimais, grąžinkite jas į pirmykštę jų padėtį.

Dabar tai nesunku!



225 pieš.

4. Sprendimo schema:

Pradinis degtukų išdėstymas: 11, 7, 6;

po 1 ėjimo: 4, 14, 6 (iš pirmos krūvelės į antrą perdėta 7 degtukai);

» 2 » : 4, 8, 12 (iš antros krūvelės į trečią perdėta 6 degtukai);

» 3 » : 8, 8, 8 (iš trečios krūvelės į pirmą perdėta 4 degtukai).

5. 35.

6. Vienas iš galimų kelių parodytas 226 piešinyje rodykle.

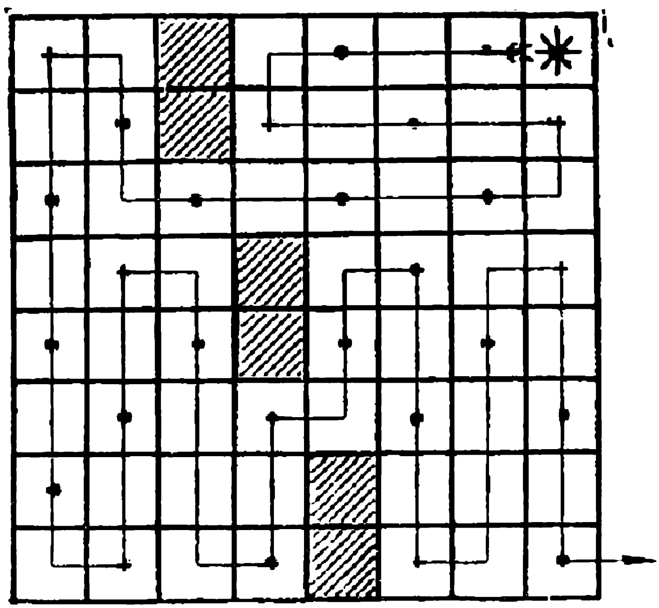
7. Keturioms mergaitėms reikia duoti po obuolį, o penktajai mergaitei — pintinę kartu su likusiuoju obuoliu.

8. Skrido trys antys vorele.

9. Per upę persikėlė abu berniukai. Vienas jų pasiliko ant kranto, o antrasis atplukdė laivelį kareiviams ir išlipo. Į laivelį įlipo kareivis ir persikėlė į kitą krantą. Berniukas, esantis tenai, atplukdė atgal prie

kareivių laivelį, pasiėmė savo draugą — berniuką, perkėlė jį į kitą krantą ir vėl laivelį grąžino atgal, o pats išlipo. Į laivelį įlipo antrasis kareivis ir persikėlė...

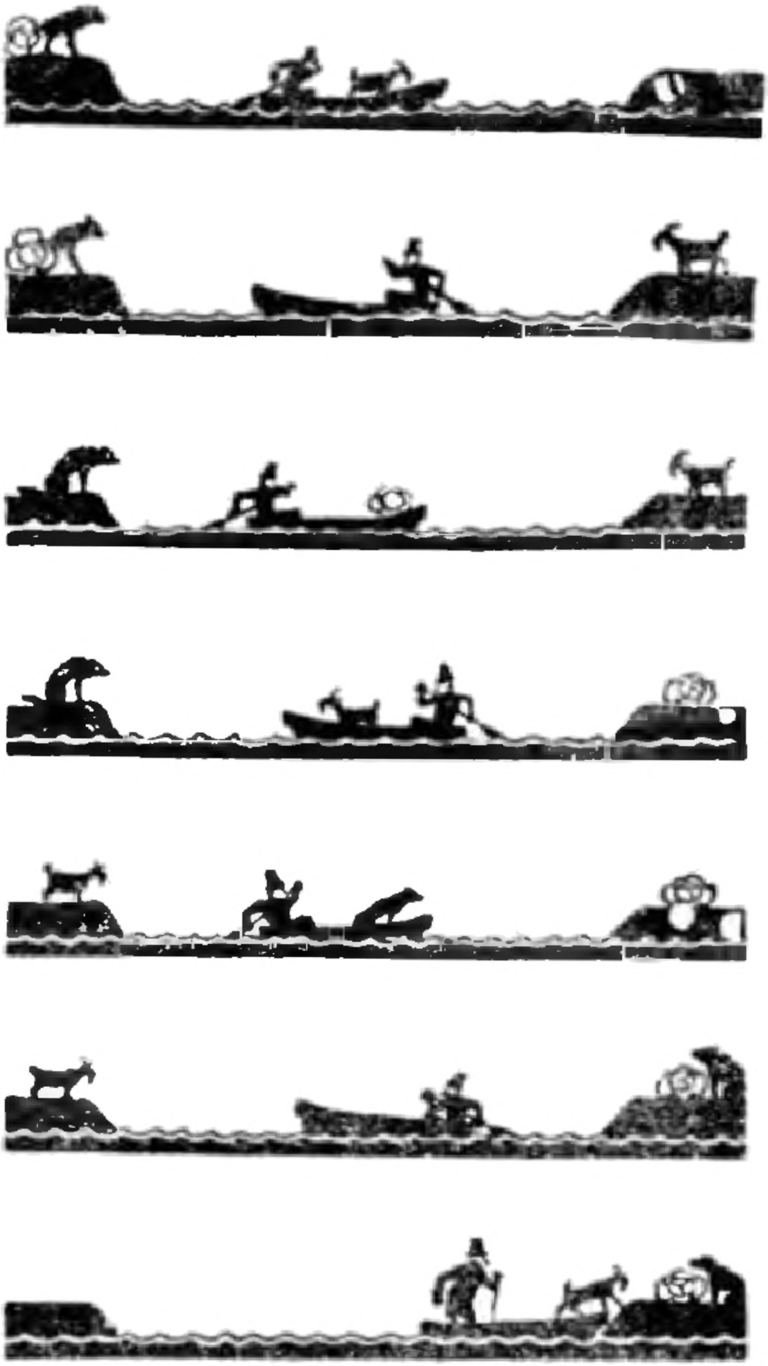
Tokiu būdu, po laivelio kiekvieno dvigubo perplukdymo per upę ten ir atgal persikeldavo vienas kareivis. Tai pasikartojo tiek kartų, kiek būryje buvo žmonių.



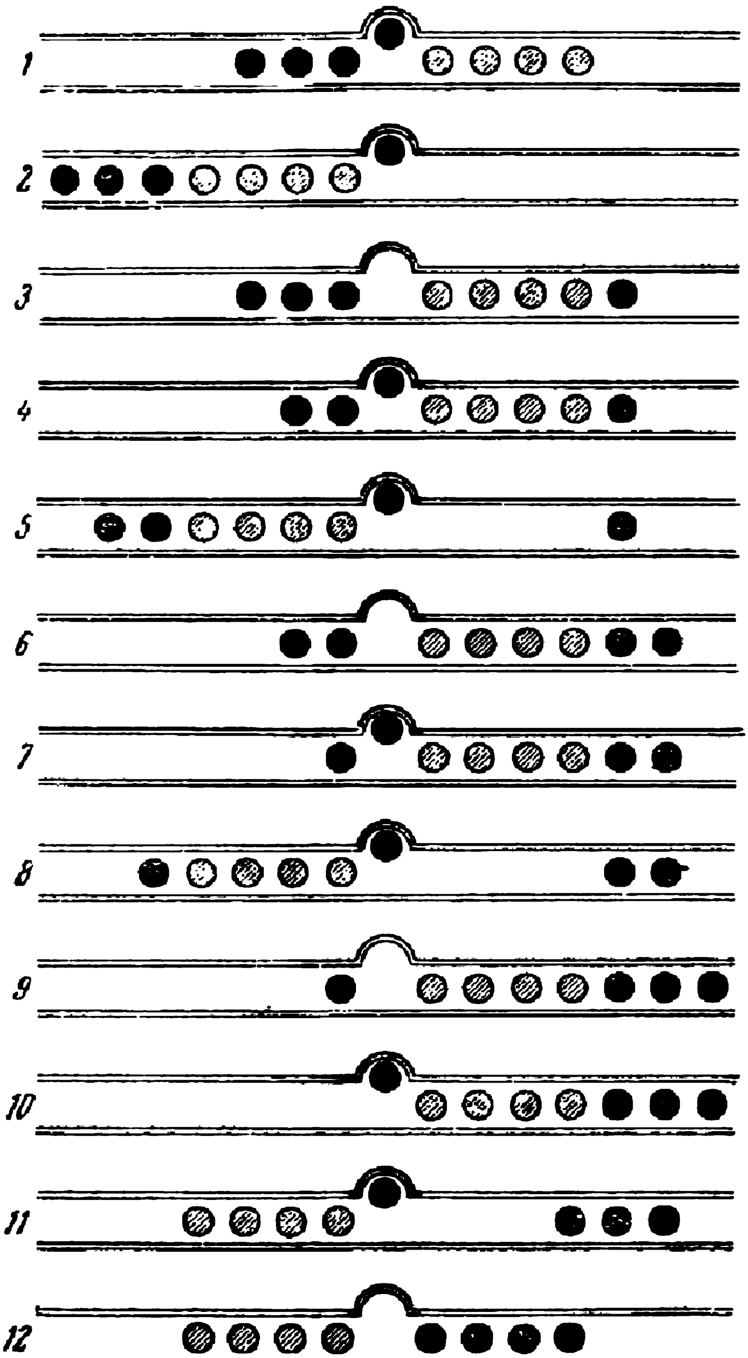
226 pieš.

10. Vilkas neėda kopūsto, vadinasi, perkėlimą reikia pradėti nuo ožkos (227 pieš.), nes vilką ir kopūstą ant kranto galima palikti ir be žmogaus. Perkėlęs ožką į kitą krantą, žmogus sugrįžta, įsideda į laivelį kopūstą ir jį taip pat perkelia į kitą krantą, kur jį palieka, bet užtai pasiima į laivelį ožką ir veža ją atgal — į pirmąjį krantą. Čia jis ožką palieka, o perkelia vilką. Kopūstą jis palieka prie vilko, o pats grįžta paimti ožkos, perveža ją, ir taip persikėlimas baigiasi sėkmingai.

11. Vieną susitikusiųjų grupę sutartinai pažymėkime juodais skrituliukais, antrą — baltais. 228 piešinyje parodyta reikalingų judėjimų schema.



227 pieš.



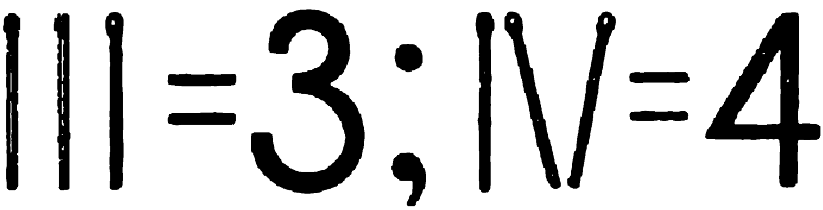
228 pieš.

12. Meistras perkirto tris vienos dalies grandis (trys operacijos) ir jomis sujungė kitas 4 dalis (dar trys operacijos; iš viso šešios).

13.



14.



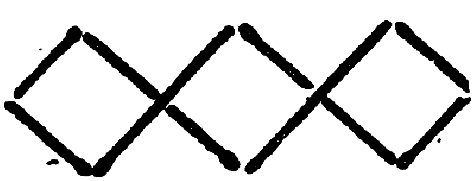
15. Iš duotų penkių degtukų reikia sudėti romėnišką skaitmenį aštuoni.



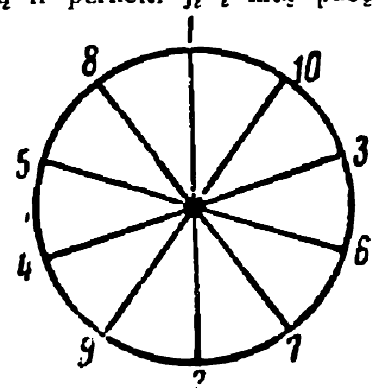
16. Paimti vieną iš kraštinių degtukų ir perkelti jį į kitą pusę.

17. Sprendinys parodytas 229 piešinyje.

18. Sprendinys parodytas 230 piešinyje.



229 pieš.

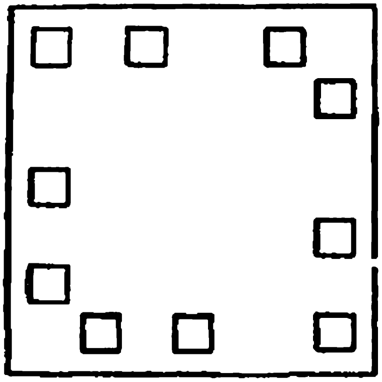


230 pieš.

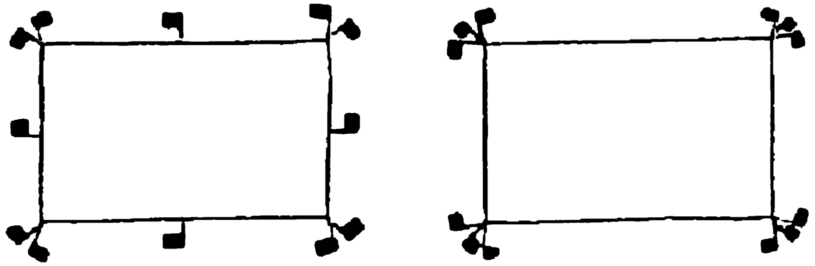
19. Neįsigilinus į uždavinio sąlygas, samprotaujama taip: 36 ruošiniai — tai 36 detalės; kadangi kiekvienų šešių ruošinių drožlės duo-

da dar vieną naują ruošinį, tai iš 36 ruošinių drožlių susidaro 6 nauji ruošiniai, o tai — dar 6 detalės; viso 36+6=42 detalės. Pamirštama čia, kad drožlės, atsiradusios nuo šešių paskutiniųjų ruošinių, taip pat sudaro naują ruošinį, tai yra dar vieną detalę. Tokiu būdu, iš viso detalių bus ne 42, o 43.

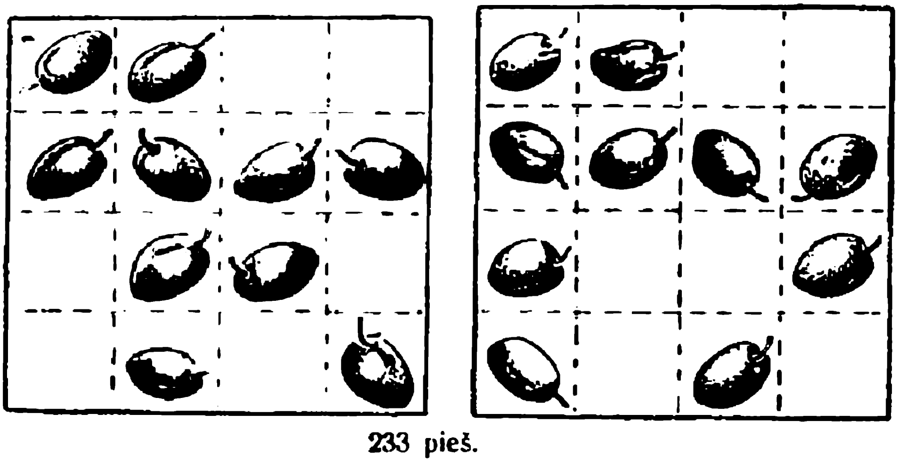
20. Kėdžių sustatymas, patenkinąs uždavinio sąlygą, parodytas 231 piešinyje.



231 pieš.



232 pieš.

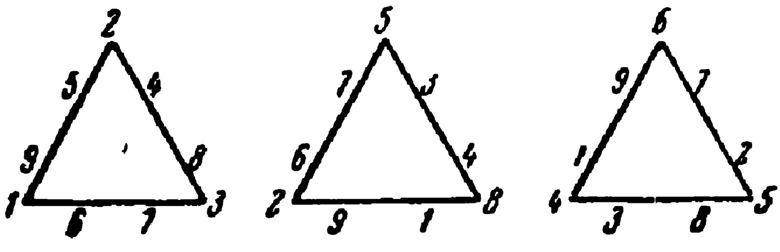


233 pieš.

21 Vėliavėlių išdėstymo schemos parodytos 232 piešinyje

22. Du iš galimų sprendinių matomi 233 piešinyje.

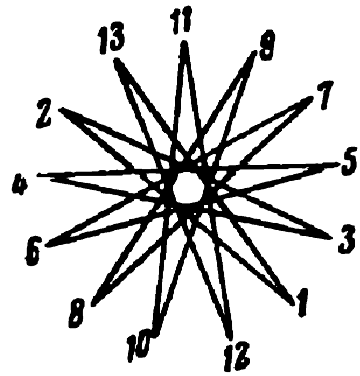
23. Galimas skaičių išdėstymas parodytas 234 piešinyje. Prie kiekvienos pirmojo trikampio kraštinės esančių skaičių suma lygi 17, o



234 pieš.

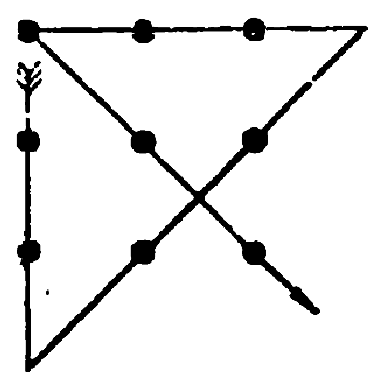
prie kiekvienos kraštinės antrojo ir trečiojo trikampių — 20. Gali buti ir kitokie skaičių išdėstymai.

24. Žaidžiant trylikai, sviedinį galima mesti ir kas šeštam žmogui (235 pieš.). Jeigu mestų kas septintam žmogui, tai pasirodytų, kad sviedinys skrietų į priešingą pusę.



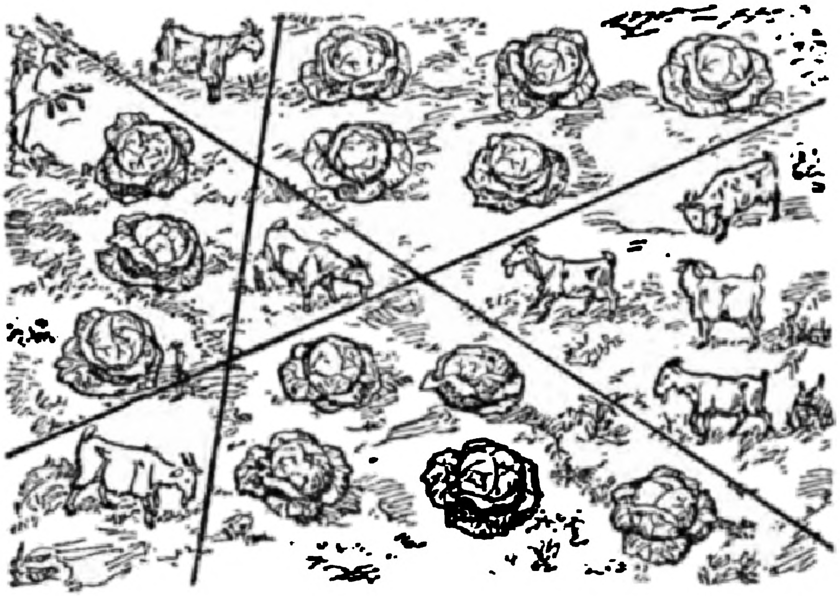
235 pieš.

25. Vienas iš galimų sprendinių parodytas 236 piešinyje.



236 pieš.

26. Sprendinys parodytas 237 piešinyje.



237 pieš.

27. Kur abu traukiniai besusitiktų, 1 val. prieš jų susitikimą vienas nuo kito bus 100 *km* (60 + 40) nuotolyje.

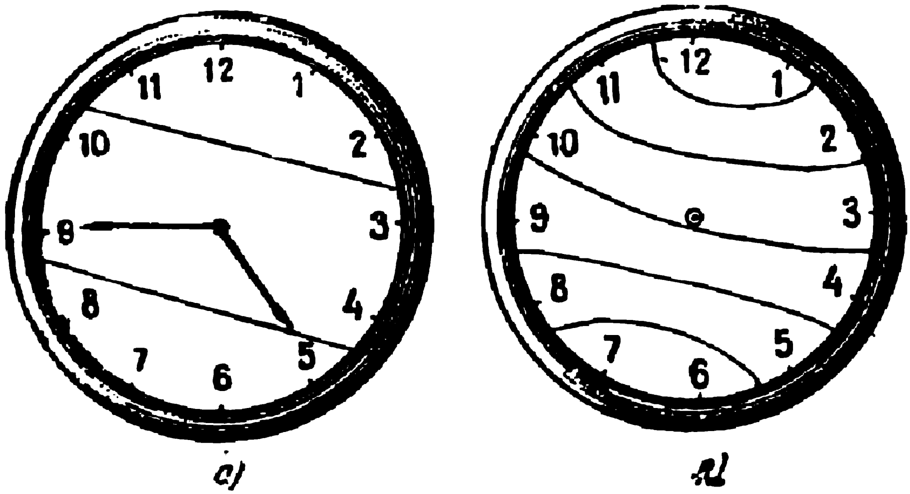
28. Kai uždavinys liečia kokį nors fizikinį reiškinį, būtinai reikia visapusiškai jį išnagrinėti, jei nenorima apsirikti. Taip ir čia. Jokie skaičiavimai neprives prie teisingo rezultato, jeigu neatsižvelgsime į tai, kad kartu su vandeniu pakils ir laivas, ir kopėčios. Todėl iš tikrųjų vanduo niekada neapsems trečiojo laiptuko.

29. a) Visų ciferblato skaičių suma lygi 78. Vadinasi, skaičių suma kiekvienoje ciferblato dalyje turi būti lygi $78:3=26$. Pastebime, kad

$$12+1=13 \text{ ir } 11+2=13.$$

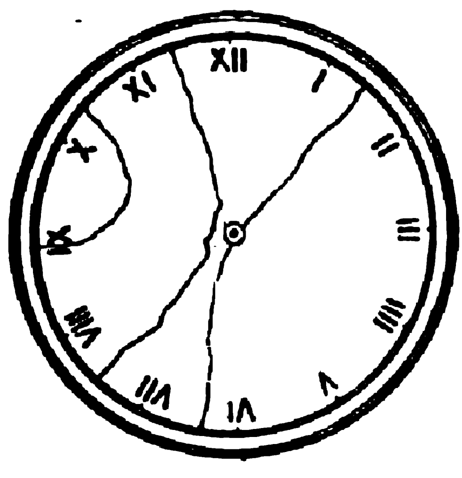
Iš čia peršasi sprendinys, kuris pateiktas 238 piešinyje, *a*.

b) Skaičių suma kiekvienoje iš 6 ciferblato dalių turi būti lygi $78:6=13$. Randame ciferblate tokias skaičių poras, kurių sumos lygios 13, ir gauname sprendinį, parodytą 238 piešinyje, *b:*



238 pieš.

30. Skaičiuose IX, X, XI trys dešimtukai (X) yra greta. Aišku, kad du iš jų turi įeiti į vieną dalį. Yra tik du išmėgintini atvejai. Po



239 pieš

keleto mėginimų jūs gausite tokį plyšių išdėstymą, koks parodytas 239 piešinyje. Skaičių suma kiekvienoje ciferblato dalyje būtų lygi 20, jeigu skaičių IX panaudotume kaip du atskirus skaičius: I ir X.

31. Patikrinęs laikrodžio mechanizmą, berniukas parinko tinkamas rodykles, bet neteisingai jas uždėjo: minutinę rodyklę — ant valandinės ašies, o valandinę — ant minutinės ašies. Todėl minutinė rodyklė ėmė slinkti ciferblatu valandinės rodyklės greičiu, t. y. labai lėtai, o valandinė rodyklė ėmė slinkti, kaip minutinė, — greitai.

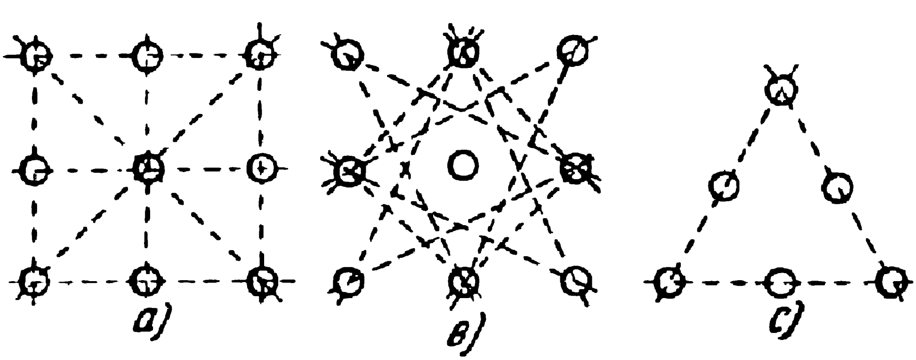
Pirmą kartą berniukas pas užsakovą sugrįžo maždaug po 2 val. 10 min. nuo to laiko, kai laikrodį buvo nustatęs ant 6 valandos vakaro.

Didžioji rodyklė, judėdama valandinės greičiu, nuslinko nuo 12 prie 2. O mažoji rodyklė, būdama minutinė rodyklė, padarė du pilnus apsisukimus ir paslinko dar 10-čia minučių. Tokiu būdu, tuo metu laikrodis rodė tikslų laiką.

Nesunku apskaičiuoti, kad pakartotinai iškviestas, kitos dienos rytą, berniukas atėjo, praslinkus 13 val. 05 min. po to, kai pradžioje nustatė rodykles ant šeštos valandos. Per tą laiką didžioji rodyklė, būdama valandinė, nuslinko trylika valandų ir, tokiu būdu, pasiekė skaičių 1.

Mažoji rodyklė, būdama minutinė, per tą laiką padarė trylika pilnų apsisukimų ir paslinko dar penkiomis minutėmis, pasiekdama, tuo būdu, skaičių 7. Todėl ir antru sutapimo atveju laikrodis rodė tikslų laiką.

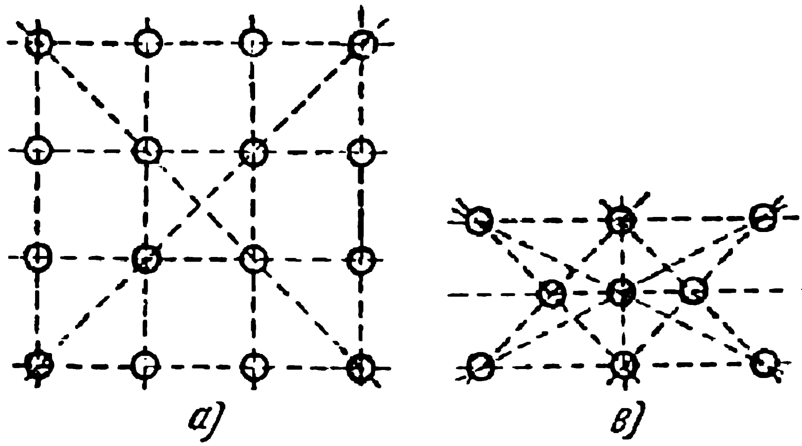
32. Po 3 sagas — 8 eilės (240 pieš., *a*), po 2 sagas — 12 eilių (240 pieš., *b*) (eilės parodytos punktyrinėmis tiesėmis).



240 pieš.

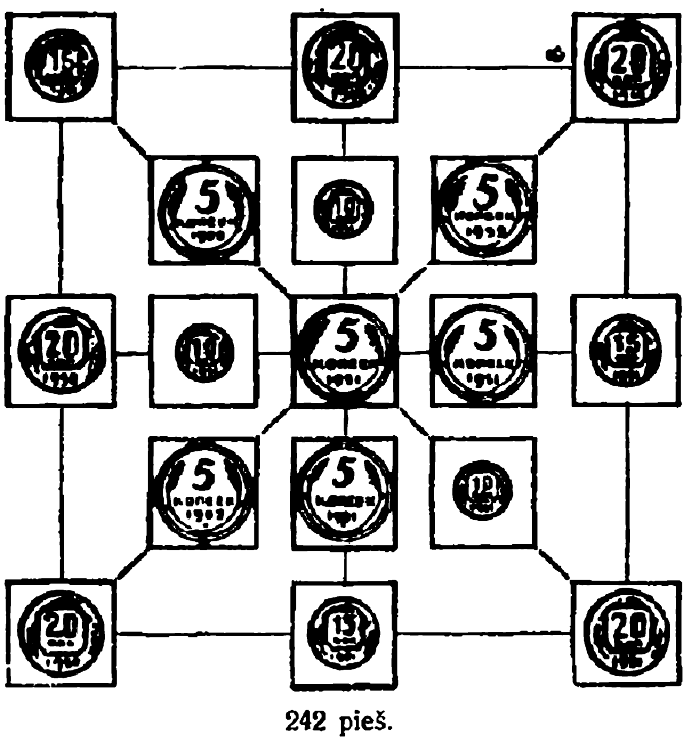
Likusios 6 sagos sudėstomos trikampiu į tris eiles, kiekvienoje po 3 sagas (240 pieš., *c*).

33. Šešiolikos šaškių sustatymas į 10 eilių, po 4 eilėje, parodytas 241 piešinyje, *a*. Devynių šaškių sustatymas į 10 eilių parodytas 241 piešinyje, *b*.



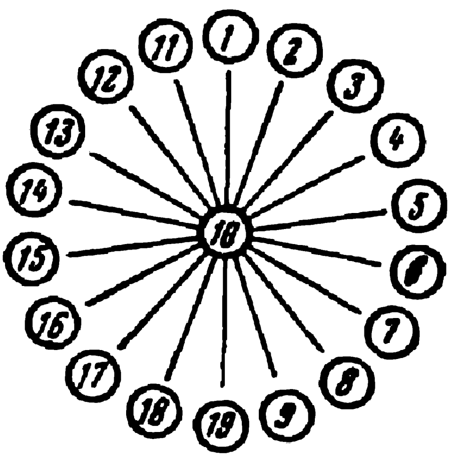
241 pieš.

34. Monetų išdėstymas parodytas 242 piešinyje.



242 pieš.

35. Pastebėję, kad $1 + 19 = 20$, $2 + 18 = 20$, $3 + 17 = 20$ ir t. t., kiekvienos sumos dėmenis surašome į tiesės galuose esančius apskritimėlius, o skaičių 10 patalpiname centriniame apskritimėlyje. Visas sprendinys parodytas 243 piešinyje.



243 pieš.

36. a) Žinoma 50, o ne 100, kaip kad daugelis kartais neapgalvotai atsako.

b) Dažnai atsakoma, kad autobuso keleiviai bus toliau nuo Maskvos, negu dviratininkas, o tai neteisinga, nes susitikę keliautojai yra vienoje vietoje ir, vadinasi, v i e n o d a m e n u o t o l y j e nuo Maskvos.

c) Kilogramas metalo visada brangesnis, negu pusė kilogramo to paties metalo.

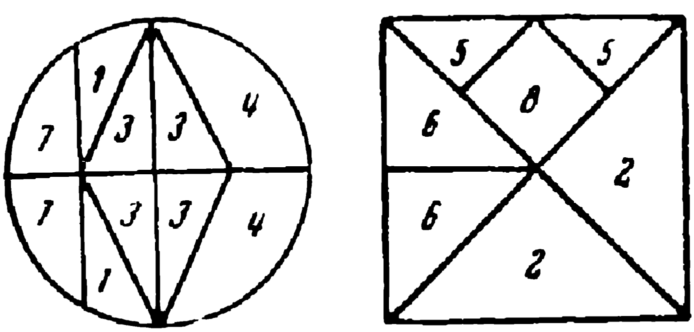
d) 6 dūžiai truko 30 sekundžių, vadinasi, 12 dūžių prireiks 60 sekundžių, arba 1 minutės,— dažnai sutinkama tokia neteisinga galvojimo eiga.

Juk, kai laikrodis išmušė 6 kartus, tai tarp dūžių buvo tik 5 tarpai, kurių kiekvienas truko $30 : 5 = 6$ sekundes. O tarp pirmo ir dvylikto dūžio — 11 tarpų, kurių kiekvienas trunka 6 sekundes.

Vadinasi, 12 dūžių truks 66 sekundes.

e) Visą laiką.

37. Sprendinys parodytas 244 piešinyje.



244 pieš.

38. 2 rublius.

39. Iš pirmo žvilgsnio uždavinys atrodo sudėtingas, reikalaująs specialių samprotavimų. Pagalvojus lengva suprasti, kad musė nesustodama skraidė lygiai 3 val., taigi nuskrido 300 *km*.

40. 1961 metai. Vienetas, popierių apsukus, lieka vienetu, 6 pavirsta į 9, o 9 — į 6.

41. a) Mergaitė perskaitė skaičių atvirkščiai: 98 vietoje 86.

b) Sukeisti vietomis popierėlius su skaičiais 8 ir 9, be to, 9 apversti (bus 6). Tada kiekviename stulpelyje bus po 18.

42. 4 broliai ir 3 seserys.

43. 23 metus. Skirtumas tarp tėvo ir sūnaus amžiaus lygus 23 metams; vadinasi, sūnui reikia būti 23 metų, kad tėvas būtų du kartus senesnis už jį.

44. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad, sudėjus skaičius kiekviename stulpelyje, rezultatai neturi būti vienodi, bet, įsižiūrėjus kiek atidžiau, galima pastebėti, kad jei antrame stulpelyje yra devyni vienetai (9·1), tai atitinkamai pirmame stulpelyje — viena devyniukė (1·9); antrame stulpelyje—aštuonios dvejukės (8·2), o pirmame dvi aštuoniukės (2·8), antrame stulpelyje — septynios trejukės (7·3), o pirmame — trys septyniukės (3·7) ir t. t.

Iš čia seka, kad abiejuose stulpeliuose skaičių sudėties rezultatai turi būti vienodi. Tuo įsitikinkite paprasta sudėtimi.

45. Pirmos ir penktos eilučių vienetų skaičiai papildo vienas antrą iki 10, o dešimčių, šimtų ir visų kitų skilčių skaičiai atitinkamai vienas antrą papildo iki 9. Vadinasi, tų dviejų eilučių skaičių suma lygi 1 000 000.

Ta pati savybė surandama ir kitose trijose skaičių porose: antrame ir šeštame, trečiame ir septintame, ketvirtame ir aštuntame skaičiuose.

Skaičių suma kiekvienoje poroje lygi 1 000 000. Vadinasi, visų aštuonių skaičių suma lygi 4 000 000.

A n t r o j o p o k š t o a t s a k y m a s. Tikriausiai jūs atspėjote, kad prirašomas toks skaičius, kurio visi skaitmenys papildo iki skaičiaus 9 skaitmenis vieno iš dviejų parašytų skaičių, pavyzdžiui, antrojo. Esant tai sąlygai, sumos paskutinis skaitmuo, kaip matyti, bus vienetu mažesnis už paskutinį pirmojo dėmens skaitmenį, o visi kiti sumos skaitmenys bus tokie patys ir išdėstyti ta pačia tvarka, kaip ir pirmojo dėmens, o pirmasis sumos skaitmuo visuomet bus 1.

Tokiu būdu, pradėdami rašyti sumą iš kairės į dešinę, parašykite 1, po to pakartokite pirmojo dėmens visus skaitmenis, išskyrus paskutinį; pastarąjį reikia sumažinti vienetu.

Pasipraktikuokite prieš pradėdami draugams rodyti matematinius pokštus.

46. Tegul moneta su lyginiu kapeikų skaičiumi (pavyzdžiui, dvikapeikė) — dešinėje rankoje, o moneta su nelyginiu kapeikų skaičiumi (pavyzdžiui, trikapeikė) — kairėje. Tada patrigubintas lyginis skaičius taps lyginiu, padvigubintas nelyginis bus taip pat lyginis skaičius, o lyginių skaičių suma būtinai bus l y g i n ė.

Tegul dabar moneta su nelyginiu kapeikų skaičiumi (pavyzdžiui, trikapeikė) — dešinėje rankoje, o moneta su lyginiu kapeikų skaičium (pavyzdžiui, dvikapeikė)— kairėje. Tada patrigubintas nelyginis skaičius bus nelyginis skaičius, o padvigubintas lyginis bus lyginis skaičius. O suma nelyginio ir lyginio skaičių būtinai bus n e l y g i n ė.

Pokštą paįvairinti galima taip: paprašyti laikomos dešinėje rankoje monetos kapeikų skaičių padauginti ne būtinai iš 3, o aplamai iš bet kurio nelyginio skaičiaus, o laikomos kairėje rankoje — iš bet kurio lyginio skaičiaus.

47. $22 + 2 + 2 + 2$ ir $888 + 88 + 8 + 8 + 8$.

48. $100 = 111 - 11$, $100 = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$, $100 = (5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$.

49. 1) $\begin{array}{r} 100 \\ 000 \\ + \; 005 \\ 007 \\ 999 \\ \hline 1111 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 111 \\ 003 \\ + \; 000 \\ 007 \\ 990 \\ \hline 1111 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 100 \\ 330 \\ + \; 505 \\ 077 \\ 099 \\ \hline 1111 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 111 \\ 333 \\ + \; 500 \\ 077 \\ 090 \\ \hline 1111 \end{array}$

50. Panašiai, kaip dėžės pakrovimas įvairaus dydžio daiktais pradedamas nuo didžiausių daiktų, taip ir duotos sumos sudarymą geriausia pradėti nuo galimų didžiausių dėmenų. Pagal sąlygą, dėmenys turi būti aštuoni nelyginiai skaičiai.

Samprotaujame taip.

Nė vienas iš skaičių 19, 17 ir 15 negali būti dėmuo, nes kiekvienam iš šių skaičių neatsiras dar septynių reikalingų dėmenų. Jeigu paimtume kaip dėmenį skaičių 13, tai skaičiui 20 sudaryti būtina ir pakankama pridėti prie 13 septynis kartus po 1:

$$13 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20.$$

Jeigu pirmasis dėmuo 11, tai antrasis dėmuo negali būti 9, 7 arba 5 (nesusidaro būtinas kiekis likusių dėmenų). Bandome 3:

11+3=14. Iki 20 trūksta 6 vienetų, o dėmenų mums reikia taip pat 6. Vadinasi, gauname antrą sprendinį:

$$11+3+1+1+1+1+1+1=20.$$

Imame pirmuoju dėmeniu skaičių 9. Septyni negali būti antrasis dėmuo (9+7=16; lieka 4 vienetai šešiems dėmenims). Pabandome 5. Turime: 9+5=14. Šešiems dėmenims lieka 6 vienetai. Tai įmanoma. Gauname trečią sprendinį:

$$9+5+1+1+1+1+1+1=20.$$

Bandome 3. Turime: 9 + 3 = 12. Lieka 8 vienetai šešiems dėmenims. Pridėsime dar 3. Tada: 9+3+3=15. Lieka 5 vienetai 5-iems dėmenims. Gauname ketvirtą sprendinį:

$$9+3+3+1+1+1+1+1=20.$$

Mėginimų sistema, manau, dabar aiški. Tęskite samprotavimus patys, laikydami pirmuoju dėmeniu 7, o po to 5 ir 3. Viso gausite 10 sprendinių:

$$13+1+1+1+1+1+1+1=20,$$
$$11+3+1+1+1+1+1+1=20,$$
$$9+5+1+1+1+1+1+1=20,$$
$$9+3+3+1+1+1+1+1=20,$$
$$7+7+1+1+1+1+1+1=20,$$
$$7+5+3+1+1+1+1+1=20,$$
$$7+3+3+3+1+1+1+1=20,$$
$$5+5+3+3+1+1+1+1=20,$$
$$5+3+3+3+3+1+1+1=20,$$
$$3+3+3+3+3+3+1+1=20.$$

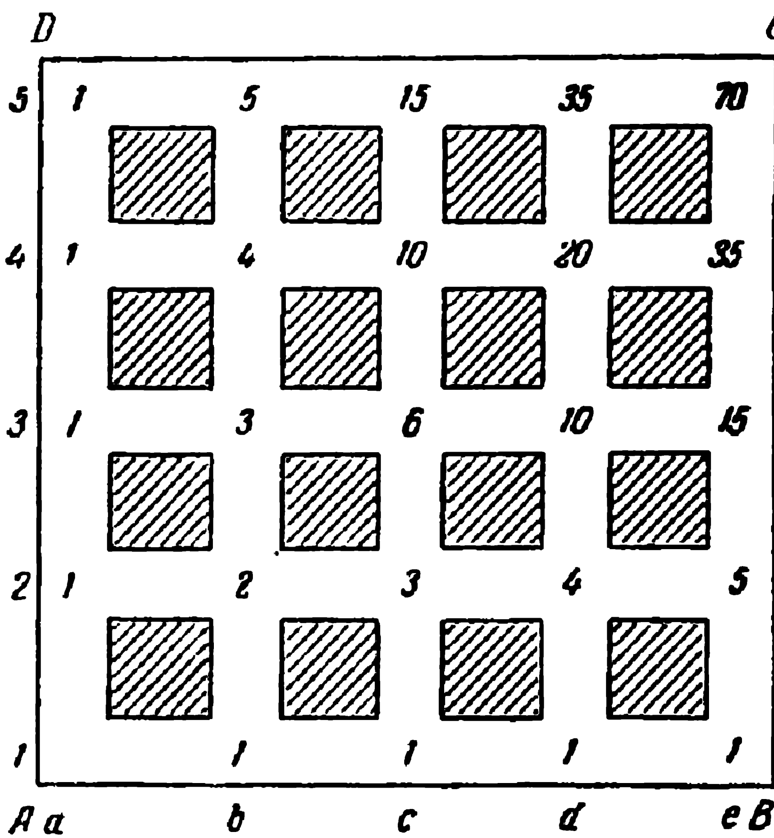
Yra tik vienas sprendinys (šeštasis iš viršaus), kada suma susideda iš didžiausio skaičiaus (keturių) nevienodų dėmenų.

51. Betarpiškai skaičiuoti visus galimus nuo *A* iki *C* maršrutus sudėtinga — susipainiosite. Reikia pradėti skaičiuoti maršrutus iki sankryžų, esančių arčiau išeities punkto *A* (245 pieš.).

Aišku, kad į kiekvieną sankryžą, esančią prie krašto *AB* ir *AD*, eina tik vienas kelias: į sankryžą 2*b* eina 2 keliai. Į sankryžą 2*c* galima pakliūti, pirma, iš punkto 2*b*, taigi, taip pat dviem maršrutais, ir antra, iš punkto 1*c*, t. y. dar vienu maršrutu. Vadinasi, iš viso į sankryžą 2*c*

eina 2+1=3 maršrutai (raskite juos). Analogiškai samprotaudami, gausime, kad ir į sankryžą 3*b* eina 3 maršrutai.

Į sankryžą 3*c* eina tie patys 3 maršrutai, kuriais galima pakliūti į sankryžą 3*b*, ir tie 3 maršrutai, kuriais galima pakliūti į sankryžą 2*c*, tai yra iš viso 6 maršrutai. Tęsdami šiuos samprotavimus, paste-



245 pieš.

bėsime, kad visų maršrutų, einančių į bet kurią sankryžą, skaičius lygus sumai maršrutų, einančių į dvi gretutines sankryžas, esančias iš kairės ir iš apačios nuo nagrinėjamojo. Jeigu, pavyzdžiui, mes nustatėme, kad maršrutų, einančių į 3*c*, skaičius yra lygus 6, o į 2*d* — lygus 4, tai maršrutų, einančių į 3*d*, skaičius bus lygus 10, ir t. t.

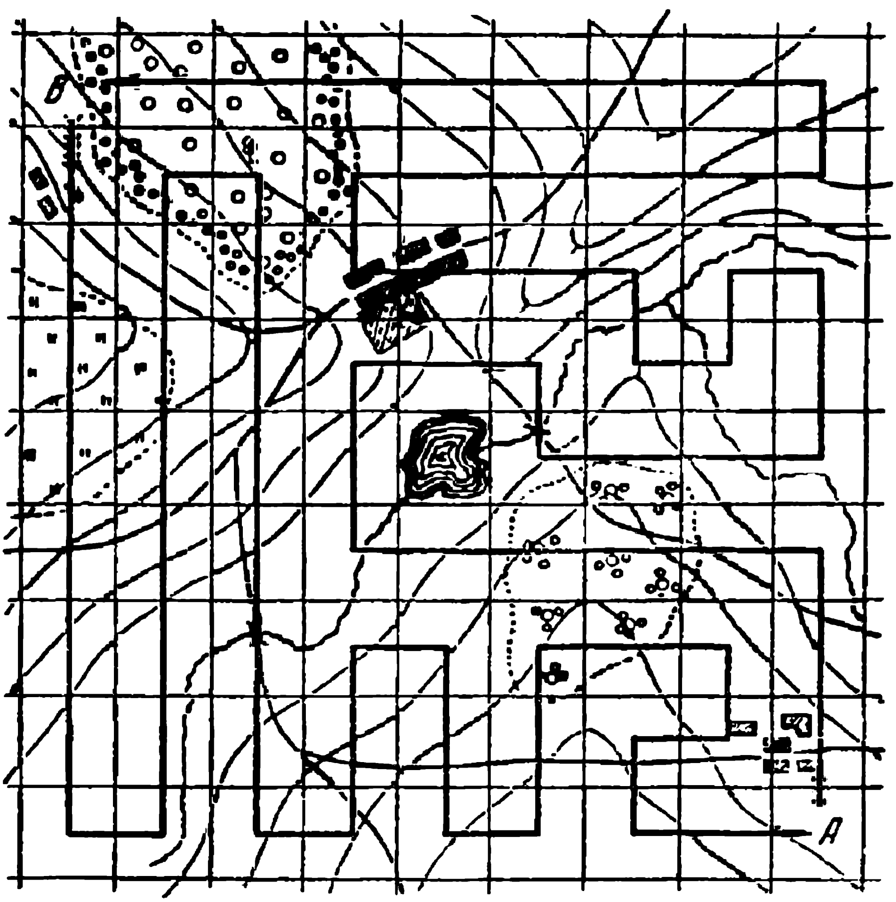
Taip galima nustatyti skaičių maršrutų, einančių iš pradinio punkto *A* į bet kurią sankryžą. Tokiu būdu, į galutinį punktą *C* galima nueiti 70 skirtingų kelių.

52. Iš keturių skaičių yra galima tik viena grupė:

$$1+1+2+4=1\times1\times2\times4.$$

Iš penkių skaičių — trys:

$$1+1+1+2+5=1\times1\times1\times2\times5,$$
$$1+1+1+3+3=1\times1\times1\times3\times3,$$
$$1+1+2+2+2=1\times1\times2\times2\times2.$$



246 pieš.

Reikalaujamas grupes iš 6 ar 7 ir t. t. skaičių sudarykite iš analogijos savarankiškai. Imkite, pavyzdžiui, du skaičius 2 ir 6 ir jų sumą

2 + 6 papildykite vienetais iki sandaugos 2 × 6 = 12, o sandaugą 2 × 6 savo keliu padauginkite iš atitinkamo vienetų skaičiaus.

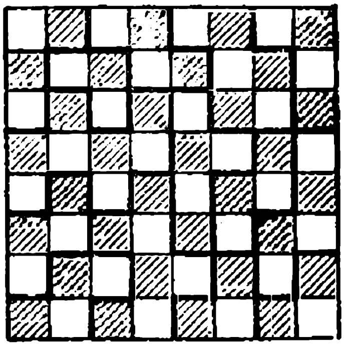
53. 9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99 arba

9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99; 1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100.

54. Vienas iš galimų sprendinių pateiktas 246 piešinyje.

55. Galimas sprendinys parodytas 247 piešinyje.

56. Visa sprendimo «paslaptis» yra ta, kad, išeidamas iš namų, aš susipratau užvesti savo sieninį laikrodį ir ant jo įsidėmėti, kuriuo metu aš išėjau, o po to — kuriuo metu grįžau. Taip ant savo laikrodžio aš galėjau nustatyti, kiek laiko aš nebuvau namie. Atėjęs pas pažįstamą ir išeidamas iš jo, aš įsidėmėjau, kiek jo laikrodis rodė. Tai įgalino mane nustatyti, kiek laiko užtrukau pas pažįstamą.



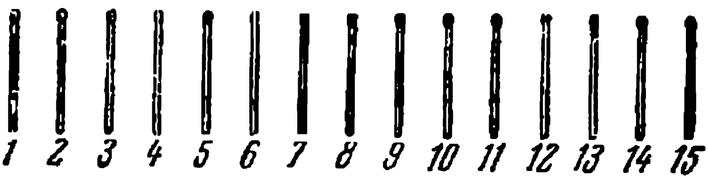
247 pieš.

Atmetęs iš laiko, kiek aš nebuvau namie, laiką, kiek prabuvau pas pažįstamą, aš gavau laiką, sugaištą kelyje į ten ir atgal. Pusę šio laiko pridėjęs prie laiko, kurį rodė draugo laikrodis man išeinant, gavau tą laiką, pagal kurį turėjau nustatyti savo sieninį laikrodį.

57. Reikia turėti galvoje, kad ne kiekvienas kitas sprendinys bus naujas, arba, kaip sakoma matematikoj, iš esmės skirtingas nuo pateikto tekste. Sakysime, jūs atradote tokią degtukų išdėstymo tvarką (plg. su sprendimu, pateiktu 26 piešinyje, 44 psl.): Nr. 7 prie Nr. 10, Nr. 4 prie Nr. 8, Nr. 6 prie Nr. 2, Nr. 5 prie Nr. 9 ir Nr. 1 prie Nr. 3. Tas sprendimas nėra «visiškai kitas», kaip kad reikalauja uždavinio sąlygos, nes pilnutinai pakartoja išdėstymo tvarką, išdėstytą uždavinio tekste. Tuo lengva įsitikinti, jei degtukus sunumeruotume ne iš kairės į dešinę, o iš dešinės į kairę. Iš esmės naujas sprendimas bus, pavyzdžiui, šis: Nr. 7 prie Nr. 10, Nr. 5 prie Nr. 2, Nr. 3 prie Nr. 8, Nr. 1 prie Nr. 4, Nr. 9 prie Nr. 6.

58. Kad lengva būtų naudotis toliau nurodyta degtukų perdėjimo schema, parašykite ant popieriaus 15 sveikų skaičių, pradedant 1, ir sudėkite degtukus, kaip parodyta 248 piešinyje. Dabar degtukus

perdėkite tokia tvarka: Nr. 5 prie Nr. 1, Nr. 6 prie Nr. 1, arba schematiškai: 5 → 1, 6 → 1, 9 → 3, 10 → 3, 8 → 14, 7 → 14, 4 → 2, 11 → 2, → 15, 12 → 15.



248 pieš.

59. $(1 + 2) : 3 = 1$,
$12 : 3 : 4 = 1$.
$[(1 + 2) \times 3 - 4] : 5 = 1$,
$(1 \times 2 + 3 - 4 + 5) : 6 = 1$,
$\{[(1 + 2) \times 3 - 4] : 5 + 6\} : 7 = 1$,
$[(1 + 2) : 3 \times 4 + 5 + 6 - 7] : 8 = 1$,
$(1 \times 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) : 9 = 1$.

60. Mašinos skaitiklis rodė 15 951. Dešimčių tūkstančių skaitmuo per 2 valandas negalėjo pasikeisti. Vadinasi, pirmu ir paskutiniu naujo simetrinio skaičiaus skaitmeniu lieka 1. Tukstančių skaitmuo galėjo ir turėjo pasikeisti, nes per 2 val. mašina pravažiavo, tikriausiai, daugiau kaip 49 *km*, bet jokiu būdu ne daugiau kaip 1 000 *km*; vadinasi, tūkstančių skaitmuo, o kartu su juo ir dešimčių skaitmuo — 6. Aišku, kad šimtų skaitmuo — 0, taigi skaitiklis rodė skaičių

16 061.

Šimtų skaitmuo negalėjo pasiekti 1, nes tuo atveju reikštų, kad mašina per 2 val. nuvažiavo 16 161 — 15 951 = 210 *km*, o tai nerealu. Kadangi skaitiklis rodė skaičių 16 061, tai mašina per 2 val. nuvažiavo 16 061 — 15 951 = 110 *km*, vadinasi, ji važiavo greičiu

110 : 2 = 55 *km* per valandą.

61. Uždaviniui išspręsti reikia žinoti brigadininko sumontuotų prietaisų kiekį, o tam, savo ruožtu, reikia žinoti, kiek prietaisų vidutiniškai sumontuodavo kiekvienas iš 10 brigados narių. Išdaliję po lygiai devyniems jauniems darbininkams 9 prietaisus, pagamintus papildomai brigadininko, mes sužinome, kad vidutiniškai kiekvienas brigados narys sumontuodavo 15 + 1 = 16 prietaisų. Iš čia seka, kad brigadinin-

kas pagamindavo $16+9=25$ prietaisus, o visa brigada $(15\times9)+25=$ $=160$ prietaisų.

Susipažinusieji su algebra šį uždavinį gali išspręsti, sudarydami vieną lygtį su vienu nežinomuoju.

62. Esant greičiui 30 *km/val*, mašina kiekvieną kilometrą pravažiuos per 2 minutes, o esant greičiui 20 *km/val* — kiekvieną kilometrą per 3 minutes. Vadinasi, esant greičiui 20 *km/val*, mašina kas kilometras praras vieną minutę. Tačiau, tokiam greičiui esant, ji praranda, kaip buvo sakyta, 2 valandas arba 120 minučių, vadinasi, atstumas nuo kolūkio iki miesto 120 *km*.

Kokiu greičiu reikia važiuoti, norint atvykti laiku? Dažnai galvojama, kad ieškomasis greitis turi būti aritmetinis vidurkis tarp 20 ir 30 *km/val*, arba

$$\frac{20+30}{2}=25\ km/val,$$

bet tai neteisinga.

Kelionėje turi būti sugaištos 5 valandos $\left(\frac{120}{30}+1=5\right)$, vadinasi, kad grudai į miestą būtų pristatyti lygiai 11 valandą, reikia važiuoti $\frac{120}{5}=24$ *km/val* greičiu.

63. Jei mes butume prasilenkiančių traukinių judėjimą stebėję iš stovinčio traukinio vagono, tai antrosios draugės skaičiavimas būtų buvęs teisingas, bet mūsų vagonas juda priešais grįžtantį traukinį, vadinasi, jei nuo mūsų traukinio prasilenkimo su vienu iš grįžtančiųjų traukinių iki prasilenkimo su antru iš grįžtančiųjų traukinių praėjo 5 minutės, tai reiškia, kad antrasis traukinys atvyks į tą vietą, kur mes prasilenkėme su pirmuoju, praslinkus dar 5 minutėms, tai yra laiko tarpas tarp traukinių, kuriuos mes sutinkame, atvykimų lygus 10 minučių.

Tokiu būdu, kas valandą į miestą atvyksta ne 12 traukinių, o tik 6.

64. Reikia rasti skaičių 1, 2, 3, 4, ..., 999 999 998, 999 999 999, 1 000 000 000 skaitmenų sumą. Skaičius reikia sugrupuoti poromis:

999 999 999 ir 0
999 999 998 ir 1
999 999 997 ir 2 ir t. t.

Gauname pusę milijardo (500 000 000) porų, o skaitmenų suma kiekvienoje poroje yra lygi 81. Paskutinis skaičius 1 000 000 000 — neturi poros, o jo skaitmenų suma lygi 1.

Ieškoma skaitmenų suma lygi $(500\,000\,000 \times 81) + 1 = 40\,500\,000\,001$.

65. Jei mažasis sviedinukas, likęs ant grindų, prisišlies bet kurioje vietoje prie bet kurios kambario sienos, tai didysis špižinis rutulys ten jo negalės sumaigyti.

66. Per parą laikrodis užbėga $^1/_2 - ^1/_3$, t. y. $^1/_6$ minutės. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad laikrodis 5 minutėmis skubės po $5 : ^1/_6 = 30$ dienų, t. y. gegužės 31 dienos rytą. Iš tikrųjų ne taip.

Jau gegužės 28 rytą laikrodis skubės $27 \times ^1/_6 = 4^1/_2$ minutėmis; kadangi per dieną jis užbėga $^1/_2$ minutės, tai reiškia, kad tą parą, gegužės 28 vakare, laikrodis skubės 5 minutėmis.

67. $2^1/_2$ karto.

68. Kablelį; gausime 2,3.

69. a) $^1/_5$; b) $^1/_7$.

70. Jei $^1/_2$ yra ieškomojo skaičiaus vienas trečdalis, tai visas skaičius turi būti 3 kartus didesnis už $^1/_2$, t. y. $1^1/_2$.

71. Nuotolis tarp MTS ir stoties sudaro $^1/_3 - ^1/_4 = ^1/_{12}$ viso mokinio kelio. Šį nuotolį jis nueidavo per 5 minutes. Vadinasi, visam keliui jam reikia $12 \times 5 = 60$ min., arba 1 val.; $^1/_4$ kelio jis ėjo $60 : 4 = 15$ minučių, vadinasi, jis išeidavo 7 val. 15 min., o į mokyklą ateidavo 8 val. 15 min.

72. Atsakymas — ne per 12 sekundžių! Mat, nuo pirmosios vėliavėlės iki aštuntosios — 7 tarpai. Nuo pirmosios iki dvyliktosios — 11 tarpų. Kiekvieną tarpą tarp vėliavėlių sportininkas prabėga per $^8/_7$ sekundės, vadinasi, 11-kai tarpų jam prireiks $^8/_7 \times 11 = 12^4/_7$ sekundžių.

73. Ostapas laiko nelaimėjo, bet prarado. Antrai kelio pusei jis sugaišo tiek laiko, kiek būtų trukusi visa jo kelionė pėsčiomis. Vadinasi, jo pasirinktu keliavimo būdu jis ne tik negali laiko laimėti, bet net turi prarasti. Jis ir prarado kaip tik tiek laiko, kiek važiavo traukiniu, tai yra prarado $^1/_{15}$ to laiko, kuris būtų reikalingas pusei kelio nueiti pėsčiomis, arba, vadinasi, $^1/_{30}$ to laiko, kuris jam būtų reikalingas visam keliui nueiti pėsčiomis.

74. Per $3^1/_2$ valandų žadintuvas pavėluoja 14 minučių. 12-tą valandą žadintuvas rodys 11 val. 46 min. Iki 12 lieka 14 minučių, bet per tas 14 minučių žadintuvas pavėluos dar beveik minutę. Tokiu būdu, žadintuvo rodyklės rodys 12 beveik po 15 minučių.

75. Nužymėtojas pastebėjo, kad

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

Vadinasi, jeigu iš 7 duotų plokštelių 4 supiaustysime į tris lygias dalis, tai gausime 12 trečdalių, t. y. po vieną trečdalį kiekvienai detalei. Likusias 3 plokšteles supiaustysime kiekvieną į 4 lygias dalis, gausime 12 ketvirtadalių, tai yra po vieną ketvirtadalį kiekvienai detalei.

Norėdami 5 plokšteles padalyti šešioms detalėms, pastebėsime, kad

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Vadinasi, iš 3 plokštelių padarome 6 puseles, o iš kitų dviejų — 6 trečdalius.

Toliau,

$$\frac{13}{12}=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}.$$

Vadinasi, kiekvienai detalei imame po vieną dalelę 4 plokštelių, kurių kiekvieną dalijame į tris lygias dalis, ir po 3 daleles likusių 9 plokštelių, kurių kiekvieną dalijame į 4 lygias dalis.

Analogiškai

$$\frac{13}{36}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9};$$

9 plokštelės dalijamos kiekviena į 4 lygias dalis, o 4 plokštelės — į 9 lygias dalis kiekviena.

Kadangi

$$\frac{26}{21}=\frac{2}{3}+\frac{4}{7},$$

tai šiuo atveju 14 plokštelių dalijamos į 3 dalis kiekviena, o 12 plokštelių — į 7 dalis kiekviena.

Naudodamiesi nurodytu metodu, patys sugalvokite dar keletą analogiškų uždavinių.

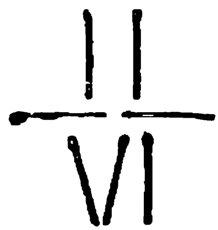
76. $\frac{1}{4}$ muilo gabalo sveria $\frac{3}{4}$ *kg*, vadinasi, visas gabalas sveria 3 *kg*.

77. 1) $\frac{3}{3}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \frac{9}{9}$ ir t. t.,

2) Pavyzdžiui, $99\frac{99}{99}$.

3) $44+\frac{44}{4}$.

4) $9+\frac{99}{9}$.

5)  tai yra $\frac{2}{6}$, arba $^1/_3$.

6) $1+3+5+7+\frac{75}{75}+\frac{33}{11}$.

7) $79\frac{1}{3}+5=84+\frac{2}{6}$.

8) 1 ir $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ ir $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{n}$ ir $\frac{1}{n+1}$, kur n — bet kuris sveikas skaičius, pradedant vienetu, arba x ir $\frac{x}{x+1}$, kur x — bet koks skaičius (išskyrus $x=-1$).

9) $\frac{35}{70}+\frac{148}{296}=1$.

10) $78\frac{3}{6}+21\frac{45}{90}=100$ arba $50\frac{1}{2}+49\frac{38}{76}=100$. Galimi ir kiti sprendiniai.

78. $\frac{1}{3}+\frac{6}{1}+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}=10$;

$\frac{2}{1}+\frac{5}{1}+\frac{2}{6}+\frac{6}{3}+\frac{4}{6}=10$;

$\frac{4}{1}+\frac{2}{3}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{6}=10$.

79. Nesunku suprasti, kad $^3/_4$ kačiuko yra $^1/_4$ dalis visų Mišos kačiukų. Vadinasi, iš viso kačiukų buvo keturis kartus daugiau kaip $^3/_4$, t. y. 3.

Patikrinimas: $^3/_4$ trijų yra $2^1/_4$; jeigu prie $2^1/_4$ kačiukų pridėsime dar $^3/_4$ kačiuko, tai ir bus lygiai 3 kačiukai.

80. Nepagalvojus galima atsakyti: 8 *km/val* $\left(\frac{12+4}{2}=8\right)$, bet tai neteisinga. Visą nuotolį laikykime 1. Tada pirmąją pusę kelio arklys ėjo $^1/_2:12=^1/_{24}$ laiko vienetų, o antrąją pusę $^1/_2:4=^1/_8$ laiko vienetų.

Visam keliui sugaišta $^1/_{24}+^1/_8=^1/_6$ laiko vienetų. Vadinasi, vidutinis greitis yra $1:{}^1/_6=6$ *km/val.*

81. Keleivis pramiegojo du trečdalius pusės kelio, vadinasi, vieną trečdalį viso kelio.

82. Keleivio, esančio antrajame traukinyje, judėjimo greitis pirmojo judančio traukinio atžvilgiu bus lygus 45+36=81 *km/val,* arba $\frac{81\,000}{60 \cdot 60}$ *m/sek*$=\frac{45}{2}$ *m/sek.*

Taigi, pirmojo traukinio ilgis lygus $^{45}/_2 \times 6=135$ *m.*

83. Dviratininkas pėsčias nuėjo $^1/_3$ kelio, t. y. dukart mažiau, negu jis nuvažiavo, o laiko sugaišo dukart daugiau. Vadinasi, jis važiavo 4 kartus greičiau, negu ėjo.

84. Volodia įvykdė $^2/_3$ užduoties, ir jam beliko įvykdyti $^1/_3$ visos užduoties. Kostia įvykdė $^1/_6$ užduoties, ir jam beliko įvykdyti $^5/_6$ visos užduoties.

Vadinasi, kad pasivytų Volodią ir vienu metu su juo užbaigtų darbą, Kostiai reikia dienos išdirbį padidinti $^5/_6:{}^1/_3=2^1/_2$ karto.

85. Teisi Mašos draugė. Vieną dauginamąjį padidinus $^1/_3$ jo dydžio, sandauga padidėjo $^4/_3$ karto. Kitą dauginamąjį sumažinus $^1/_3$ jo dydžio (nepriklausomai nuo to, ar lygus jis tam dauginamajam, kuris buvo padidintas), sandauga sumažėjo $^3/_2$ karto. Dėl tos priežasties sandauga sumažėjo $^3/_2:{}^4/_3=^9/_8$ karto ir sudarė $^8/_9$ teisingos sandaugos. Apsirikta $^1/_9$; tai sudaro 20 *kub. m.* Iš čia uždavinio atsakymas: 180 *kub. m.*

86. Įgudusi kulinarė deda dvi riekutes į keptuvėlę ir per 30 sek. apkepa vieną jų šoną. Po to pirmąją riekutę ji apverčia ant kito šono, antrąją riekutę išima, o į jos vietą deda trečiąją. Tokiu būdu, po antros pusės minutės pirmoji riekutė bus visiškai apkepta, o trečioji — pusiau. Dabar ji turi 2 riekutes (antrąją ir trečiąją), kurių kiekviena pusiau apkepta. Jas apkeps per kitą pusę minutės.

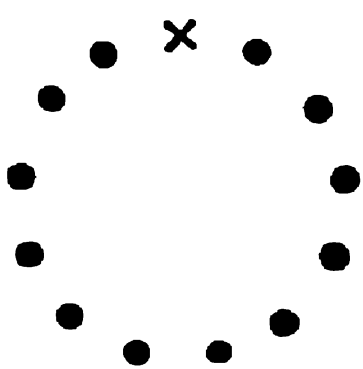
Bendras laikas, kaip matote, $1^1/_2$ minutės, o ne 2.

II skyriui

87. Pradžioje į pintinę «belaisviai» įdėjo grandinę (30 *kg*) ir nuleido ją žemyn. Į viršun pasikėlusią tuščiąją pintinę įsedo mergaitė-paauglė (40 *kg*) ir nusileido žemyn; tuo pačiu laiku pintinė su grandine pakilo į viršų. Chečo grandinę išėmė ir į pintinę įsodino Daridžaną (50 *kg*). Daridžana nusileido žemyn, pakeldama į viršų mergaitę-paauglę. Daridžana išlipo iš pintinės ant žemės, o mergaitė iš pasikėlusios pintinės — į bokštą. Į laisvą viršuje pintinę Chečo vėl įdėjo grandinę ir antrą

kartą nuleido ją žemyn. Žemėje į pintinę su grandine įsėdo Daridžana (50+30=80 *kg*), o į pasikėlusią pintinę — Chečo (90 *kg*). Chečo nusileido, išlipo iš pintinės ant žemės, o Daridžana iš pasikėlusios pintinės — į bokštą. Grandinę ji paliko pasikėlusioje pintinėje. Grandinė trečią kartą nusileido ant žemės. Į pasikėlusią pintinę vėl įsėdo mergaitė (40 *kg*) ir nusileido ant žemės, pakeldama grandinę (30 *kg*). Daridžana išėmė grandinę, įsėdo į pintinę (50 *kg*) ir nusileido žemyn, į viršų pakeldama mergaitę (40 *kg*). Daridžana išlipo ant žemės, o mergaitė į bokštą. Mergaitė įdėjo į pintinę grandinę ir vėl nuleido ją žemėn, po to į pasikėlusią tuščią pintinę pati įsėdo ir nusileido žemyn, pakeldama grandinę į viršų. Nusileidusi mergaitė prisijungė prie belaukiančių Daridžanos ir Chečo, o grandinė paskutinį kartą nukrito ant žemės. Visi trys sėkmingai pasislėpė nuo įtūžusio kunigaikščio kalnuose.

88. Atskaičiuokite, pavyzdžiui, nuo baltosios pelės (jos neskaičiuodami) pagal laikrodžio rodyklę š e š t ą j ą pelę. Nuo šios pelės ir reikia pradėti skaičiavimą, apeinant ratą ta pačia kryptimi (pagal laikrodžio rodyklę). Norėdami iš anksto nustatyti, nuo kurios pelės reikia pradėti skaičiavimą, išdėstykite 12 taškų ir vieną kryžiuką apskritimu (249 pieš.) ir pradėkite skaičiavimą nuo kryžiuko. Apeidami apskriti-



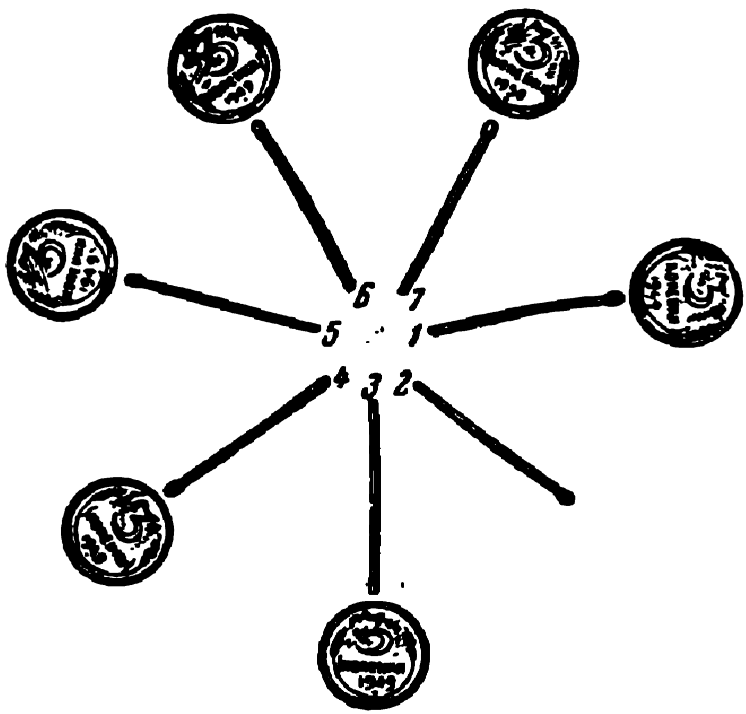
249 pieš.

mą viena kryptimi, išbraukite kiekvieną tryliktą tašką (ir kryžiuką, kai ateis jo eilė), kol beliks vienas taškas. Dabar vietoje šio taško pastatykite baltąją pelę, tada kryžiukas parodys, nuo kurios pilkos pelės reikia pradėti skaičiavimą.

89. Panašiai, kaip pirmesniame uždavinyje, lengva nustatyti, kad pirmiausia reikia paimti penktąjį degtuką į dešinę nuo to, kuris nukreiptas galvute į monetą (jo neskaičiuojant).

90. Jei eilėje yra 20 narvelių su paukščiais, o atidaromas kiekvienas penktasis, tai neatidaryti liks septintas ir keturioliktas narveliai, skaičiuojant iš kairės į dešinę.

91. Paslaptis ta, kad kiekvieną kartą moneta turi būti dedama prie spindulio, nuo kurio jūs pradedate skaičiavimą. Sakykim, jūs pradedate skaičiavimą nuo penktojo spindulio (250 pieš.). Pirmoji moneta



250 pieš.

dedama prie septintojo spindulio. Dabar reikia padėti monetą prie penktojo spindulio, tad skaičiavimą reikės pradėti nuo trečiojo. Trečią kartą pradėsime skaičiavimą nuo pirmojo spindulio, tada monetą dėsime prie trečiojo spindulio ir t. t.

92. Remontinio traukinio mašinistas užveda ant atsparinio kelio tris savo traukinio užpakalinius vagonus, atkabina juos, o likusią traukinio dalį nuveda į priekį. Keleivinis traukinys įkandin remontinio pavažiuoja pirmyn ir, priartėjęs prie atsparinio kelio, prikabina prie savo

galo tris remontinio traukinio vagonus, po to kartu su jais grįžta atgal į ankstyvesnę vietą ir ten juos atkabina. Tuo metu ant atsparinio kelio užvažiuoja likusi remontinio traukinio dalis: garvežys ir du vagonai. Kelias keleiviniam traukiniui — laisvas!

93. S p r e n d i m o s c h e m a. Tegul tėčiai — *A, B, C*, o dukros atitinkamai — *a, b, c*.

Pirmas krantas			Antras krantas		
A	*B*	*C*	.	.	.
a	*b*	*c*	.	.	.

I. Pradžioje persikelia dvi mergaitės:

A	*B*	*C*	.	.	.
a	.	.	.	*b*	*c*

II. Viena iš mergaičių grįžta ir perveža trečiąją:

A	*B*	*C*	.	.	.
.	.		*a*	*b*	*c*

III. Viena iš mergaičių grįžta ir lieka su savo tėčiu, o du kiti tėčiai persikelia į kitą krantą:

A		.	.	*B*	*C*
a	.	.	.	*b*	*c*

IV. Vienas tėtis su savo dukra grįžta į pirmą krantą; mergaitė lieka, o du tėčiai persikelia į antrą krantą:

.	.	.	*A*	*B*	*C*
a	*b*	.	.	.	*c*

V. Persiiria mergaitė ir pasiima su savim antrąją mergaitę:

.	.	.	*A*	*B*	*C*
a	.	.	.	*b*	*c*

VI. Paskutiniosios mergaitės paimti važiuoja jos tėvas (arba jos draugė):

.	.	.	*A*	*B*	*C*
.	.	.	*a*	*b*	*c*

Ir persikėlimas visų pasitenkinimui baigtas.

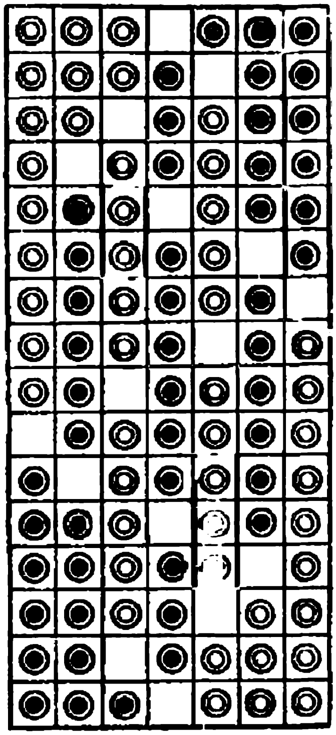
94. **Persikėlimas laiveliu, pakeliančiu tris žmones.** Tegul tėčiai — *A, B, C, D*, o dukros atitinkamai — *a, b, c, d*.

Pirmas krantas		Laivelyje		Antras krantas
A B C D *a b c d*				. . . .
I. Persikelia 3 mergaitės:				
A B C D *a* . . .	→	*b c d*	→	. . . . . *b c d*
Iš jų dvi grįžta:				
A B C D *a b c* .	←	*b c*	←	. . . . *d*
II. Persikelia tėtis su dukra ir dar vienas tėtis, kurio dukra antrame krante:				
A B . . *a b* . .	→	*C D* *c* .	→	. *C D* . . *c d*
Grįžta vienas tėtis su savo dukra:				
A B C . *a b c* .	←	*C* *c*	←	. . . *D* . . . *d*
III. Persikelia 3 tėčiai:				
. . . . *a b c* .	→	*A B C*	→	*A B C D* . . . *d*
Viena mergaitė grįžta:				
. . . . *a b c d*	←	*d*	←	*A B C D* . . . .
IV. Persikeldama atgal, mergaitė paima su savimi dar dvi:				
. . . . *a* . . .	→	*b c d*	→	*A B C D* . *b c d*
Grįžta tėtis pasiimti savo dukros (arba bet kuri mergaitė pasiimti savo draugės):				
A . . . *a* . . .	←	*A*	←	. *B C D* . *b c d*
V. Persikelia paskutinė pora:				
. . . .	→	*A* *a*	→	*A B C D* *a b c d*

Persikėlimas baigtas.

Persikėlimas laiveliu, pakeliančiu du žmones, bet su persėdimu saloje.

	Pirmas krantas	Sala	Antras krantas	
	A B C D	. . . .	. . . .	
	a b c d	. . . .	. . . .	
I	*A B C D*	. . . .	. . . .	
	a b . .	. . *c d*	. . . .	
II	*A B C D*	. . . .	. . . .	
	a . . .	. *b c d*	. . . .	
III	*A B* . .	. . *C D*	. . . .	
	a b . .	. . *c d*	. . . .	
IV	*A B* . .	. . *C D*	. . . .	(nuvažiavo *D* ir *d*, grįžo *D*; laivelis saloje)
	a b . .	. . *c* .	. . . *d*	
V	*A B* . .	. . *C* .	. . . *D*	(nuvažiavo *C* ir *D*, grįžo *C*; laivelis saloje)
	a b . .	. . *c* .	. . . *d*	
VI	*A B C* .	. . . .	. . . *D*	
	. . . .	*a b c* .	. . . *d*	
VII	*A* . . .	. *B C* .	. . . *D*	
	a . . .	. *b c* .	. . . *d*	
V	*A* . . .	. . . .	. *B C D*	
	a . . .	. *b c d*	. . . .	
IX	*A* . . .	. *B* . .	. . *C D*	(*B* nuvažiavo paimti *A* ir iš karto perkėlė jį į antrą krantą; *c* grįžo į salą)
	a . . .	. *b* . .	. . *c d*	
X	. . . .	. . . .	*A B C D*	
	a . . .	. *b c* .	. . . *d*	
XI	. . . .	. . . .	*A B C D*	
	a . . .	. . . .	. *b c d*	
XII	. . . .	. . . .	*A B C D*	
	. . . .	. . . .	*a b c d*	



251 pieš.

95. Išeinant iš sąlygos, kad baltosios šaškės (*b*) gali judėti ir peršokti tik į dešinę, o juodosios (*j*) — tik į kairę pusę, perkėlinėsime mes jas tokia tvarka: *j b b j j j b b b j j j b b j*. Kad būtų vaizdingiau, šaškių perkėlimo schema atvaizduota 251 piešinyje.

96.

Pradinis šaškių išdėstymas: →			b	j	b	j	b	j	b	j
Pirmas perkėlimas: →	j	b	b	j	b	j	b			j
Antras perkėlimas: →	j	b	b	j			b	b	j	j
Trečias perkėlimas: →	j			j	b	b	b	b	j	j
Ketvirtas perkėlimas: →	j	j	j	j	b	b	b	b		

Po ketvirtojo perkėlimo paeiliui išsidėstė keturios baltos ir keturios juodos šaškės. Atvirkščiai, nuo šio paskutiniojo šaškių išdėstymo taip pat keturiais perkėlimais galima pereiti prie pirmojo. Šį priešingą uždavinį dabar nesunku išspręsti.

97. Penkioms poroms.

Pradinis šaškių išdėstymas: →			b	j	b	j	b	j	b	j	b	j
Pirmas perkėlimas: →	j	b	b	j	b	j	b	j	b			j
Antras perkėlimas: →	j	b	b	j			b	j	b	b	j	j
Trečias perkėlimas: →	j	b	b	j	j	b	b			b	j	j
Ketvirtas perkėlimas: →	j			j	j	b	b	b	b	b	j	j
Penktas perkėlimas: →	j	j	j	j	j	b	b	b	b	b		

Šešioms poroms.

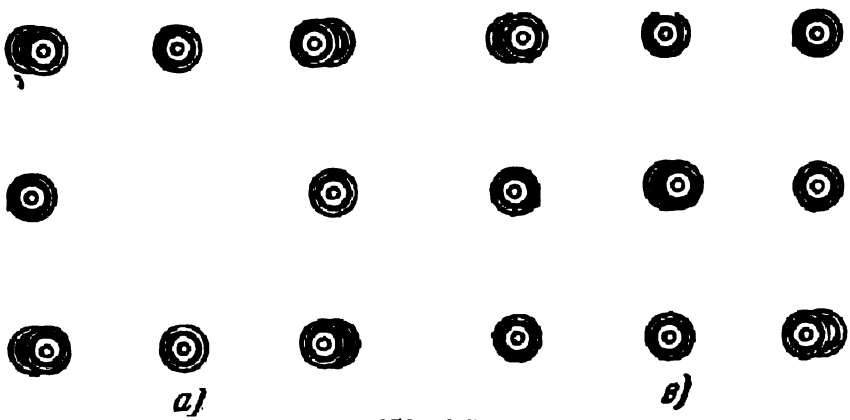
Pradinis šaškių išdėstymas:			b	j	b	j	b	j	b	j	b	j	b	j
Perkėlimai: I	j	b	b	j	b	j	b	j	b	j	b			j
II	j	b	b	j	b	j	b	j			b	b	j	j
III	j	b	b			j	b	j	j	b	b	b	j	j
IV	j	b	b	j	j	j	b			b	b	b	j	j
V	j			j	j	j	b	b	b	b	b	b	j	j
VI	j	j	j	j	j	j	b	b	b	b	b	b		

Septynioms poroms.

Pradinis šaškių išdėstymas:			b	j	b	j	b	j	b	j	b	j	b	j	b	j
Perkėlimai: I	j	b	b	j	b	j	b	j	b	j	b	j	b			j
II	j	b	b	j	b	j			b	j	b	j	b	b	j	j
III	j	b	b	j	b	j	j	b	b			j	b	b	j	j
IV	j	b	b	j			j	b	b	b	j	j	b	b	j	j
V	j	b	b	j	j	j	j	b	b	b			b	b	j	j
VI	j			j	j	j	j	b	b	b	b	b	b	b	j	j
VII	j	j	j	j	j	j	j	b	b	b	b	b	b	b		

98. Sudėkite į krūvelę korteles, skaitmenimis į viršų, tokia tvarka: 1, 6, 2, 10, 3, 7, 4, 9, 5, 8.

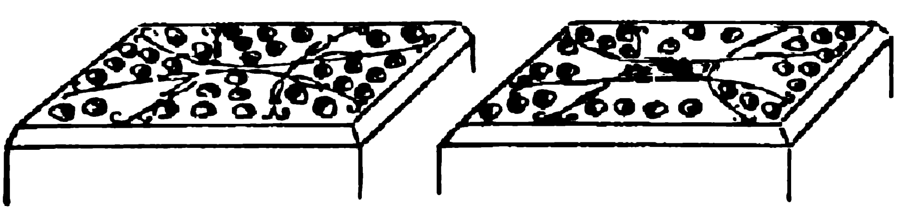
99. P i r m a s g a l v o s ū k i s. Kvadrato viršūnėse (252 pieš., *a)* reikia patalpinti po 2 šaškes (uždėti vieną šaškę ant kitos).



252 pieš.

A n t r a s g a l v o s ū k i s. Išdėlioti 9 šaškes kvadratu (252 pieš., *b)*. Gauname 3 horizontalias ir 3 vertikalias eiles, po 3 šaškes kiekvienoje eilėje. Likusias 3 šaškes reikia uždėti, kaip parodyta piešinyje. Gausime po 4 šaškes kiekvienoje horizontalioje ir kiekvienoje vertikalioje eilėse.

100. Sprendiniai parodyti 253 piešinyje.



253 pieš.

101. Po pirmojo šturmavimo «įgulos» sudėtyje liko 36 žmonės. Nustatykime, kiek iš jų turi būti kiekvieno krašto viduryje. Kadangi pirmoje ir trečioje eilėse turėjo būti po 11 «gynėjų», tai antroje eilėje 36 — 22 = 14 žmonių, tai yra po septynis žmones vidury kiekvieno iš priešingųjų kraštų, vadinasi, po 7 žmones dviejų kitų kraštų vidury.

Iš viso visų kraštų viduriuose bus 28 žmonės. Likusieji 8 žmonės kampuose — po 2 žmones kiekviename kampe. Gaunamas šis jėgų prieš antrąjį šturmavimą išdėstymas:

I eilė	2	7	2
II eilė	7	36	7
III eilė	2	7	2

Po antrojo šturmavimo liko 32 tvirtovės «gynėjai». Samprotaujame analogiškai, kaip ir iki šiolei. Pirmoje ir trečioje eilėse turi būti, kaip ir anksčiau, po 11 žmonių, antroje: 32 — 22 = 10 žmonių, tai yra po penkis kiekvieno tvirtovės krašto vidury, vadinasi, kampuose 32 — 20 = 12 žmonių, po 3 žmones kiekviename kampe. Gaunamas šis jėgų prieš trečiąjį šturmavimą išdėstymas:

I eilė	3	5	3
II eilė	5	32	5
III eilė	3	5	3

Tokiu pat būdu galima rasti jėgų išdėstymą po trečiojo ir ketvirtojo šturmavimų:

4	3	4
3	28	3
4	3	4

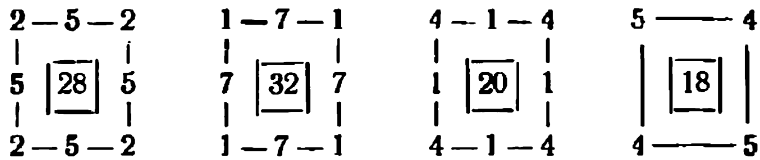
5	1	5
1	24	1
5	1	5

Po penktojo šturmavimo liko 22 tvirtovės gynėjai. Šiuo atveju vidury kraštų jėgų nebelieka, nes 22—22=0. Vadinasi, visi 22 žmonės turi išsidėstyti tik kampuose:

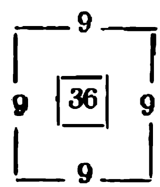
6	—	5
—	22	—
5	—	6

Išvedant toliau tvirtovės gynėjus iš rikiuotės, nebebūtų įmanoma likusias «jėgas» išdėstyti po 11 žmonių išilgai kiekvieno tvirtovės krašto.

102. Samprotaujant taip pat, kaip ir sprendžiant pirmesnį uždavinį, galima gauti šias lempų išdėstymo schemas (kvadratėlyje bendras lempų skaičius):



Esant 18 lempų, visos jos sutelkiamos kambario kampuose. Jeigu paimtume 36 lempas, tai, atvirkščiai, visi kampai liktų tušti, kaip tai matyti iš šios schemos:



Tokiu būdu, laikydamasis lempų išdėstymo po 9 išilgai kiekvienos kambario sienos principo, apšvietimo technikas gali pavartoti mažiausia 18 lempų ir daugiausia 36 lempas.

Paskutinį uždavinio klausimą galima išsiaiškinti arba tiesiog bandymų keliu, arba algebros pagalba.

(Kas nepanorės gilintis į toliau pateiktus matematinius samprotavimus arba tai pasirodys ne jo jėgoms, tas gali tolesnį išdėstymą kuriam laikui praleisti ir pradėti spręsti kitus uždavinius.)

Pažymėsime kiekviename kampe esančių lempų skaičių raide a, o prie kiekvienos kambario sienos lempų skaičių — raide b. Tada visų lempų skaičius n bus lygus: $n=4(a+b)$. Šį skaičių galima parašyti ir kitaip:

$$n=2(a+b+a)+2b.$$

Čia $a+b+a=s$ — lempų išilgai kiekvienos sienos skaičius. Jeigu tą skaičių s palikti nekintamu, tai visų lempų skaičius n mažės, mažinant b, ir didės, didinant b. Jeigu b padidės dviem, tai visas lempų skaičius n padidės keturiais Apšvietimo technikas taip ir padarė: didindamas lempų skaičių keturiais, jis padidindavo kiekvieną b dviem,

o kad suma $s=a+b+a$ nepakistų, kiekvieną a sumažindavo vienetu. Tuo pačiu lempų išdėstyme visą laiką buvo tam tikras simetriškumas. Tačiau gauti išilgai kiekvienos kambario sienos tą patį lempų skaičių s ir esant nesimetriniam lempų išdėstymui pilnai galima.

Tegul lempų, išdėstytų kambario kampuose, skaičiai bus: a_1, a_2, a_3 ir a_4, o prie sienų — b_1, b_2, b_3 ir b_4:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & - & b_1 & - & a_2 \\ | & & & & | \\ b_2 & & & & b_3 \\ | & & & & | \\ a_3 & - & b_4 & - & a_4 \end{array}$$

Visų lempų skaičių n galima išreikšti šiuo būdu: $n=4s-(a_1+a_2+$ $+a_3+a_4)$, kur s — nekintamas lempų skaičius išilgai kiekvienos sienos ($s=a_1+b_1+a_2=a_1+b_2+a_3=a_3+b_4+a_4=a_2+b_3+a_4$). Jei s — nekintamas skaičius, tai bendras lempų skaičius padidėja, sumažinus a_1+ $+a_2+a_3+a_4$, ir, atvirkščiai, sumažėja, padidinus $a_1+a_2+a_3+a_4$. Pridėkime, pavyzdžiui, prie b_1 ir b_2 po x lempų, tai yra iš viso $2x$ lempų. Jei a_1 sumažės x-su, tai s nepasikeis, o bendras lempų skaičius n tuo tarpu padidės x-su. Tą patį gausime, jei pridėsime prie b_1 ir b_3 po x lempų ir atitinkamai atimsime x lempų iš a_2 ir t. t.

Visiškai tą patį gautume, jei pridėtume prie kiekvieno iš skaičių b_1, b_2, b_3, b_4 po x ir atimtume iš a_1 ir a_4 arba iš a_2 ir a_3 po x, arba atimtume iš kiekvieno skaičių a_1, a_2, a_3 ir a_4 po $\frac{x}{2}$; tada s nepasikeistų, o visų lempų skaičius n tuo tarpu padidėtų $2x$. Tokiu būdu, lempas išdėstydami nesimetriškai, galime pagal norą padidinti jų bendrą skaičių n vienetu, dviem, trimis, keturiais ir t. t.

Jei apšvietimo technikas būtų lempų skaičių padidinęs nuo 24 iki 25, tada reikėtų jas išdėstyti, pavyzdžiui, tokia tvarka:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & - & 4 & - & 3 \\ | & & & & | \\ 4 & & \boxed{25} & & 3 \\ | & & & & | \\ 3 & - & 3 & - & 3 \end{array}$$

103. Iš sąlygos Nr. 3 išplaukia, kad narvelyje turėjo būti patalpinta ne mažiau kaip 22 ir ne daugiau kaip 44 triušiai.

Pagal sąlygą Nr. 4 bendras triušių skaičius turėjo būti dalus trims. Vadinasi, triušių galėjo būti arba 24, arba 27, 30, 33, 36, 39, 42. Toliau lengva įsitikinti, kad 24 triušių (16+8) neįmanoma išskirstyti po 11 kiekviename narvelio šone taip, kad neliktų tuščių sekcijų (sąlyga Nr. 1). Jeigu imtume 33, 36, 39 arba 42 triušius, tai juos galėtume išskirstyti po 11 kiekviename narvelio šone, tačiau kiekvienu iš šių atvejų reikėtų kai kuriose sekcijose patalpinti daugiau kaip 3 triušius (įsitikinkite!), o tai prieštarautų sąlygai Nr. 2.

Tokiu būdu, atmesdami nepatenkinančius uždavinio sąlygų atvejus, mes prieiname išvados, kad iš pradžių buvo numatyta patalpinti 27 triušius, o išskirstyti jie būtų buvę šiuo būdu (kvadratėlyje — bendras triušių skaičius kiekviename aukšte):

27 triušių išskirstymo planas:

3	1	3
1	18	2
3	2	3

II aukšto planas

2	1	1
1	9	1
1	1	1

I aukšto planas

Tačiau institutas gavo 3 triušiais daugiau, tai yra 30 triušių, kuriuos galima išskirstyti tokiu būdu:

30 triušių išskirstymo planas:

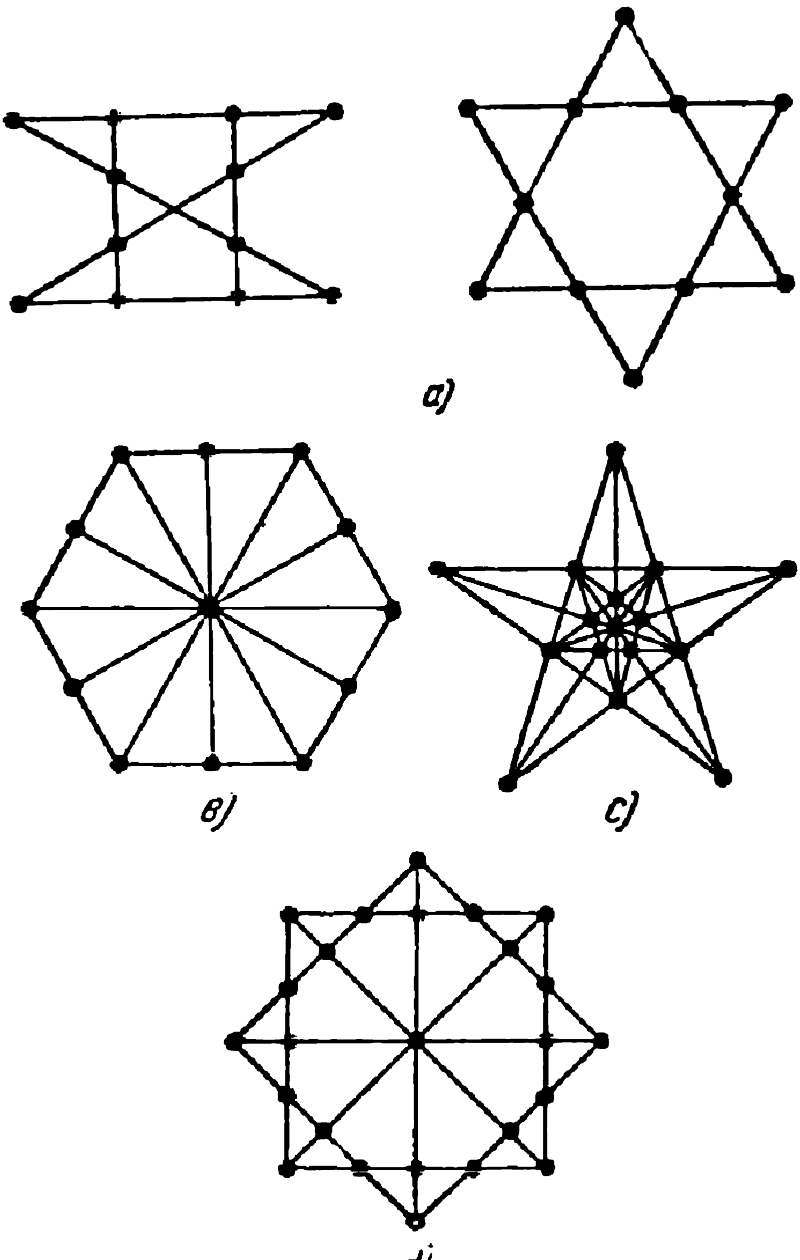
2	3	3
3	20	2
3	2	2

II aukšto planas

1	1	1
1	10	2
1	2	1

I aukšto planas

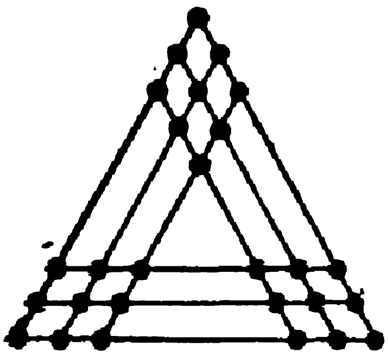
104. Uždavinių a), b), c) ir d) sprendiniai pateikti 254 piešinyje.



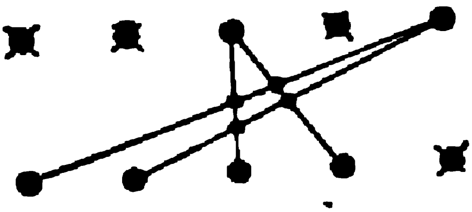
254 pieš.

105. Sprendinys parodytas 255 piešinyje.

106. Nurodymas pirmojo žaidimų varianto uždaviniui spręsti. Uždavinio apie tokį keturių šaškių (iš dešimties, sudėtų dviejose eilėse) perkėlimą, kad susidarytų 5 eilės, po 4 šaškes kiekvienoje, bet kurį galimą sprendinį galima lengvai ir greitai gauti nesudėtingų geometrinių brėžinių pagalba.

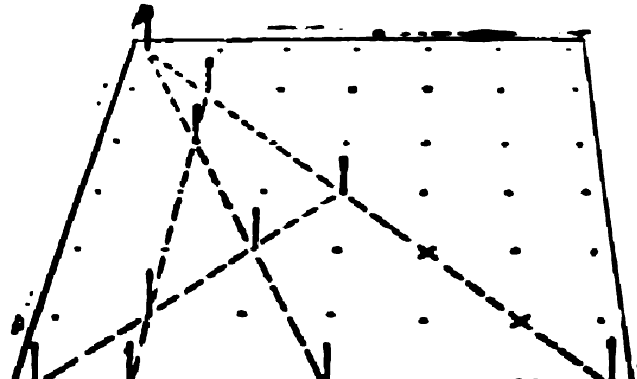


255 pieš.



256 pieš.

Šaškes pakeiskite taškais ant popieriaus lapo ir užbraukite kuriuos nors tris viršutinius ir vieną apatinį tašką. Pirmą iš likusių viršutinėje eilėje dviejų taškų sujunkite tiesėmis su kuriais nors dviem apatinės eilės taškais, o antrąjį viršutinėje eilėje tašką — su apatinės eilės kitais dviem taškais (256 pieš.). Be to, venkite tokių taškų kombinacijų, kurios veda prie lygiagrečių linijų, ir tada būtinai gausite keturių nubrėžtų linijų 4 susikirtimo taškus. Uždaviniui išspręsti gautuose susikirtimo taškuose reikia patalpinti 4 šaškes, atitinkančias užbrauktus taškus.

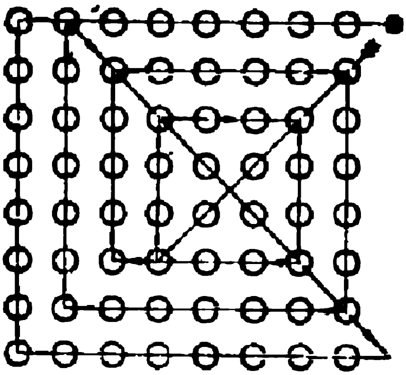


257 pieš.

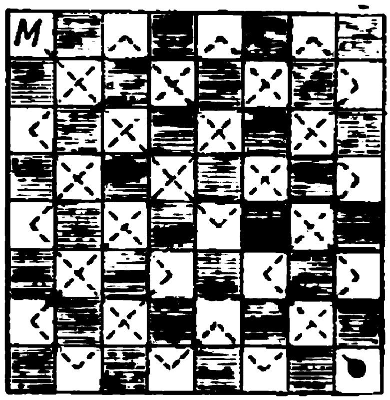
Uždavinio apie degtukų išdėstymą kartono lapo arba plastelino (antras žaidimas) skylutėse sprendinys parodytas 257 piešinyje.

107. Mergaitės maršrutas pateiktas 258 piešinyje, *a*. Figūrininkės judėjimo starto ir finišo vieta pažymėta juodu tašku.

Berniuko maršrutas pateiktas 258 piešinyje, *b*. Startas pažymėtas raide *M*, o finišas — tašku.



a)



b)

258 pieš.

108. Mažiausias ėjimų skaičius — 24; jų eilės tvarka tokia (kiekvieną kartą reikia perkelti viršutinę šaškę):

1) šaškę iš apskritimo *E* perkelti į apskritimą *A*; 2) tolesnę šaškę iš apskritimo *E* — į apskritimą *B*; 3) dar tolesnę iš apskritimo *E* — į apskritimą *C*; toliau: 4) iš *E* — į *D*; 5) iš *B* į *D*; 6) iš *E* — į *B*; 7) iš *C* — į *B*; 8) iš *A* — į *B*; 9) iš *E* — į *C*; 10) iš *E* — į *A*; 11) iš *B* — į *A*; 12) iš *C* — į *E*; 13) iš *B* — į *C*; 14) iš *A* — į *C*; 15) iš *B* — į *A*; 16) iš *C* — į *B*; 17) iš *C* — į *A*; 18) iš *B* — į *A*; 19) iš *E* — į *C*; 20) iš *E* — į *B*; 21) iš *C* — į *B*; 22) iš *D* — į *E* (arba į *C*); 23) iš *D* — į *B*; 24) iš *E* (arba iš *C*) — į *B*.

109. Mažiausias sukeitimų skaičius — 19.

Pačią ekonomiškiausią sukeitimų sistemą turėsime tada, kai šaškes komplektuosime grandinėlėmis, tai yra, sukeitę vietomis, pavyzdžiui, 1 ir 7 šaškes, po to sukeisime 7 šaškę su ta šaške, kuri užima septintą vietą, šiame pavyzdyje su šaške 20. Savo ruožtu šaškę 20 teks pakeisti su ta, kuri užima jos vietą — su 16 šaške, o 16 šaškę — su 11 šaške, kuri neteisėtai užima šešioliktosios vietą ir t. t., kol užbaigsime grandinėlę — kada abi sukeičiamos šaškės pateks į teisėtas savo vietas.

Tada reikės pradėti naują sukeitimų grandinėlę ir taip toliau, kol baigsime visus sukeitimus.

Visi perkėlimai, reikalingi duotajam uždaviniui išspręsti, sudaro šias 5 grandinėles:

1 ir 7; 7 ir 20; 20 ir 16; 16 ir 11; 11 ir 2; 2 ir 24;
3 ir 10; 10 ir 23; 23 ir 14; 14 ir 18; 18 ir 5;
4 ir 19; 19 ir 9; 9 ir 22;
6 ir 12; 12 ir 15; 15 ir 13; 13 ir 25;
17 ir 21.

Reikalingų perkėlimų schemą galima būtų iš anksto numatyti, jei tik pradžioje surašytumėme paeiliui visų šaškių, pagal jų pradinį išdėstymą, numerius, o po jais eilės numerius:

7 24 10 19 3 12 20 8 22 ir t. t.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 ir t. t.

Išbraukiame pirmąją skaičių 1 ir 7 porą; tie skaičiai nusako pirmąjį šaškių sukeitimą. Po to ieškome apatinėje eilutėje 7, o virš jo randame skaičių 20; išbraukiame skaičius 7 ir 20; jie nusako antrąjį šaškių sukeitimą; ieškome apatinėje eilėje 20, randame virš jo 16; išbraukiame skaičius 20 ir 16; jie nusako atitinkamų šaškių trečiąjį sukeitimą ir t. t. Kada grandinėlė nutrūksta, kitos grandies sudarymą pradedame nuo kraštinės dar neišbrauktų skaičių poros kairėje.

110. Jeigu vieną saldainį iš devynių, esančių išorinėje, pačioje didžiausioje dėžutėje, perdėtume į pačią mažiausią, tai šioje vidinėje dėžutėje būtų 5 saldainiai, tai yra 2 poros ir dar 1 saldainis. Šiuos 5 saldainius reikia įtraukti į skaičių saldainių, esančių antroje vidinėje dėžutėje. Iš čia seka, kad antroje vidinėje dėžutėje dabar yra 5+4=9 saldainiai, tai yra 4 poros ir dar vienas saldainis. Tokiu pat būdu samprotaudami, gausime, kad ir trečioje vidinėje dėžutėje yra dabar 9+4=13 saldainių, tai yra ir šį kartą skaičius, patenkinąs uždavinio sąlygą, ir t. t.

111. P i r m a s g a l v o s ū k i s. Susitarsime, kad pirmas skaitmuo parodo šaškės numerį, o antras skaitmuo (atskirais atvejais raidė) parodo numerį to langelio, į kurį šaškė statoma. Galima ši perkėlimų tvarka:

2-1; 3-2; 4-3; 4-*A*; 5-4; 5-3; 6-5; 6-4; 7-6; 7-5; 7-*B*; 8-7; 8-6; 8-5; 9-8; 9-7; 9-6; 1-9; 1-8; 1-7; 1-*C*; 9-7; 9-8; 9-9; 9-10; 8-6; 8-7; 8-8; 8-9; 7-5; 7-6; 7-7; 7-8; 1-7; 1-6; 1-5; 1-*B*; 6-5; 6-6; 6-7; 6-*C*; 5-4; 5-5; 5-6; 5-7; 4-3; 4-4; 4-5; 4-6; 1-5; 1-4; 1-3; 1-*A*.

Tolesnė perkėlimų eilė aiški.

Antras galvosukis. Laikysime, kad keturios galimos šaškių judėjimų kryptys yra: į šiaurę, į pietus, į rytus ir į vakarus

Š
↑
V ← → R, tada šaškių perkėlimų eilę galima užrašyti taip:
↓
P

1) žingsnis į rytus;
2) šuolis į vakarus;
3) žingsnis į vakarus;
4) šuolis į rytus;
5) žingsnis į šiaurę:
6) šuolis į pietus;

toliau užrašome sutrumpintai:

7) ž. P.;
8) š. S.;
9) š. R.;
10) ž. V.;
11) š. V.;
12) ž. S.;
13) ž. R.;
14) š. V.;
15) ž. P.;
16) š. R.;
17) ž. S.;
18) š. P.;
19) ž. R.;
20) ž. Š.;
21) š. P.;
22) ž. V.;
23) š. Š.;
24) š. Š.;
25) ž. P.;
26) š. P.;
27) š. R.;
28) ž. Š.;
29) š. P.;
30) š. V.;
31) š. Š.;
32) ž. R.;
33) š. V.;
34) š. Š.;
35) ž. R.;
36) š. V.;
37) š. P.;
38) š. R.;
39) š. R.;
40) ž. V.;
41) š. V.;
42) ž. R.;
43) š. S.;
44) ž. P.;
45) š. P.;
46) ž. Š.

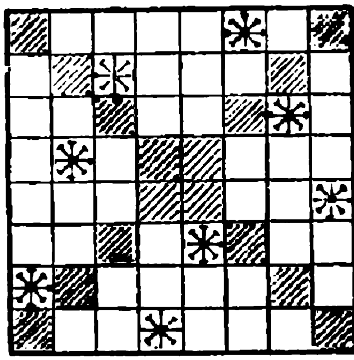
112. Visus pėstininkus galima nukirsti, padarius 16 ėjimų. Pirmuoju žirgo ėjimu reikia nukirsti pėstininką c2, po to — pėstininką b4 ir toliau d3: b2: c4: d2: b3: d4: e6: g7: f5: e7: g6: e5: f7: g5.

Galima ir kitaip spręsti uždavinį: pirmuoju ėjimu nukirsti pėstininką b3 arba pėstininką f7, arba g6 ir t. t. (simetrija!).

113. $\left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\} d=7$ $\left.\begin{matrix}2\\7\\12\end{matrix}\right\} d=5$ $\left.\begin{matrix}6\\10\\14\end{matrix}\right\} d=4$

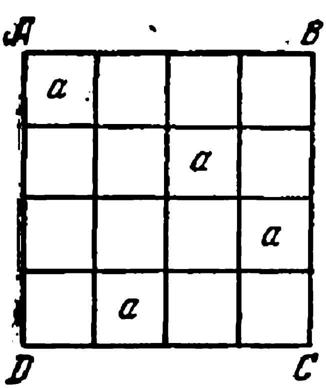
$\left.\begin{matrix}9\\11\\13\end{matrix}\right\} d=2$ $\left.\begin{matrix}3\\4\\5\end{matrix}\right\} d=1$

114. Uždavinys turi vienintelį sprendinį. Jis pateiktas 259 piešinyje. Kad ieškodami sprendimo neklaidžiotume patamsyje, galima pasinaudoti šiuo metodu: žvaigždutė patalpinama antrame langelių stulpelyje tiek žemai, kiek tai leidžia pirmame langelių stulpelyje esančios žvaigždutės padėtis, ir sutinkamai su sąlyga: žvaigždutes dėlioti tik baltuose langeliuose. Trečiame langelių stulpelyje reikia tolesnę žvaigždutę patalpinti vėl pagal galimybę žemiau siame langelyje ir t. t., vis stengiantis tolesniame stulpelyje patalpinti žvaigždutę tiek žemai, kiek tai leidžia pirmesniuose stulpeliuose esančios žvaigždutės. Kai tik paaiškės, kad stulpelyje niekur negalima patalpinti eilinės žvaigždutės, reikia pirmesniame stulpelyje esančią žvaigždutę pakelti per minimaliai galimą langelių skaičių (tačiau žvaigždutę talpinti visada tik sutinkamai su uždavinio sąlyga); jeigu nėra kur ją pakelti, tada reikia ją visiškai nuimti, ir pakelti pirmesnę žvaigždutę, ir t. t. Tęsiant tolesnių žvaigždučių išdėliojimą, kiekvieną kartą vadovaujamasi priimta taisykle: aukščiau pakelti patalpintas žvaigždutes tik tuo atveju, jei dešinėje eilinei žvaigždutei visai nėra vietos.



259 pieš.

Toks bandymų procesas greičiausiai pasirodys ilgas, tačiau jis sistemingas ir būtinai atves prie tikslo.



260 pieš.

115. P i r m a s u ž d a v i n y s. Sakysim, kad raidės vienodos. Patalpinsime vieną raidę į kurį nors įstrižainės *AC* langelį, pavyzdžiui, į viršutinį kairįjį kampą (260 pieš.). Antrosios įstrižainės *BD* langelių tarpe yra vienas langelis, esąs toje pačioje horizontalioje eilutėje, kurioje parašyta pirmoji raidė, ir vienas langelis toje pačioje vertikalioje eilutėje; viename iš likusių antrosios įstrižainės dviejų langelių galima parašyti antrąją raidę.

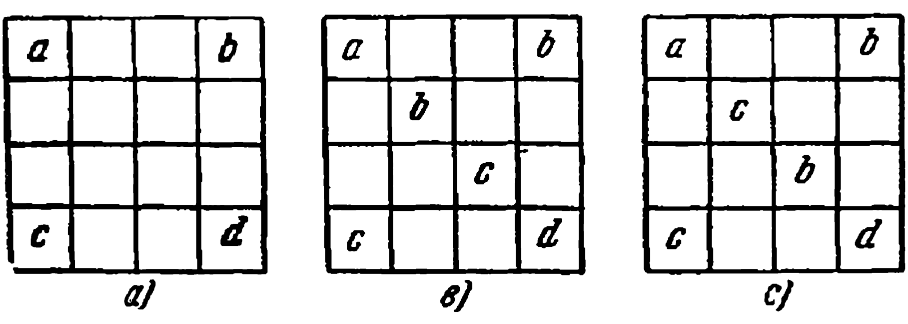
Lengva įsitikinti, kad po to, kai parašytos dvi raidės, kitų dviejų raidžių padėtis nustatoma vienareikšmiai, tai yra kiekvienoje

raidėmis neužimtų horizontalių eilučių yra tik po vieną langelį, į kurį, sutinkamai su uždavinio sąlyga, galima patalpinti likusias raides

Dabar nesunku suskaičiuoti galimų sprendinių kiekį. Kiekvieną iš keturių galimų pirmos raidės išdėstymų viename iš įstrižainės *AC* langelių atitinka du galimi antros raidės išdėstymai įstrižainėje *BD* vadinasi, iš viso yra 4×2=8 atvejai. Visus 8 sprendinius galima gauti iš vieno, kvadratą pasukant ir apverčiant (kitais žodžiais, imant atvaizdą veidrodyje).

Dabar sakysime, kad duotosios 4 raidės skirtingos: *a, b, c, d* ir išskirstytos vietoje raidžių *a* tuose pačiuose langeliuose, kaip 260 piešinyje, bet kuria tvarka, pavyzdžiui, tokia: *a, b, c, d*. Tačiau tuose pačiuose langeliuose raides galima patalpinti kita tvarka, pavyzdžiui, tokia· *b, c, d, a*. Taip galima keisti raidžių išdėstymo tvarką, nekeičiant raidžių užimamų langelių, 24 kartus. Vis tai bus skirtingi sprendiniai. Taigi skirtingų sprendinių viso bus: 8×24=192.

A n t r a s u ž d a v i n y s. Iš uždavinio sąlygos seka, kad raidės, esančios kampiniuose langeliuose, turi būti skirtingos. Dėl to pirmiausia parašykime 4 raides bet kokia tvarka kampiniuose langeliuose (261 pieš., *a*). Įstrižainės, kurioje yra raidės *a* ir *d*, viduriniuose langeliuose turi būti raidės *b* ir *c*, bet jos gali buti parašytos viena ar kita tvarka (261 pieš., *b* ir *c*).



261 pieš.

Po to, kai šie 6 langeliai užpildyti, likusieji langeliai, sutinkamai su sąlyga, gali būti užpildyti vieninteliu būdu. Dėl to pirmiausia reikia surašyti raides kraštinėse horizontaliose ir vertikaliose eilutėse, o po to antrojoje įstrižainėje. Galutinis išdėstymas parodytas 262 piešinyje.

Tuo būdu, jeigu raidės jau surašytos kampiniuose langeliuose, tai uždavinys turi 2 sprendinius. Kadangi 4 raides kampiniuose langeliuose galima surašyti 24 būdais, tai uždavinys turi $24 \times 2 = 48$ sprendinius.

a	*c*	*d*	*b*
d	*b*	*a*	*c*
b	*d*	*c*	*a*
c	*a*	*b*	*d*

a	*d*	*c*	*b*
b	*c*	*d*	*a*
d	*a*	*b*	*c*
c	*b*	*a*	*d*

262 pieš.

Iš vieno surasto išdėstymo, užpildytąjį kvadratą pasukant ir apverčiant (tai yra imant atvaizdą veidrodyje), gaunami dar 7 išdėstymai.

Jeigu sutartume visus išdėstymus, gautus iš vieno išdėstymo pasukimo ir apvertimo keliu, laikyti vienu sprendiniu, tai, esant šiai sąlygai, uždavinys turėtų $48:8=6$ skirtingus sprendinius.

116. Po eilutės mėginimų jums, be abejo, pasisektų rasti kurį nors iš gausių šio uždavinio sprendinių. Galimas, pavyzdžiui, toks sprendinys:

1 raudonas	4 juodas	2 žalias	3 baltas
2 baltas	3 žalias	1 juodas	4 raudonas
3 juodas	2 raudonas	4 baltas	1 žalias
4 žalias	1 baltas	3 raudonas	2 juodas

Prie šio sprendinio galima prieiti tokių samprotavimų keliu. Pažymėkime kvadratų spalvų pavadinimus raidėmis *A*, *B*, *C* ir *D*, o skaitmenis 1, 2, 3, 4 — raidėmis *a*, *b*, *c*, ir *d*. Uždavinys pakeičiamas tokiu: kaip 16-oje kvadrato langelių išdėstyti 4 didžiąsias raides *A*, *B*, *C*

ir *D*, kad visos jos būtų kiekvienoje horizontalioje ir vertikalioje eilėse, kiekvienoje įstrižainėje ir niekur nepasikartotų; tą patį reikia padaryti ir su mažosiomis raidėmis *a*, *b*, *c*, ir *d*, jas kombinuojant visais galimais būdais su didžiosiomis raidėmis. Pradžioje išdėstykime didžiąsias raides, naudodamiesi, pavyzdžiui, tokiu metodu: pirmojoje horizontalėje jas patalpinkime abėcėlės tvarka (263 pieš., *a*),

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

a)

Aa	Bd	Cb	Dc
Db	Cc	Ba	Ad
Bc	Ab	Dd	Ca
Cd	Da	Ac	Bb

b)

263 pieš.

o po to užpildykime langelius įstrižainės, einančios iš viršutinio kairiojo kvadrato kampo į žemutinį dešinįjį. Išilgai įstrižainės galima gauti tik 2 išdėstymus: arba *A*, *C*, *D*, *B*, arba *A*, *D*, *B*, *C*. Paimkime pirmąjį išdėstymą. Užpildyti likusius langelius dabar nesunku, ir tai galima atlikti tik vieninteliu būdu. Gausime išdėstymą, atvaizduotą 263 piešinyje, *a*. Kad išdėstytume mažąsias raides, iš pradžių prie kiekvienos įstrižainės raidės *A*, *C*, *D*, *B* priskirkime po mažąją to paties pavadinimo raidę (263 pieš., *b*), o po to imkime kiekvieną langelį ir šalia didžiosios raidės rašykime mažąją, vienavardę su didžiąja raide, kuri yra simetriškame langelyje užpildytosios įstrižainės atžvilgiu. Gausime išdėstymą, atvaizduotą 263 piešinyje, *b*.

Jei dabar pakeistume *A*, *B*, *C*, *D* atitinkamai raudonu, juodu, žaliu ir baltu kvadratais, o raidėms *a*, *b*, *c* ir *d* suteiktume reikšmes 1, 2, 3 ir 4, tai gautume schemą, pateiktą šio uždavinio sprendimo pradžioje. Didžiąsias raides galima pakeisti tų pačių spalvų kvadratais, tik kita tvarka. Turint 4 spalvas, galima jas pažymėti raidėmis *A*, *B*, *C*, *D* 24 skirtingais būdais; visiškai taip pat 4 mažąsias raides galima pakeisti skaitmenimis 1, 2, 3, 4 taip pat 24 būdais. Taigi iš viso galima gauti 24×24=576 skirtingų šio uždavinio sprendinių.

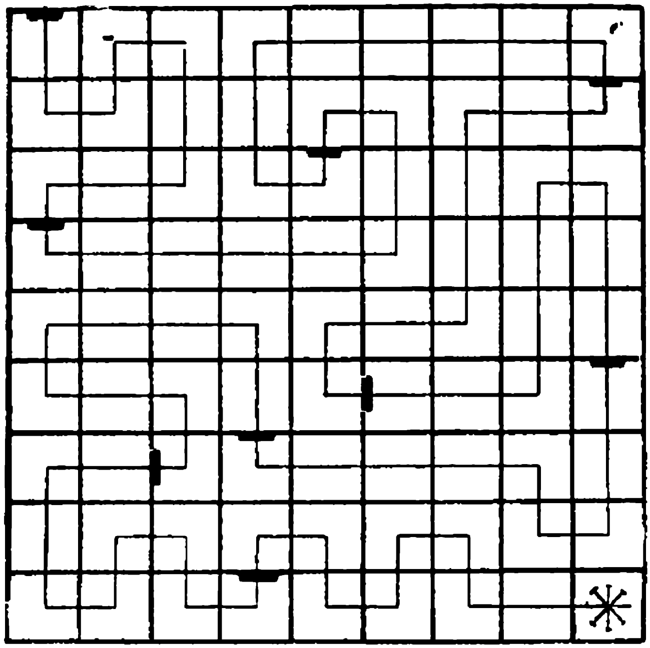
117. Tegul iš pradžių skrituliukas Nr. 1 paliekamas tuščias. Kiekvieną ėjimą galima užrašyti dviem skaitmenimis: pirmasis parodys

numerį skrituliuko, kuriuo pradedamas ėjimas, o antrasis — numerį skrituliuko, kuriuo pabaigiamas ėjimas. Tada galimas šis sprendinys: 9-1; 7-9; 10-8; 21-7; 7-9; 22-8; 8-10; 6-4; 1-9; 18-6; 3-11; 16-18; 18-6; 30-18; 27-25; 24-26; 28-30; 33-25; 18-30; 31-33; 33-25; 26-24; 20-18; 23-25; 25-11; 6-18; 9-11; 18-6; 13-11; 11-3; 3-1.

118. Visų 24 galvosūkio sprendinių lentelė:

1.	1—2, 3	2—6, 5	6—1, 3	1—6, 2
2.	1—2, 3	4—1, 3	3—6, 5	5—3, 4
3.	1—4, 5	3—4, 1	4—2, 6	2—3, 4
4.	1—4, 5	5—2, 6	6—4, 1	1—6, 5
5.	2—3, 4	3—1, 6, 5	6—2, 4	2—1, 6
6.	2—3, 4	5—2, 3	3—1, 6	1—3, 5
7.	2—4, 5	5—1, 3, 6	6—2, 4	2—1, 6
8.	2—4, 5	3—2, 5	5—1, 6	1—5, 3
9.	3—1, 2	5—3, 2	2—6, 4	4—5, 2
10.	3—1, 2	4—3, 1	1—6, 5	5—1, 4
11.	3—1, 2	1—2, 6, 4	6—2, 3	3—6, 5
12.	3—1, 2	2—1, 6, 5	6—3, 1	3—6, 4
13.	3—4, 5	2—3, 5	5—1, 6	1—2, 5
14.	3—4, 5	1—3, 4	4—2, 6	2—1, 4
15.	3—4, 5	4—1, 6, 5	6—5, 3	3—2, 6
16.	3—4, 5	5—2, 6, 4	6—3, 4	3—1, 6
17.	4—3, 2	3—1, 6, 5	6—2, 4	4—5, 6
18.	4—3, 2	1—4, 3	3—5, 6	5—3, 1
19.	4—1, 2	1—3, 6, 5	6—2, 4	4—6, 5
20.	4—1, 2	3—1, 4	1—6, 5,	5—1, 3
21.	5—3, 4	4—1, 6	6—3, 5	5—6, 4
22.	5—3, 4	2—3, 5	3—1, 6	1—2, 3
23.	5—1, 2	3—2, 5	2—6, 4	4—3, 2
24.	5—1, 2	1—4, 6	6—2, 5	5—1, 6

119. Kalinio surastas maršrutas parodytas 264 piešinyje.



264 pieš.

120. Iš pradžių kalinys turi eiti taip, kad galėtų paimti raktus *d* ir *e* ir jais atidaryti kamerų *E* ir *D* duris (žr. 59 pieš., 87 psl.), po to jam reikia paimti raktą *c*, juo atidaryti kameros *C* duris, paimti raktą *a*, kurio pagalba bus galima praeiti pro kamerą *A* ir paimti raktą *b*. Dabar reikia dar kartą praeiti pro *E* ir *D*, pasiekti *B*, paimti raktą *f*, vėl praeiti *E*, atidaryti kameros *F* duris, paimti raktą *g* ir pro duris *G* išeiti iš požemio.

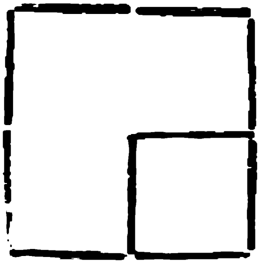
Kelias į laisvę buvo nelengvas — pro 84 duris.

121. Žirgo ėjimas toks, kad nuo juodo langelio jis gali pereiti ant balto, po to nuo balto vėl ant juodo ir t. t. Šachmatų lenta turi 64 langelius. Kad pakliūtų į viršutinį dešinįjį kampą (į langelį h8), po vieną kartą apsilankęs kiekviename lentos langelyje, žirgas turi padaryti 63 ėjimus.

Pradinėje padėtyje žirgas stovi ant juodo langelio (žr. 60 pieš., 88 psl.) ir, pagal sąlygą, turi ateiti taip pat ant juodo langelio (h8).

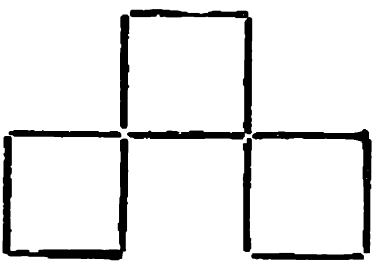
Tai neįmanoma, nes 63-čias ėjimas nelyginis, o bet kuriuo nelyginiu ėjimu žirgas, užimąs išeities padėtyje juodą langelį, perkeliamas ant balto langelio.

III skyriui

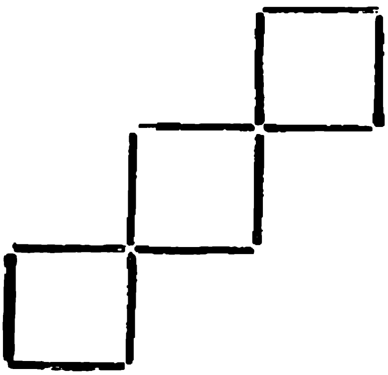


265 pieš.

122. a) Išimti keturis degtukus, išdėstytus kvadrato viduje, ir sudaryti iš jų naują kvadratą; b) žr. 265 piešinį; c) žr. 266 piešinį; d) žr. 267 piešinį; e) žr. 268 piešinį; f) žr. 269 piešinį.

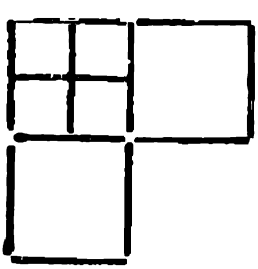


266 pieš.

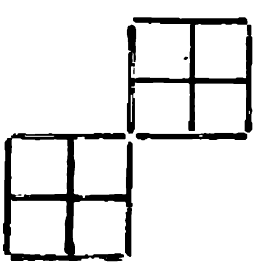


267 pieš.

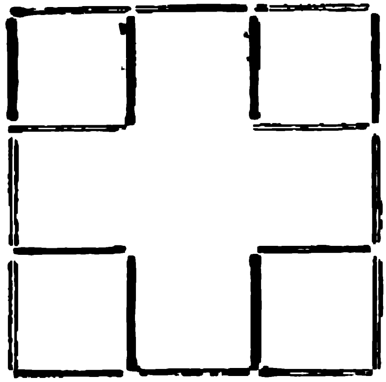
123. a) Nurinkti 12 degtukų, išdėstytų didžiojo kvadrato viduje, ir sudėti iš jų naują tokį pat kvadratą; b) žr. 270 piešinį; c) žr. 271 piešinį, *a* (jei atimsime 4 degtukus), žr. 271 piešinį, *b* (jei atimsime



268 pieš.

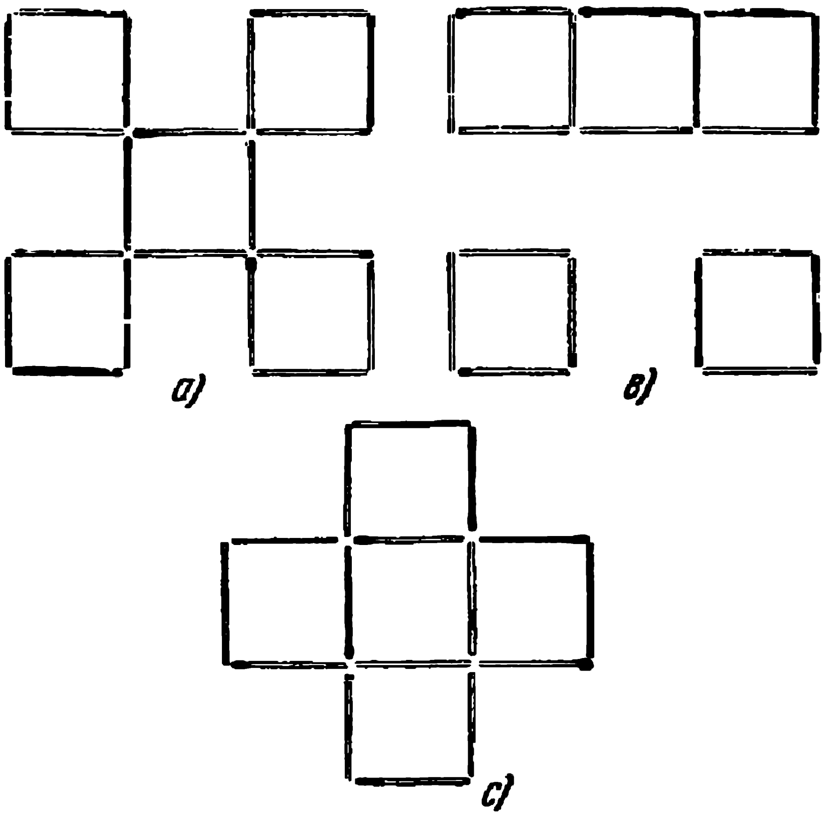


269 pieš.

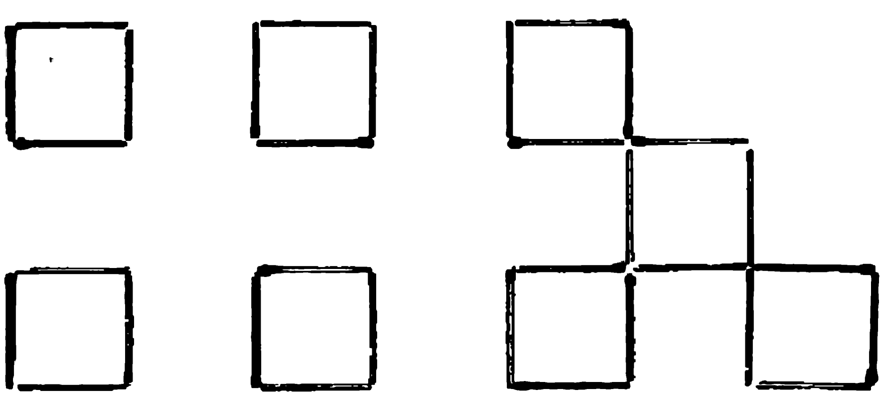


270 pieš.

6 degtukus); žr. 271 piešinį, *c* (jeigu atimsime 8 degtukus); d) žr. 272 piešinį;

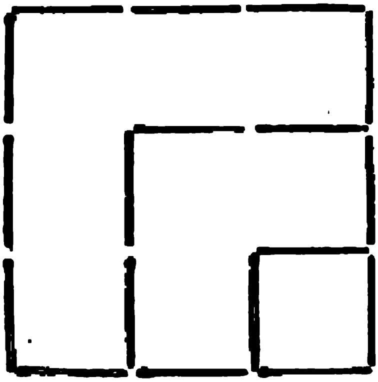


271 pieš.

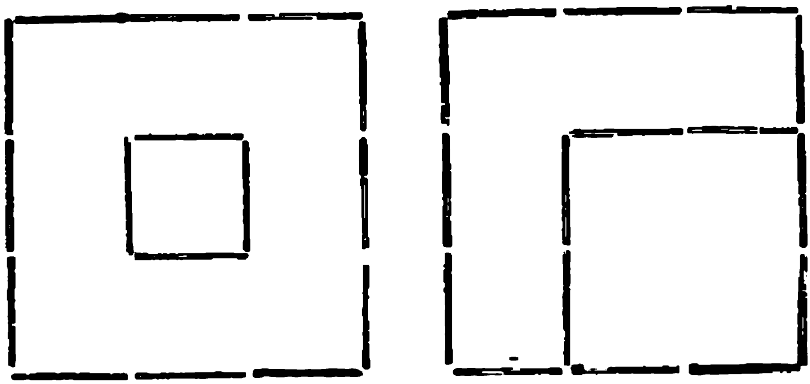


272 pieš.

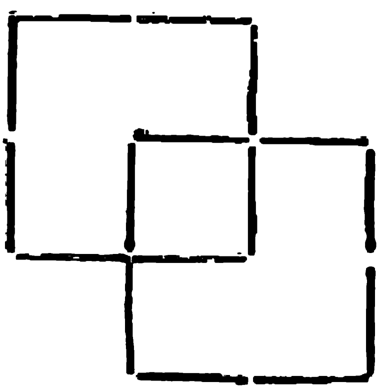
e) žr. 273 piešinį;
f) žr. 274 piešinį;
g) žr. 275 piešinį;
h) žr. 276 piešinį.



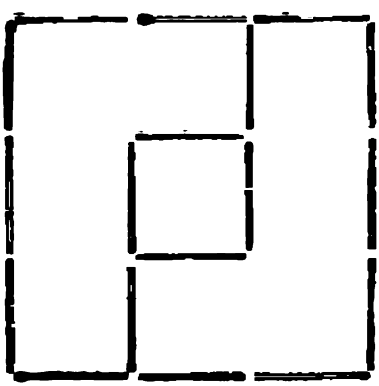
273 pieš.



274 pieš.

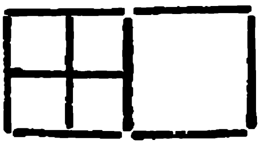


275 pieš.



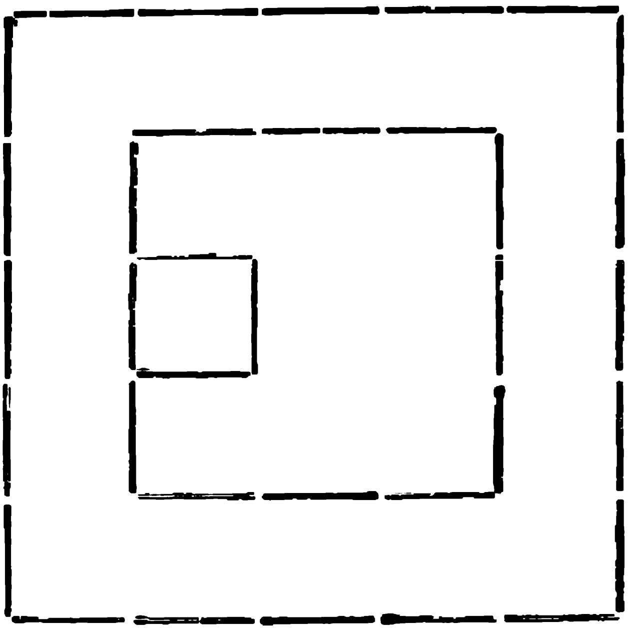
276 pieš.

124. Žr. 277 piešinį.
125. Žr. 278 piešinį.
126. Žr. 279 piešinį.
127. Žr. 280 piešinį.

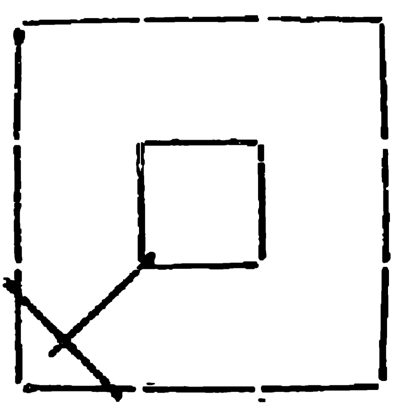


277 pieš.

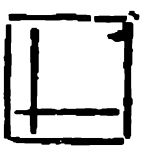
128. Du degtukus įlaužti per vidurį (žr. 281 pieš.).
129. Žr. 282 piešinį.



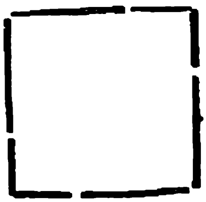
278 pieš.



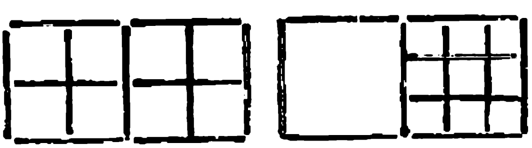
279 pies.



280 pieš.

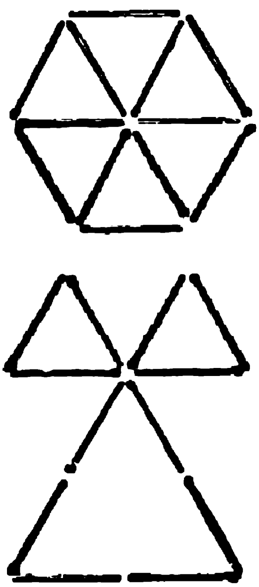


281 pieš.

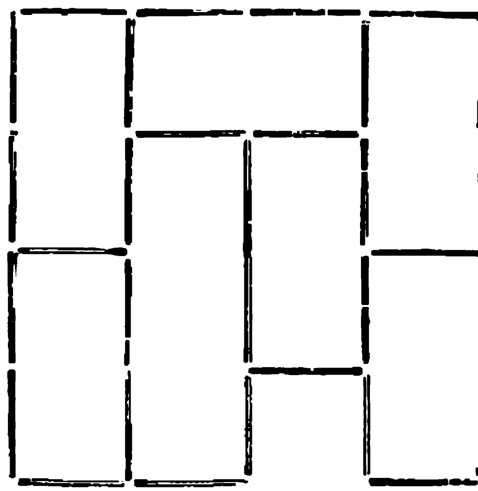


282 pieš.

130. Žr. 283 piešinį.
131. Žr. 284 piešinį.
132. Žr. 285 piešinį.



283 pieš.



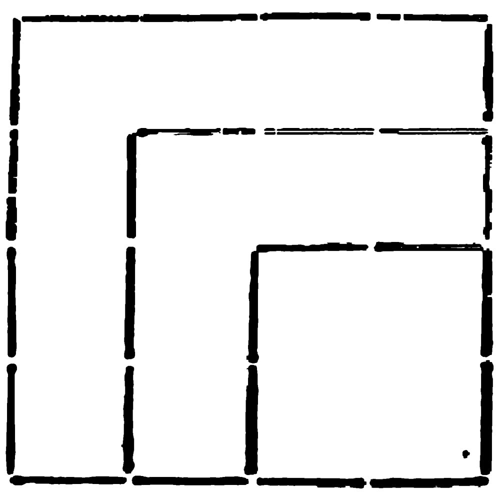
284 pieš.



285 pieš.

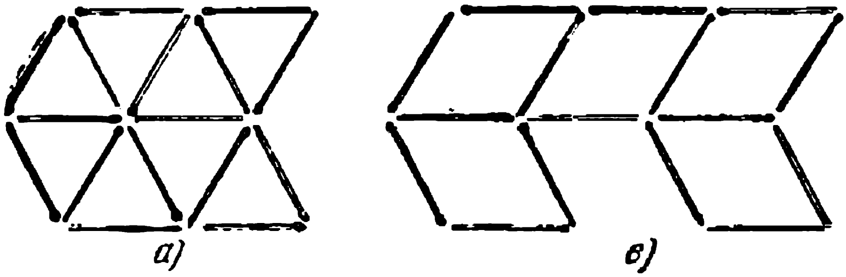
133. Žr. 286 piešinį.

134. Padėti du degtukus prie stalo ar knygos krašto taip, kad stalo ar knygos kraštai sudarytų dvi kitas kvadrato kraštines.

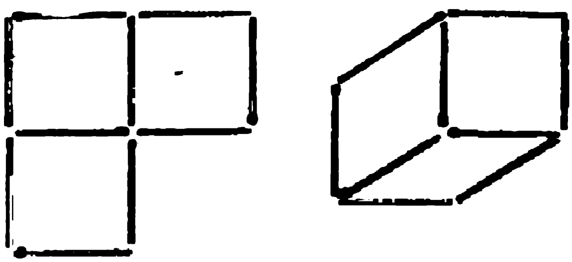


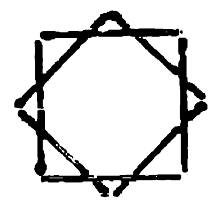
286 pieš.

135. a) Žr. 287 piešinį, *a*; b) žr. 287 piešinį, *b*.
136. Žr. 288 piešinį.
137. Žr. 289 piešinį.



287 pieš.

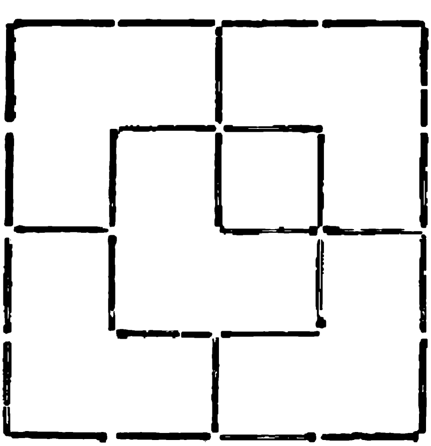




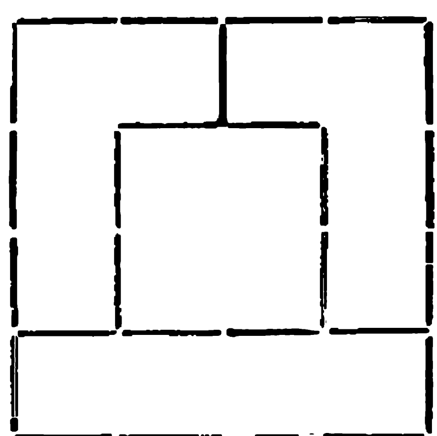
288 pieš.

289 pieš.

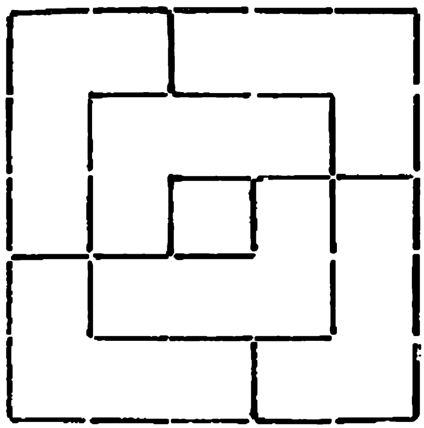
138. Žr. 290 piešinį.
139. a) Žr. 291 piešinį; b) žr. 292 piešinį
140. 840.
141. Žr. 293 piešinį. Galimi ir kiti sprendiniai.

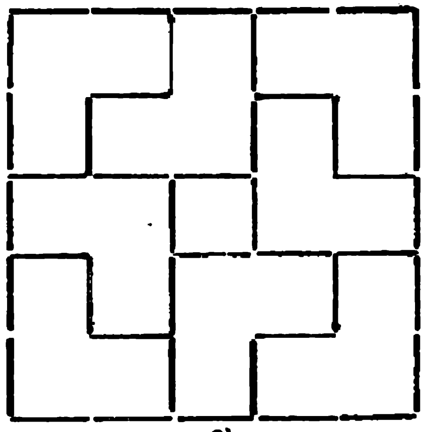


290 pieš.

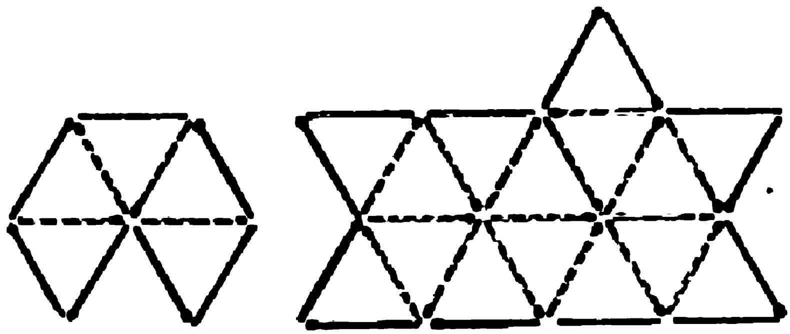


291 pieš.





292 pieš.



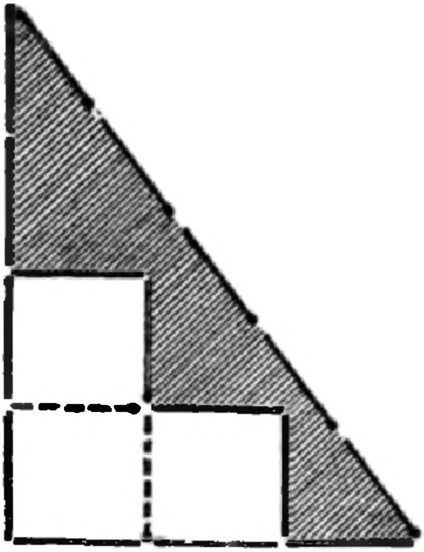
293 pieš.

142. Pradžioje iš 12 degtukų reikia sudėti statųjį trikampį su statiniais iš 3 ir 4 degtukų ir įžambine iš 5 degtukų (294 pieš.). Tokio trikampio plotas bus $\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 4) = 6$ kvadratiniai vienetai.

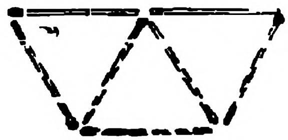
Jei po to nuimtume keturis degtukus, kurie sudaro statųjį kampą, ir išdėstytume juos laiptukais (kaip parodyta 294 piešinyje), tai trikampio plotas sumažėtų 3 kvadratiniais vienetais. Gautoji figūra (piešinyje subrūkšniuota) ir bus $6-3=3$ kv. vienetų.

143. Du degtukai, gulį vienoje tiesėje, sudaro tarpusavy 180° kampą. Kad gautume tokį kampą, iš degtukų sudarome tris lygiakraščius trikampius su bendra viršūne (295 pieš.). Kampų suma prie bendros viršūnės kaip tik ir sudarys 180°, nes $60° \cdot 3 = 180°$.

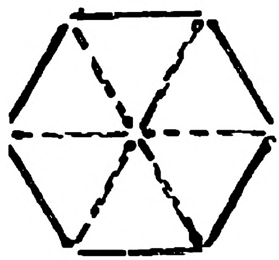
144. Sudarome 6 lygiakraščius trikampius su viena bendra viršūne (296 pieš.). Visus vidinius degtukus pašaliname. Likusi figūra — taisyklingas šešiakampis, nes kiekviena figūros kraštinė lygi apibrėžto apskritimo spinduliui, o tokią savybę turi tik taisyklingas šešiakampis.



294 pieš.



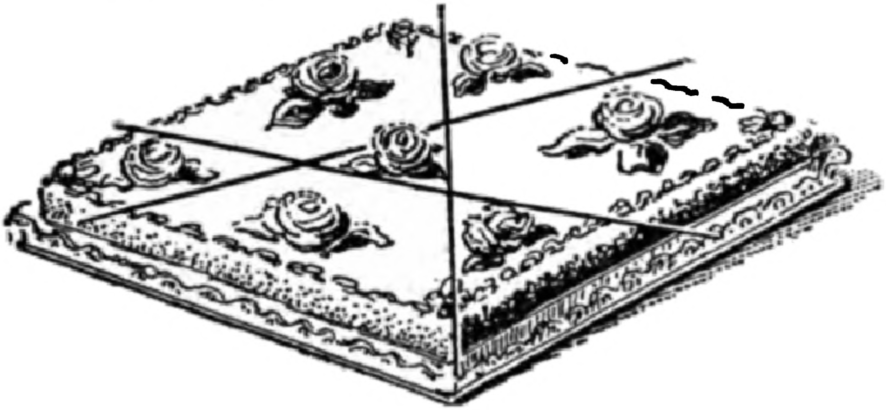
295 pieš.



296 pieš.

IV skyriui

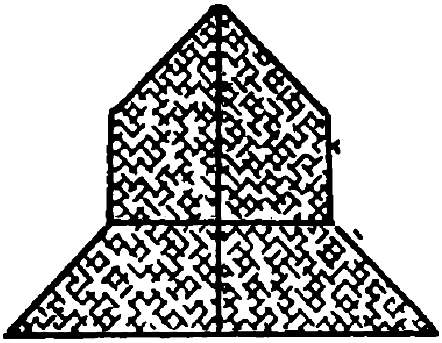
145. Sprendinys parodytas 297 piešinyje.



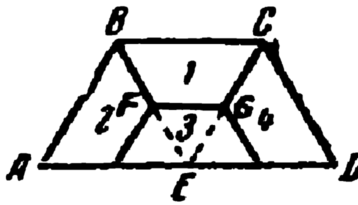
297 pieš.

146. 1) Piūvio linijos parodytos 298 piešinyje. Jei visi brėžiniai ir piūviai yra atlikti kruopščiai, tai gautųjų dalių lygybę patikrinti galima sutapdinimu.

2) Trapeciją *ABCD* (299 pieš.) reikia kirsti laužtine, jungiančia *AE, BE, CE* ir *DE* vidurinius taškus. Gausime 4 lygias trapecijas.



298 pieš.

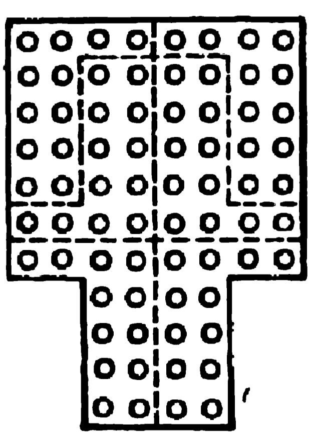


299 pieš.

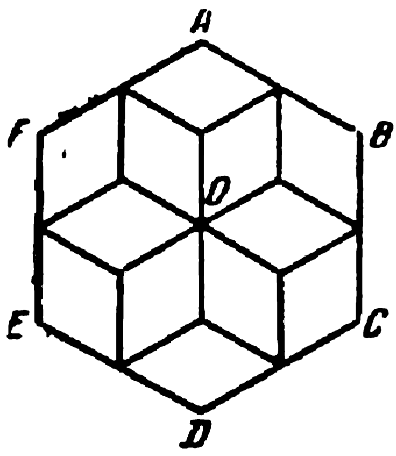
Patikrinti galima sutapdinimu, o susipažinusieji su geometrija gali atlikti įprastą matematinį įrodymą. Tai nesunku.

3) Piūvio linijos parodytos 300 piešinyje.

4) Norint gauti taisyklingo šešiakampio *ABCDEF* reikalingas piūvio linijas (301 pieš.), reikia jo kraštinių vidurinius taškus sujungti su spindulių *OA*, *OB*, *OC*, *OE* ir *OF* viduriniais taškais. Kiekviena šešiakampio dalis bus rombas (galite patikrinti ar įrodyti), o rombas, nors ir turi lygias kraštines, bet nėra taisyklingas keturkampis, nes ne visi jo kampai tarpusavy lygūs.



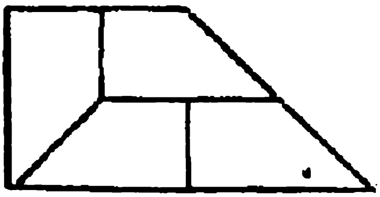
300 pieš.



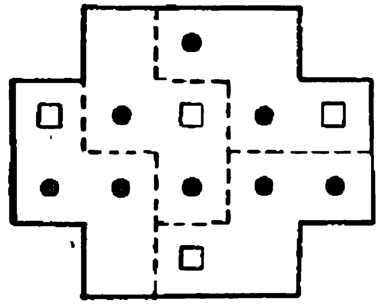
301 pieš.

147. Sprendinys parodytas 302 piešinyje.

148. Pertvarėlės atvaizduotos punktyru 303 piešinyje.

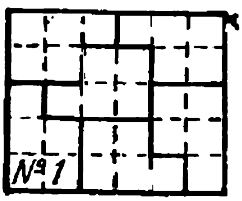


302 pieš.



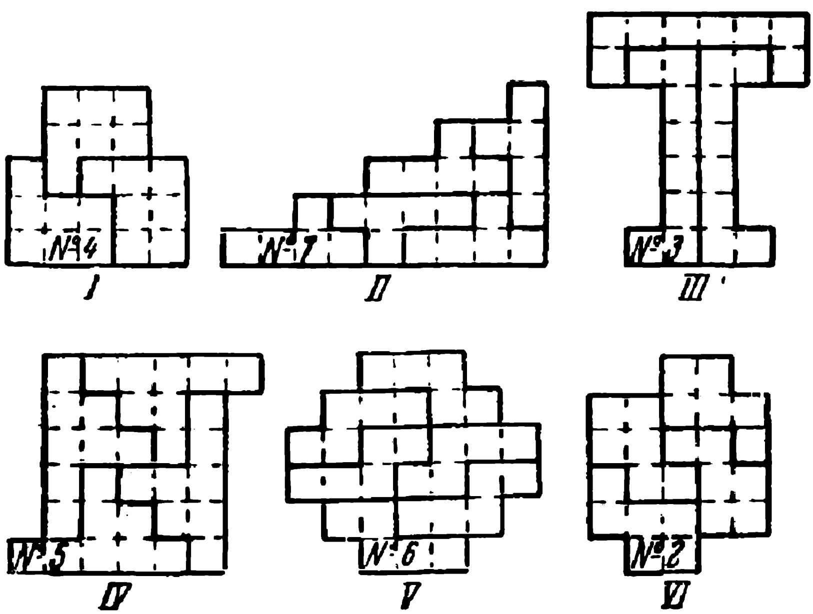
303 pieš.

149. Mėginimų keliu galima nustatyti, kad stačiakampis susideda iš šešių plokštelių Nr. 1 (304 pieš.).



304 pieš.

94 piešinyje *III* figūra (žr. 105 psl.) padalijama į tris 93 piešinio plokšteles Nr. 3, *IV* figūra — į 4 plokšteles Nr. 5, *V* figūra — į 6 plokšteles Nr. 6, *VI* figūra — į 4 plokšteles Nr. 2. Visi reikalingi piūviai parodyti 305 pieš



305 pieš.

150. Vasia sugalvojo stačiakampiame faneros lape padaryti laiptuotą piūvį (306 pieš.).

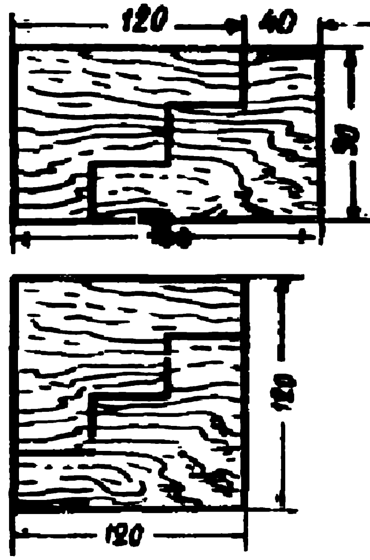
Tenka pastebėti, kad laiptuoto piūvio būdas geometriškai tiksliam stačiakampio perdirbimui į kvadratą nevisuomet tinkamas.

Vis tik bet kurį stačiakampį galima paversti kvadratu.

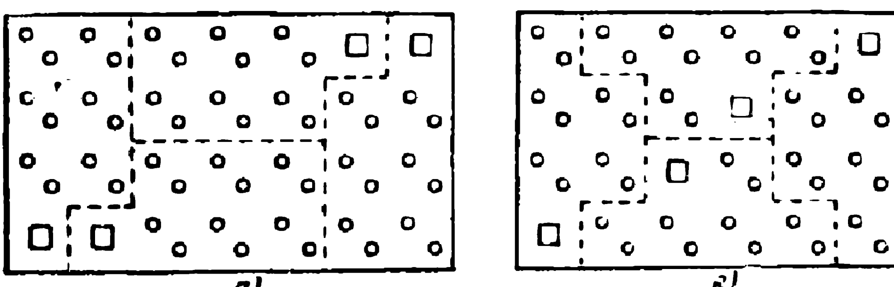
Reikiamas šiuo klausimu matematines žinias jūs rasite knygoje «Nuostabus kvadratas»*.

151. Reikalingos piūvių linijos parodytos punktyru 307 piešinyje.

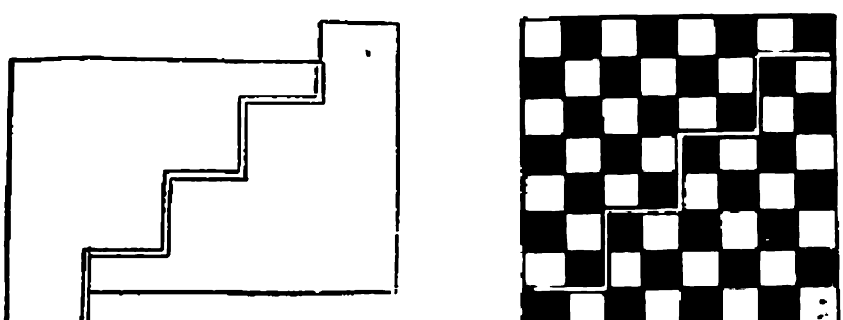
152. Piūvio linija parodyta 308 piešinyje.



306 pieš.



307 pieš.



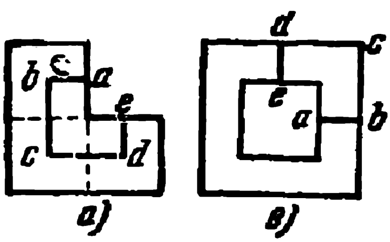
308 pieš.

* Б. А. Кордемский и Н. В. Русалев. «Удивительный квадрат», Гостехиздат, 1952. *Red.*

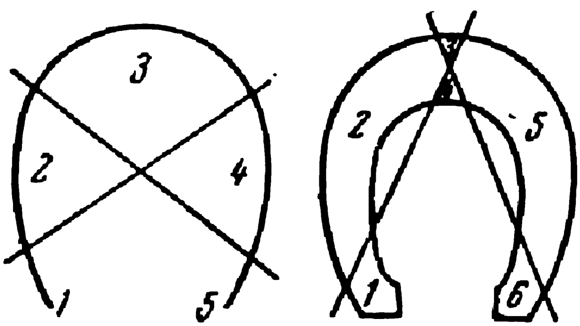
153. Duotąją figūrą reikia perpiauti pagal liniją *abcde* (309 pieš., *a*), kur *b*, *c* ir *d* — kvadratų, sudarančių duotąją figūrą, centrai. Atpiautą dalį pridėję prie likusios, kaip parodyta 309 piešinyje, *b*, gausime ieškomą kvadratą su anga.

154. Čia negalima apsiriboti schematiniu pasagos atvaizdavimu lanko pavidalu (310 pieš.). Jeigu nesuteiksite pasagos figūrai būtinos apimties, tai, kiek besistengtumėte, jums nepavyks dviem tiesėmis padalyti ją daugiau kaip į 5 dalis.

Tame pačiame piešinyje duotas realesnis pasagos atvaizdas ir parodytas galimas jos padalijimas į 6 dalis.



309 pieš.



310 pieš.

155. Skaitytojas turi atkreipti dėmesį į tai, kad šio uždavinio sąlygoje, skirtingai nuo pirmesnio uždavinio sąlygos, nedraudžiama perkelti po kirčio dalis. Čia ir yra sprendimo paslaptis.

Pirmu kirtimu reikia atidalyti pasagos dalį su skylėmis *A* ir *D* (žr. 98 pieš., 108 psl.). Pasaga suskils į 3 dalis. Dabar uždėkime jas vieną ant kitos taip, kad skylės *B*, *A* ir *E* būtų apytikriai vienoje tiesioje linijoje, o *C*, *D* ir *F* — kitoje, ir tada antru kirtimu lengva padalyti pasagą į reikalaujamas 6 dalis.

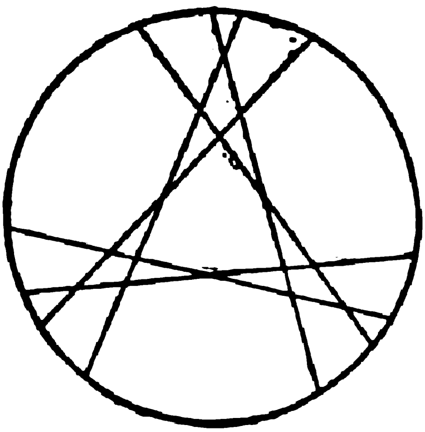
156. Kad pasiektume didžiausią dalių skaičių, reikia taip išvesti tiesiąsias linijas, kad kiekviena iš jų kirstųsi su visomis kitomis, be to, viename taške neturi susikirsti daugiau kaip dvi linijos.

Vienas iš galimų sprendinių parodytas 311 piešinyje; linijų išdėstymas gražus, simetrinis. Gauta 22 dalys.

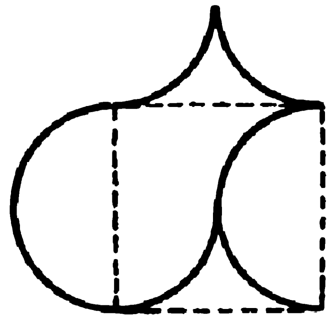
157. Sprendinys parodytas 312 piešinyje.

158. Sprendinys pateiktas 313 piešinyje. Piūvio linijos parodytos punktyru. Lygiosios dalys pažymėtos vienodais skaitmenimis.

Piūvio linijai MN nubrėžti ant kraštinės AB atidėkite atkarpą $AM=KL$ ir per taškus M ir K išveskite tiesę. Piūvio linijai NP nubrėžti per taškus N ir F išveskite tiesę. Kitų linijų brėžimas aiš-

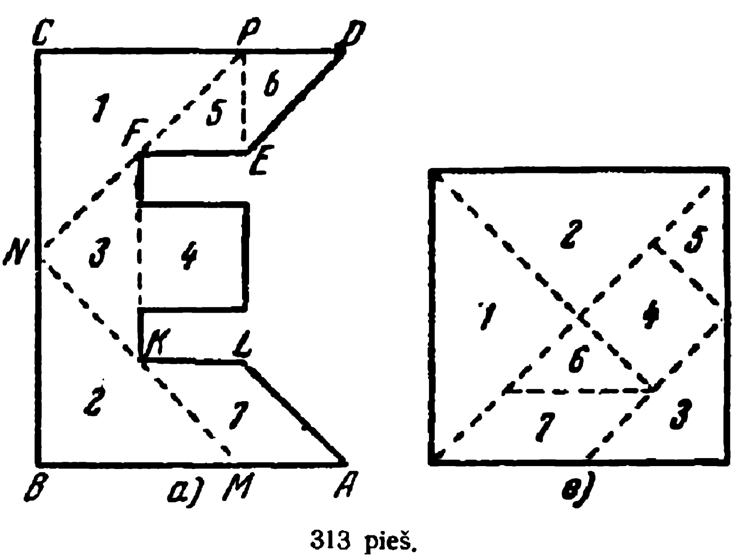


311 pieš.



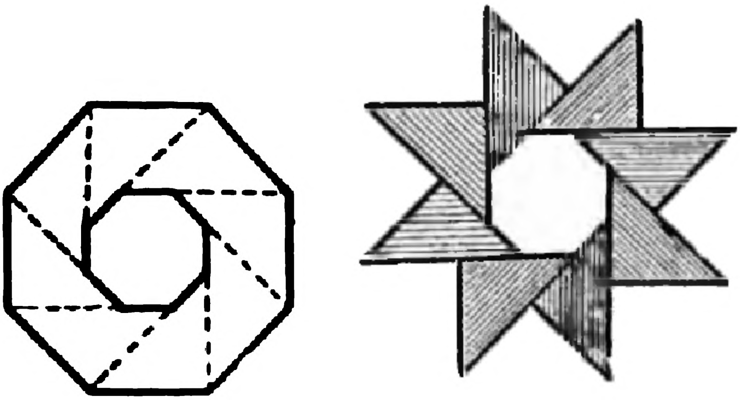
312 pieš.

kus iš brėžinio. Jeigu figūra buvo išbrėžta teisingai, tai kampas MNP bus status, o atkarpos MB, BN, NC ir CP — lygios.



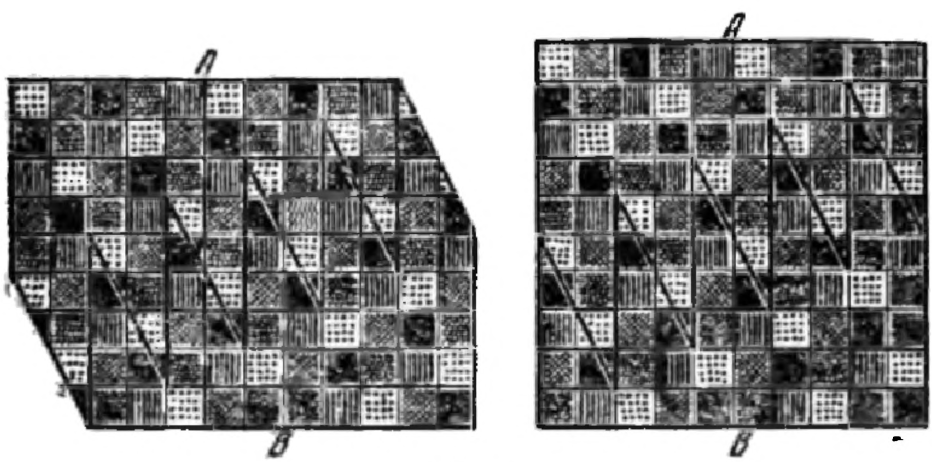
313 pieš.

159. Sprendinys parodytas 314 piešinyje.



314 pieš.

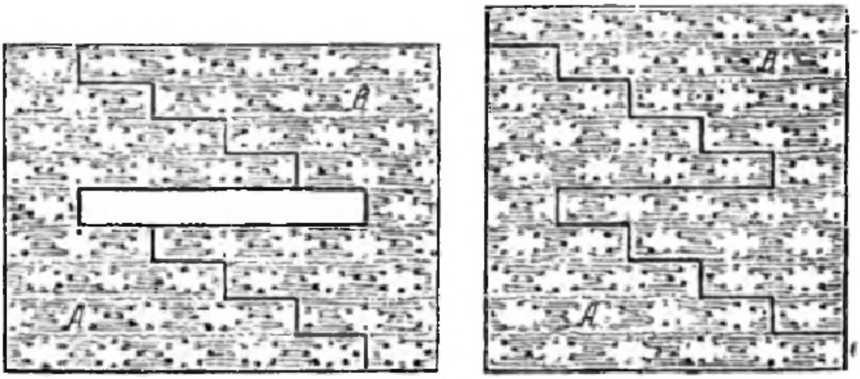
160. Uždavinio sprendinys parodytas 315 piešinyje. Jeigu dantytąją dalį *A* ištrauktume iš dalies *B* ir po to, perkėlę per vieną dantį į dešinę, vėl įstumtume ją tarp dalies *B* dantų, tai mozaika įgautų kvadrato formą.



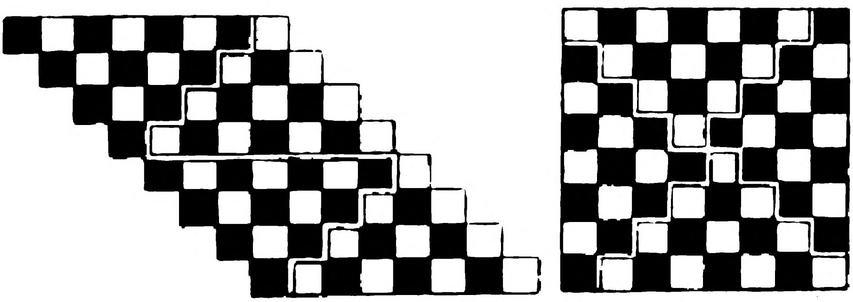
315 pieš.

161. Nuri Saradževa padarė 2 laiptuotus kirpimus ir gautas 2 dalis sudėjo taip, kaip parodyta 316 piešinyje. Laiptelio plotis 2 *dm*, aukštis 1 *dm*.

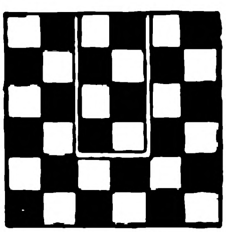
162. Sprendinys parodytas 317 piešinyje. Siaura šviesi juostelė — piūvio linija.



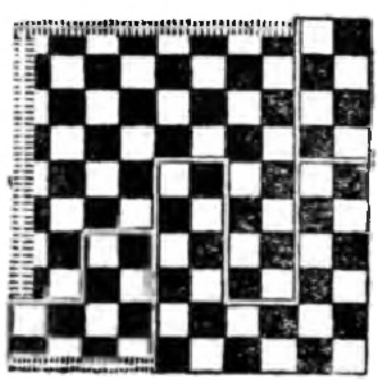
316 pieš.

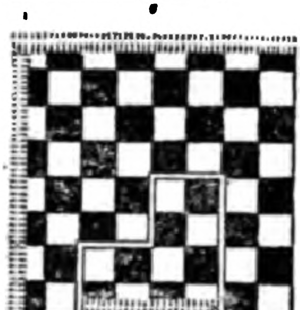


317 pieš.



163. Sprendimo schema parodyta 318 piešinyje. Siaura šviesi juostelė — piūvio linija; langeliai, kuriuos mergaitė atmereškavo, subrūkšniuoti.

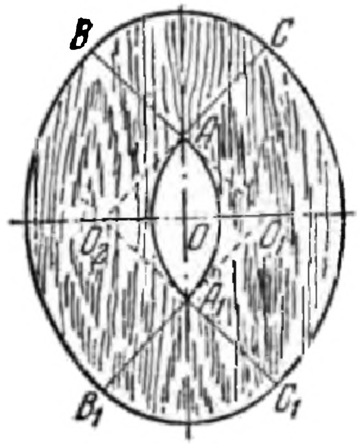


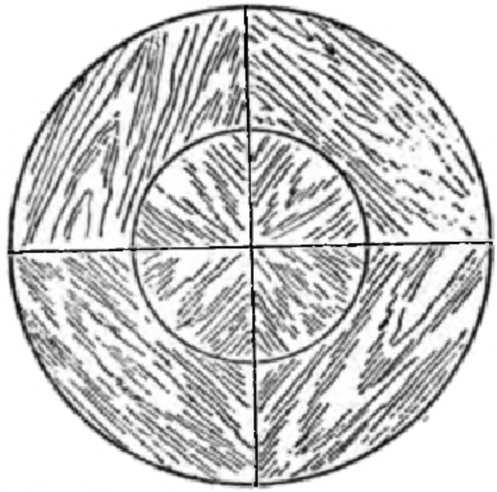


318 pieš.

164. Iš pradžių stalius pastebėjo, kad lentos yra simetrinės figūros su dviem simetrijos ašimis. Po to jis susekė, kad jeigu skylės išilginės ašies pusė (319 pieš. OA) būtų atidėta ant skersinės ašies ($OO_1=OA$ ir $OO_2=OA$) ir taškai O_1 ir A, o taip pat O_2 ir A būtų sujungti tiesėmis, tai kiekviena iš figūrų BO_1B_1 ir CO_2C_1 tiksliai sudarytų skritulio su spinduliu O_1B ketvirtį, o kiekviena iš figūrų ABC ir $A_1B_1C_1$ — skritulio su spinduliu A_1B_1, kuris lygus pusei spindulio O_1B_1, ketvirtį.

Stalius supiaustė kiekvieną lentą pagal linijas BA, CA, B_1A_1 ir C_1A_1 ir iš gautų 8 dalių suklijavo tiksliai apvalų stalo viršų, kaip parodyta 319 pieš.

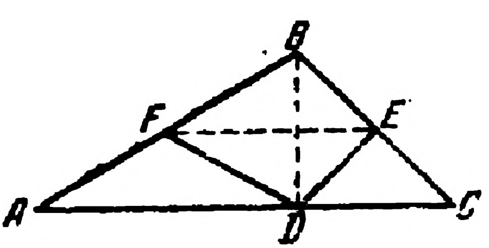




319 pieš.

165. Tegul ABC (320 pieš.) — kailio gabalo, kurį reikia išversti, brėžinys.

Nuleiskim statmenį $BD \perp AC$. Jeigu E ir F — kraštinių BC ir AB viduriniai taškai, tai kailininkas turi gabalą ABC sukarpyti pagal tieses DE ir DF, kiekvieną iš gautųjų dalių apversti, paliekant savo vietoje, kita puse ir vėl susiūti. Tada kailio gabalas ABC išsivers, tačiau liks tokios pat konfigūracijos. Tai galima griežtai įrodyti.

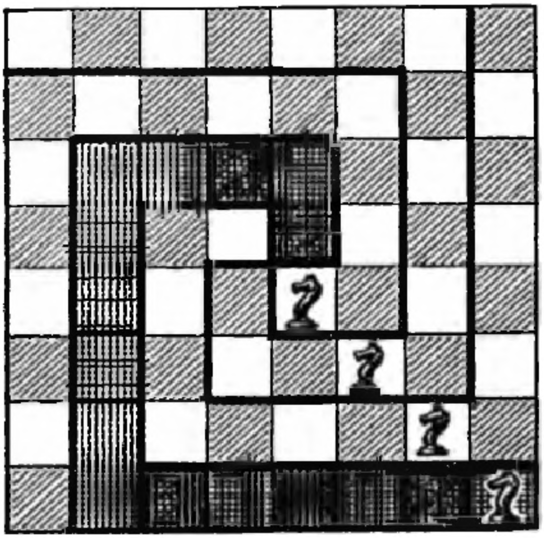


320 pieš.

Yra žinoma, kad stačiajame trikampyje pusiaukraštinė, išvesta į įžambinę, lygi pusei įžambinės. DF ir DE kaip tik ir yra stačiųjų trikampių ADB

ir *BDC* pusiaukraštinės, vadinasi, $DF=AF=FB$ ir $DE=$ $=BE=CE$. Iš čia $\triangle FBE=\triangle FDE$, o trikampiai *AFD* ir *DEC* — lygiašoniai. Taigi, jei lygiašonius trikampius *AFD* ir *DEC* apversime apie jų aukštinę, o keturkampį *FBED* — apie ašį *FE*, tai kiekviena iš tų figūrų guls į savo ankstyvesnę vietą buvusioje padėtyje.

Uždavinį apie «trikampio išvertimą» galima išspręsti ir kitais būdais.



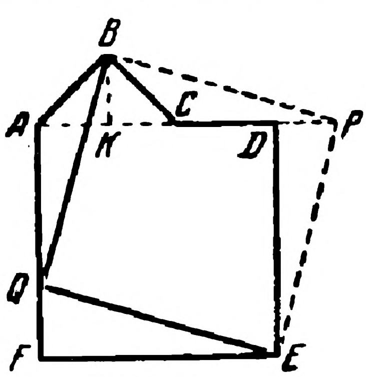
321 pieš.

166. 321 piešinyje storomis linijomis parodytos piūvių, patenkinančių uždavinio sąlygą, linijos. Kiekviena dalis savo forma primena raidę *C*. Viena iš dalių, kad būtų vaizdingiau, subrūkšniuota.

167. Dalijimo būdas — analogiškas pritaikytam uždavinio tekste būdui (žr. 115 psl.).

Raskime *AC* vidurį (322 pieš.). Tegul tai bus taškas *K*. Atidėkime $FQ=$ $=AK$ ant kraštinės *AF* ir $DP=AK$ ant *CD* tęsinio.

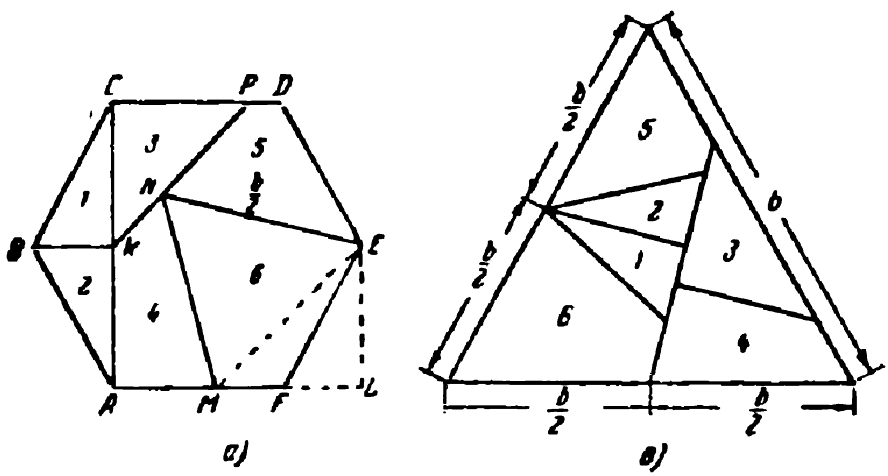
Dabar perkirskime figūrą tiesėmis *BQ* ir *QE*. Iš gautų dalių susideda kvadratas *BPEQ*. Susipažinusieji su geometrija apgalvoja įrodymą.



322 pieš.

P a s t a b a. Sprendimo būdas nepasikeis, jei trikampis iškyšulys ABC bus tiek didelis, kad taškas C susilies su kvadrato viršūne D, arba net jei AC bus didesnė už kvadrato kraštinę AD, bet mažesnė už $2AD$, kad tik trikampis ABC būtų lygiašonis ir status.

168. Duotas taisyklingas šešiakampis $ABCDEF$ (323 pieš.). Kad jį paverstume taisyklingu trikampiu, braižykime tokia tvarka: nutieskime AC, po to $BK \perp AC$, $EL \perp AF$, $LM = LE$; nutieskime EM; ant kraštinės EM brėžkime lygiakraštį trikampį EMN ir, galiausiai, nutieskime KP kaip KN tęsinį iki susikirtimo su CD taške P.



323 pieš.

Kontroliuodami pamatysite, kad jei visi brėžiniai buvo atliekami kruopščiai, tai $CP = CK$.

323 piešinyje, *a* piūvio linijos atvaizduotos ištisinėmis, o pagalbinės linijos -- punktyrinėmis. Gaunamos viso 6 dalys. 323 pieš., *b* parodyta, kaip iš tų dalių sudedamas lygiašonis trikampis.

Perbrėžkite šešiakampį ant storo popieriaus arba kartono ir padalykite jį į nurodytas dalis. Jūs galėsite pateikti draugams galvosūkį: iš duotųjų dalių sudaryti arba taisyklingą šešiakampį, arba taisyklingą trikampį.

Naudojantis sprendiniais-piešiniais, nesunku įrodyti, kad uždavinys išspręstas teisingai; tai tegul ir padaro norintieji įsigilinti į uždavinio esmę.

V skyriui

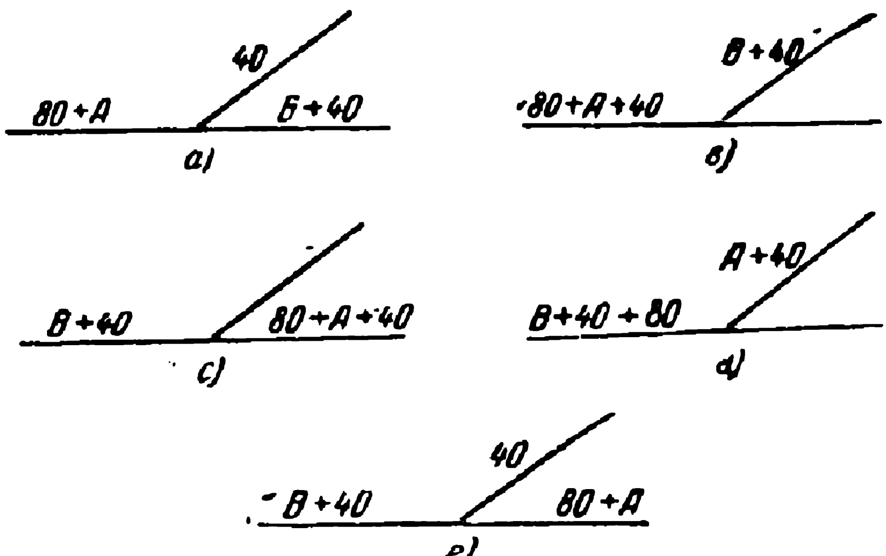
169. Sutinkamai su lokatorių ekranų parodymais, taikinys yra už 75 *km* nuo stoties *A* ir už 90 *km* nuo stoties *B*.

Paėmus skriestuvu iš mastelio, atvaizduoto 113 piešinio apačioje (žr. 118 psl.), dydžius, atitinkančius 75 ir 90 *km* atkarpas, reikia išbrėžti du lankus, vieną iš *A* spinduliu, atitinkančiu 75 *km*, kitą iš *B* spinduliu, atitinkančiu 90 *km* nuotolį.

Lankai susikerta taške 4, kur, vadinasi, ir yra susektas taikinys.

170. 1) Šeši piūviai; 2) 27 kubeliai; 3) nė vienas; 4) aštuoni; 5) dvylika; 6) šeši; 7) vienas.

171. Kad prasilenktų, traukiniai su garvežiais *A* ir *B* turi atlikti šiuos manevrus (jų schema atvaizduota 324 piešinyje):



324 pieš.

a) Garvežys *B* kartu su vagonais nuvažiuoja už iešmo į kairę, įveda į atšaką 40 vagonų, o su likusiais sugrįžta atgal.

b) Garvežys *A* išveda iš atšakos tuos 40 vagonų; išlaisvintą atšakoje vietą užima garvežys *B* su 40 vagonų.

c) Garvežys *A* su 40 vagonų priekyje ir 80 vagonų užpakalyje laisvu keliu pavažiuoja už iešmo į dešinę, o garvežys *B* su 40 vagonų pereina iš atšakos į pagrindinį kelią kairėje.

d) Garvežys *A* (kuris dabar yra dešinėje) kartu su visais 120 vagonų pavažiuoja už iešmo kairėn, palieka ten savo 80 vagonų, o į atšaką įveda 40 vagonų, priklausančių antrajam traukiniui.

e) Iš atšakos garvežys *A* grįžta prie savų vagonų, prisikabina juos ir vyksta savo keliu — į dešinę.

Garvežys *B* kartu su 40 vagonų privažiuoja prie atšakos, prikabina ten esančius likusius 40 vagonų ir sėkmingai važiuoja į kairę.

172. Uždavinio sprendimą, kurį rado mašinistas, galima pavaizduoti šia schema (325 pieš.), kurią aprašant, baltą ir raudoną vagonus atitinkamai žymėsime raidėmis «*b*» ir «*r*».

1) garvežys pervažiuoja į *BD* ir prikabina vagoną «*b*»,

2) kartu su vagonu «*b*» keliu *AB* pervažiuoja į *AD* ir prikabina vagoną «*r*»,

3) kartu su vagonais «*b*» ir «*r*» keliu *AB* pervažiuoja į *BD* ir prie *B* atkabina vagoną «*r*»,

4) ir 5) vagoną «*b*» užveda ant atsparinio kelio *CD*, jį ten atkabina ir prikabina vagoną «*r*»,

6) kartu su vagonu «*r*» keliu *AB* pervažiuoja į *AD*, prikabina vagoną «*b*» ir perveda jį iš atsparinio kelio *CD* į atšaką *AD*.

7) kartu su vagonais «*r*» ir «*b*» pervažiuoja į *AB* ir čia atkabina vagoną «*b*»,

8) su vagonu «*r*» pervažiuoja į *AD*, užveda vagoną «*r*» ant atsparinio kelio *CD* ir atkabina jį,

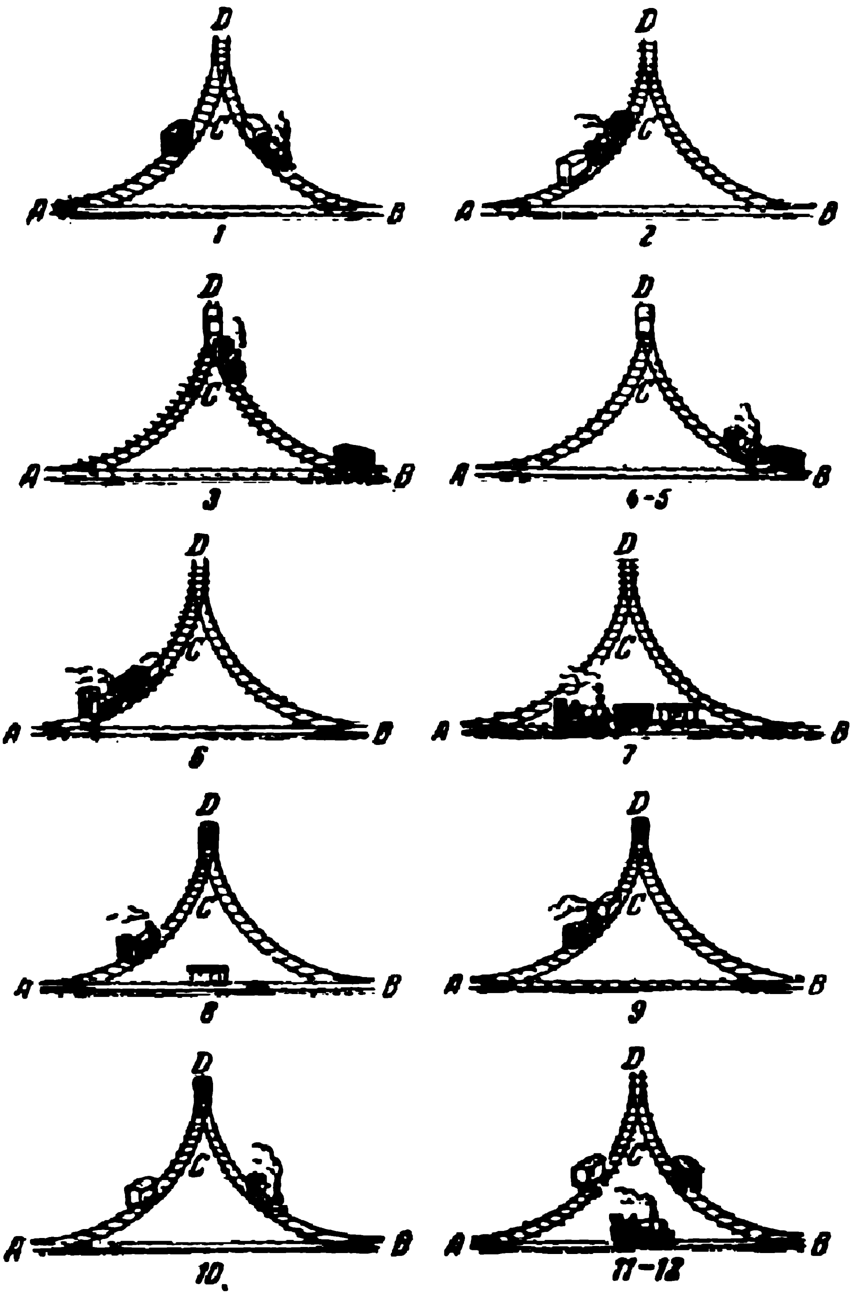
9) garvežys sugrįžta prie vagono «*b*», prikabina jį ir kartu su juo pervažiuoja į *AD*,

10) vagoną «*b*» atkabina ir vienas keliu *AB* pervažiuoja į *BD*,

11) ir 12) išveda vagoną «*r*» iš atsparinio kelio į *BD*, palieka jį ant *BD*, o pats sugrįžta į *AB*.

Mašinistas po «manevro» Nr. 2 galėjo vienu «manevru», o ne trimis (neatkabindamas vagono «*r*») pasiekti padėtį, atvaizduotą 325 piešinyje Nr. Nr. 4—5. Tai ir įgalintų uždavinį išspręsti tik 10 ėjimų, o ne 12. Mašinistas padarė dvi bereikalingas operacijas — vagono «*r*» atkabinimą (Nr. 3) ir vagono «*r*» prikabinimą (Nr. 5) — greičiausiai dėl to, kad nenorėjo tempti raudoną vagoną atšaka *BD* ten ir atgal.

173. P i r m a s p a s v ė r i m a s: išsvarstyti kruopas į 2 lygias dalis (be svarsčių) po 4,5 *kg*. A n t r a s p a s v ė r i m a s: vieną iš gautųjų dalių išsvarstyti dar kartą per pusę — po 2,25 *kg*. T r e č i a s



325 pieš.

pasvėrimas: iš vienos tų dalių atsverti (svarsčių pagalba) 250 *g*. Liks 2 *kg*.

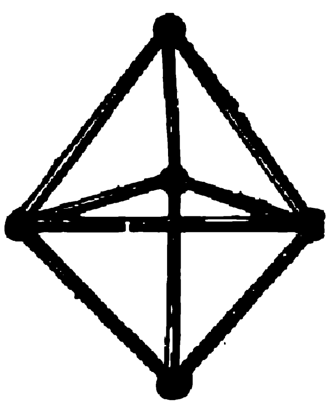
174. Esant tokiam sujungimui, koks parodytas 116 piešinyje (žr. 121 psl.), skriemulių judesys galimas. Čia skriemulys *B* suksis prieš laikrodžio rodyklę, skriemuliai *C* ir *D* — pagal laikrodžio rodyklę.

Jeigu visi 4 diržai būtų sukryžiuoti, tai skriemulių judesys taip pat būtų galimas, o jeigu tik kuris nors vienas ar bet kurie trys, tada — neįmanomas.

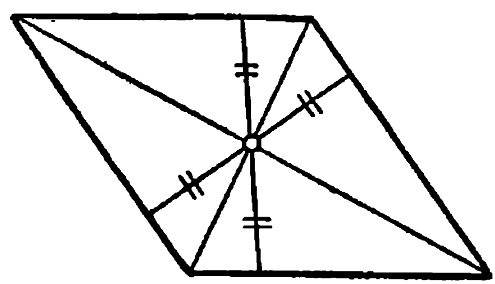
175. Vienoje plokštumoje, t. y. kai visi 7 trikampiai guli, sakysim, ant stalo, uždavinį išspręsti neįmanoma.

Reikia būtinai «išeiti į erdvę» ir sustatyti dvi piramides su bendru pagrindu (326 pieš.).

176. Vaikštinėkite po aikštę, šūkaukite ir klausykitės aido. Kol jūs nepateksite į rombo įstrižainių susikirtimo tašką, garsas nuo miško «sienų» atšoks įvairiu laiku ir jūs išgirsite trigubus ar keturgubus trumpus aidus (neskaitant silpnų, pakartotinų atgarsių).



326 pieš.



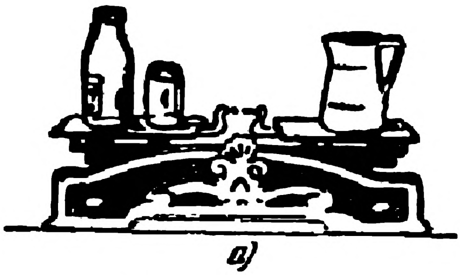
327 pieš.

Rombo įstrižainių susikirtimo taškas (centras) nuo visų keturių rombo kraštinių vienodai nutolęs (327 pieš.), todėl, būdami tame taške, jūs išgirsite tik vieną aidą.

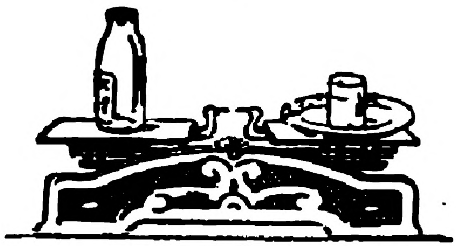
Taip veikia radiolokaciniai įrengimai; tik ten išsiunčiamos ne garso, o elektromagnetinės (radijo) bangos. Atšokusios nuo taikinio, jos grįžta į jas išsiuntusį aparatą, o tai ir užregistruojama specialiame ekrane (žr. taip pat 169 uždavinį).

177. Visas uždavinio sąlygas atkartokime 328 piešinyje (plg. su 122 psl. 118 pieš.). Pradėkime nuo 328 piešinio, *a*, kuriame parodyta, kad butelis su stikline atsveria ąsotį. Kairėje svarstyklių lėkštėje (328

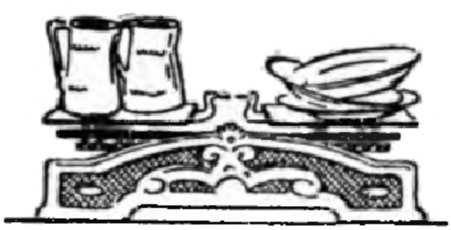
pieš., *b*) yra butelis, o dešinėje — lėkštė su stikline. Pridėję ant abiejų svarstyklių lėkščių po vieną stiklinę, mes nesutrikdysime pusiausvyros. Vadinasi, butelis ir stiklinė atsveria lėkštę ir 2 stiklines (329 pieš., *a*). Sulyginę kairiąsias svarstyklių lėkštes 328 ir 329 piešiniuose, *a*, mes nustatome, kad ąsotis sveria tiek pat, kiek lėkštė ir 2 stiklinės. Kadangi, antra vertus, 2 ąsočiai atsveria 3 lėkštes (328 pieš., *c*), tai 3 lėkštės sveria tiek pat, kiek 2 lėkštės ir 4 stiklinės (329 pieš., *b*).



a)

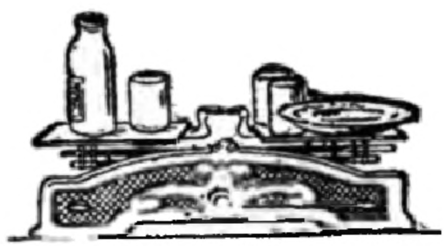


в)



c)

328 pieš.



a)

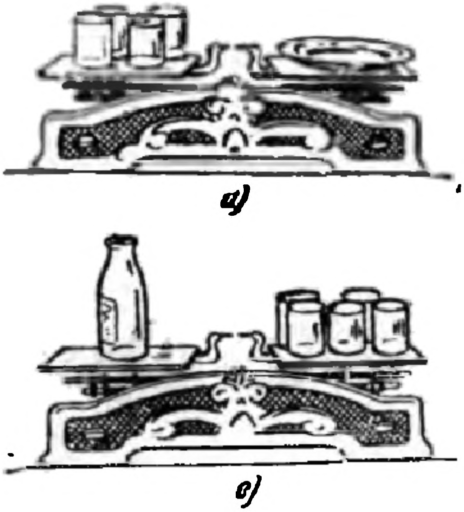


в)

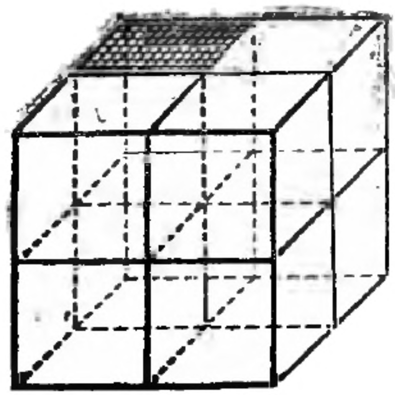
329 pieš.

Dabar nuimkime po 2 lėkštes nuo kiekvienos svarstyklių, atvaizduotų 329 piešinyje, *b*, lėkštės. Gausime, kad vienos lėkštės svoris lygus 4 stiklinių svoriui (330 pieš., *a*). Grįžkime prie svarstyklių, atvaizduotų 328 piešinyje, *b*. Vietoje vienos lėkštės pastatykime 4 stiklines. Gausime, kad 5 stiklinės atsveria butelį (330 pieš., *b*), o tai ir yra uždavinio atsakymas: butelis už stiklinę sunkesnis 5 kartus. Pakeliui paaiškėja, kad ąsotis 6 kartus sunkesnis už stiklinę.

178. Meistras kiekvieną kubelį supiaustė į 8 kubelius (331 pieš.). Kiekvieno kubelio sienų plotas pasidarė 4 kartus mažesnis, tačiau kubelių skaičius — 8 kartus didesnis, vadinasi, bendras visų kubelių išorinių paviršių plotas padidėjo dvigubai.



330 pieš.



331 pieš.

179. Mes pripylėme pilną stiklinį indą vandens. Vanduo užpildė visus tarpelius tarp šratų. Dabar vandens tūris kartu su švino tūriu sudarė stiklinio indo tūrį.

Išėmę iš indo šviną, mes nustatėme inde likusio vandens tūrį, o atėmę iš indo tūrio vandens tūrį, nustatėme švino tūrį.

180. Kaip matyti iš brėžinio (332 pieš.), seržantas atėjo į tą patį punktą, iš kurio išėjo.

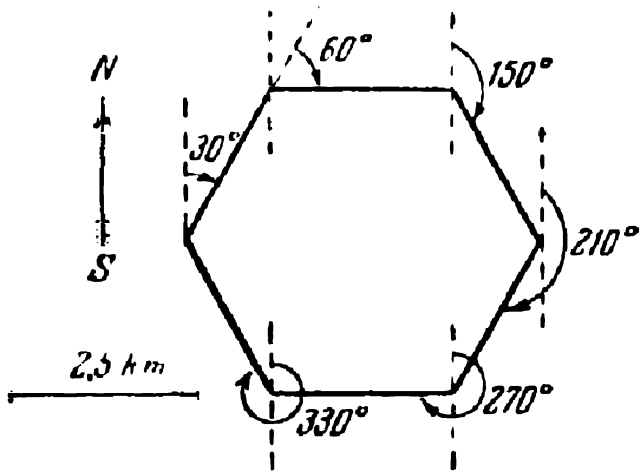
181. Betarpiškas (žr. 119 pieš.) nuotolio tarp vieno šakos piūvio ir kito tos pačios šakos piūvio išmatavimas parodo, kad jis sudaro apie $^2/_3$ viso faneros lapo pločio. Faneros lapo plotis 150 *cm*. Iš čia, nuotolis tarp šakų arba rąsto sluoksnio apskritimo ilgis yra 100 *cm*, o rąsto sluoksnio skersmuo d lygus $d \approx 100 : 3{,}14 \approx 32$ *cm*.

182. Nenuimant nuo detalės kroncirkelio, reikia ant vienos jo kojelės pieštuku atžymėti antros kojelės padėtį.

Po to, nuėmus kroncirkelį, galima pagal tą atžymą pastatyti jo kojelę į pradinę padėtį ir, pridėjus prie mastelinės liniuotės, nustatyti ieškomą dydį.

183. Jokiu išradimu negalima kuro ekonomiją padaryti lygią 100%, nes energija negali atsirasti «iš nieko». Jau vien tik ši aplinkybė parodo, kad pilietis neapgalvotai atliko ekonomijos apskaičiavimą.

Jei kiekvieno išradimo pritaikymas įgalina sutaupyti kažkurį kiekį kuro nepriklausomai nuo kitų išradimų pritaikymo, tai vienalaikis trijų



332 pieš.

išradimų pritaikymas duos didelę kuro ekonomiją, bet, suprantama, ne 100%.

Skaičiavimą atlikime taip. Tegul iki išradimo pritaikymo išeikvojama 100 *kg* kuro. Pritaikius išradimą, kuriuo sutaupoma 30% kuro. bus išeikvojama 70 *kg*.

Antruoju išradimu sutaupoma 45% nuo 70 *kg* kuro, tai yra kuro išlaidos sumažinamos iki $0{,}55 \cdot 70 = 38\frac{1}{2}$ *kg*. Tolesniuoju išradimu sutaupoma 25% nuo $38\frac{1}{2}$ *kg* kuro, tai yra kuro išlaidos sumažinamos iki $0{,}75 \cdot 38\frac{1}{2} = 28\frac{7}{8}$ *kg*. Bendra kuro ekonomija lygi $100 - 28\frac{7}{8} = 71\frac{1}{8}$ *kg*, o tai sudaro $71\frac{1}{8}$% ekonomijos.

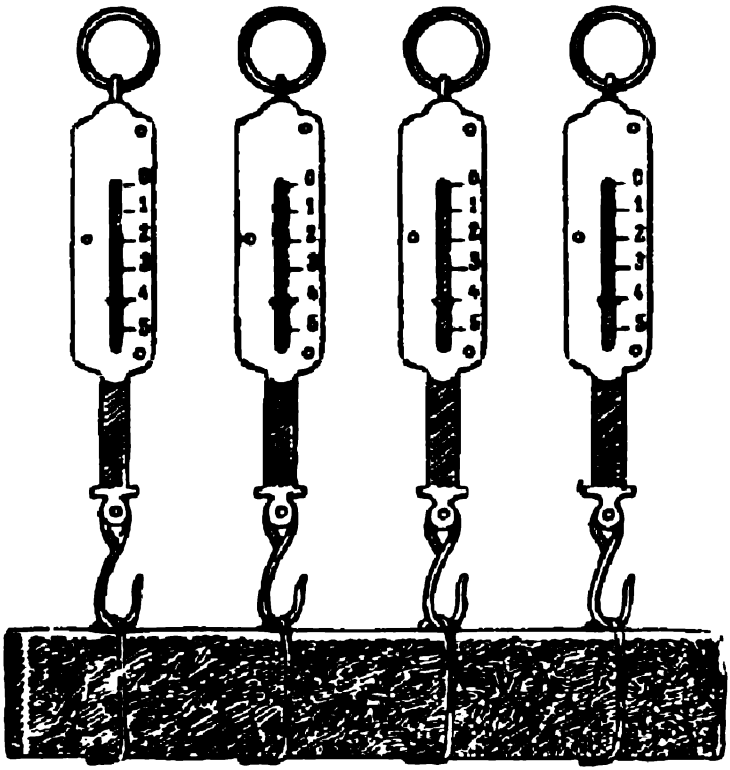
Galima pakeisti išradimų poveikio rezultatų apskaičiavimo tvarką; pavyzdžiui, iš pradžių atsižvelgti į poveikį išradimo, kuriuo sutaupoma 45% kuro, po to 30%, po to 25%, arba dar kitokia tvarka — galutinis rezultatas bus vienodas.

Įsitikinkite tuo.

Jeigu vieno išradimo poveikis kuro ekonomijai priklauso nuo kitų išradimų poveikio, tai praktiškai gali pasirodyti taip, kad visų trijų

išradimų pritaikymo efektas bus toks pat, kaip ir vieno didžiausio išradimo, tai yra duotuoju atveju 45%.

184. Reikia pakabinti krovinį ant keturių spyruoklinių svarstyklių vašelių (333 pieš.). Kiekvienas iš vašelių perims tam tikrą sijos svorio



333 pieš.

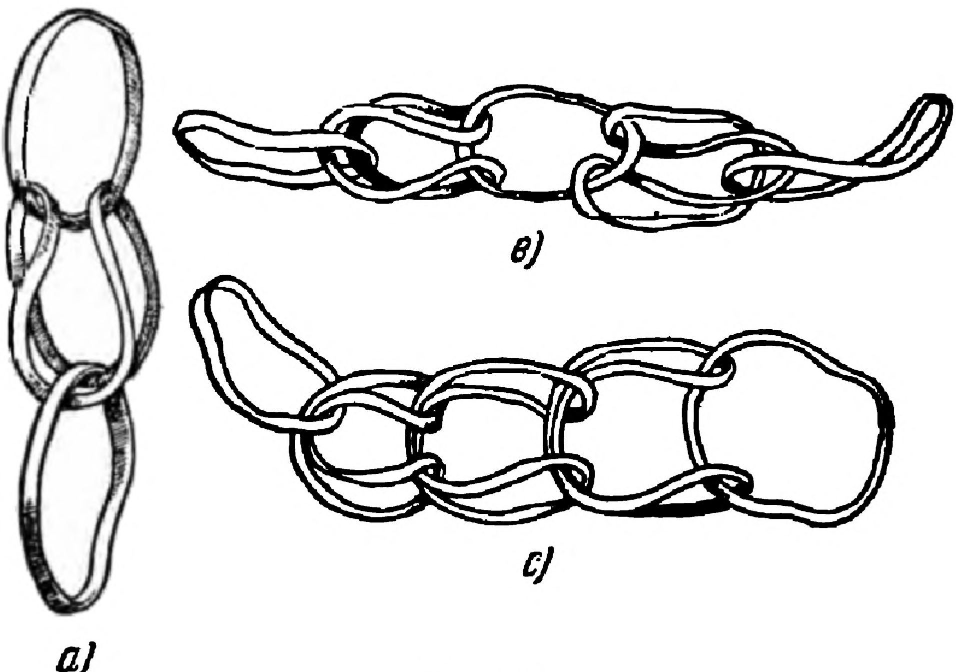
dalį. Visų svarstyklių parodymų suma bus sijos svoris. Piešinys parodo, kad sija sveria 16 *kg*.

185. 1, 2, 3 uždavinių sprendiniai atitinkamai duoti 334 piešinyje, *a, b, c*.

186. 1) Kubo piūvis plokštuma negali būti taisyklingas penkiakampis.

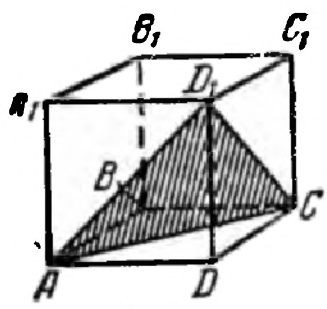
Ir tikrai: taisyklingam penkiakampiui gauti reikia, kad kertamoji plokštuma kirstų penkias iš šešių kubo sienų. Bet visos jo sienos poromis lygiagretės. Vadinasi, piūvyje turi būti figūra, turinti lygia-

gretes kraštines (kada dvi lygiagretės plokštumos kertamos trečiąja, tai piūvio linijos yra lygiagretės), o to taisyklingame penkiakampyje negali būti.



334 pieš.

2) Jei kubą kirstume plokštuma, einančia per tokias, pavyzdžiui, tris jo viršūnes: D_1, A ir C (335 pieš.), tai piūvis, suprantama, būtų taisyklingas trikampis AD_1C, nes jo kraštinės bus lygių kvadratų įstrižainės AD_1, AC ir D_1C. Taisyklingą trikampį galime gauti ne tiktai kirsdami plokštuma AD_1C, bet ir jai lygiagrete plokštuma A_1BC_1, o taip pat ir bet kuria plokštuma, lygiagrete nurodytoms plokštumoms, bet nesančia t a r p j ų.



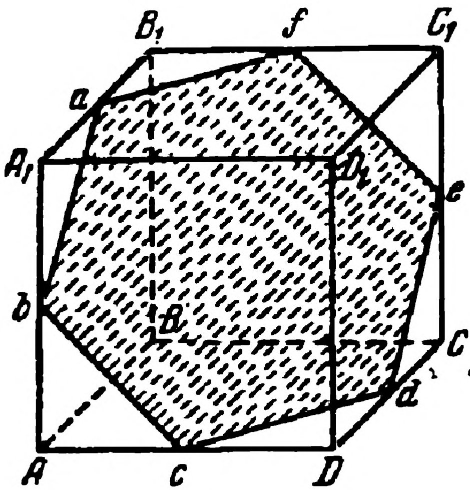
335 pieš.

Patys išsiaiškinkite, kokia bus gauta figūra, kai kubas bus kertamas plokštuma, lygiagrete piūviams AD_1C ir A_1BC_1 ir einančia t a r p t ų p l o k š t u m ų.

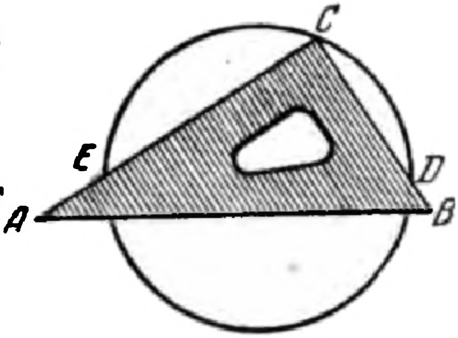
Kad piūvis būtų taisyklingas šešiakampis, reikia per briaunų A_1B_1, AA_1, AD, DC, CC_1, B_1C_1 vidurinius taškus a, b, c, d, e, f išvesti plokštumą

(336 pieš.). Panaudojant kitų briaunų vidurinius taškus, galima gauti ir daugiau taisyklingų šešiakampių (viso 4), tačiau visi jie bus lygūs.

3) Kertamoji plokštuma gali kirsti kiekvieną kubo sieną ne daugiau kaip vieną kartą, o iš viso kube sienų yra 6. Vadinasi, perkirtus kubą plokštuma, neįmanoma gauti daugiakampio su kraštinių skaičiumi, didesniu kaip 6.



336 pieš.



337 pieš.

187. Uždedame braižymo trikampį ant apskritimo taip, kad trikampio viršūnė C sutaptų su kuriuo nors apskritimo tašku, ir pažymime statinių susikirtimo su apskritimu taškus D ir E. Atkarpa DE bus skersmuo (337 pieš.).

Tą patį brėžimą pakartokime dar kartą. Gausime antrą skersmenį. Skersmenų susikirtimo taškas ir bus apskritimo centras.

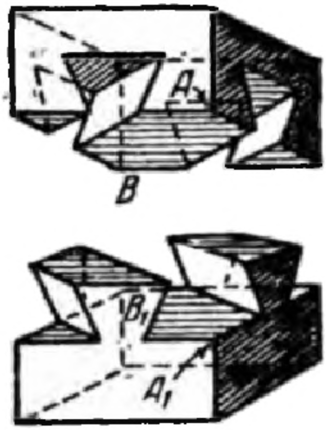
188. Kad būtų konkrečiau, sakykime, kad abi dėžės turi kubo formą, o jų briaunos — lygios pagal sąlygą. Tada vienoje dėžėje į eilę bus sukraunami trys rutuliai, o antroje — 4. Vadinasi, didesniojo rutulio skersmuo didesnis už mažesniojo rutulio skersmenį $4/3$ karto, o tūris ir svoris didesni $64/27$ karto (nes rutulio tūris, o taip pat ir svoris proporcingas jo skersmens kubui).

Tuo būdu, kiekvienas didesnysis rutulys turi būti sunkesnis už mažesnįjį rutulį $64/27$ karto, bet užtat didesniųjų rutulių tokioje dėžėje $64/27$ karto mažiau, kaip mažųjų rutulių.

Iš čia ir gauname, kad abi dėžės sveria tiek pat.

189. Kubo dalys buvo figūros, atvaizduotos 338 piešinyje. Sujungtame pavidale jų statūs kampai A ir A_1, o taip pat B ir B_1 sutampa.

Kubo dalys išsiskirdavo tik judėdamos iš kampo į kampą pagal liniją AB.

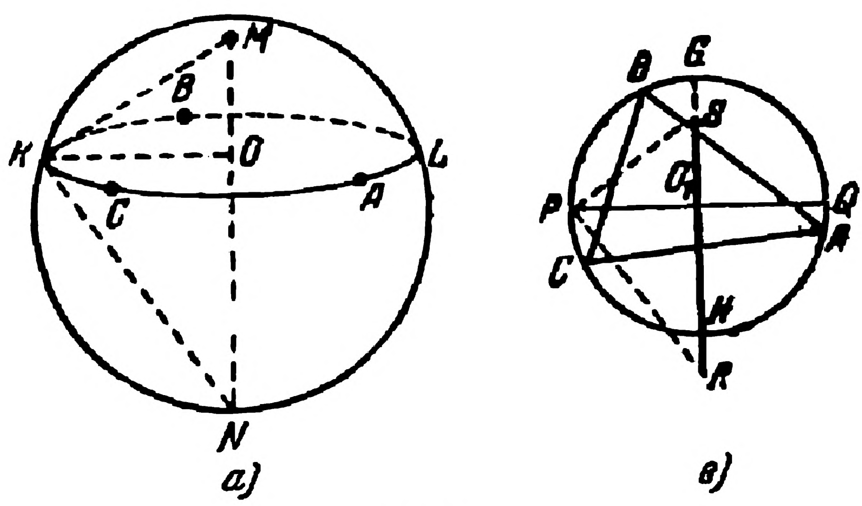


338 pieš.

190. Pastatę skriestuvo kojelę ant rutulio bet kurio taško M, laisvai parinktu spinduliu ant jo paviršiaus nubrėžiame apskritimą, kuriame paimame 3 bet kuriuos taškus A, B ir C (339 pieš., *a*). Tarp jų nuotolius išmatuojame skriestuvu ir atidedame juos ant popieriaus, sudarydami trikampį ABC (339 pieš., *b*).

Toliau, aplink trikampį ABC apibrėžiame apskritimą ir nubrėžiame du vienas kitam statmenus skersmenis PQ ir GH. Šis apskritimas yra lygus apskritimui, kurį mes nubrėžėme ant rutulio, vadinasi, $PQ=KL$.

Tegul šio apskritimo taškas P atitinka rutulio paviršiaus tašką K. Skriestuvu išmatuojame nuotolį KM ir iš taško P spinduliu KM

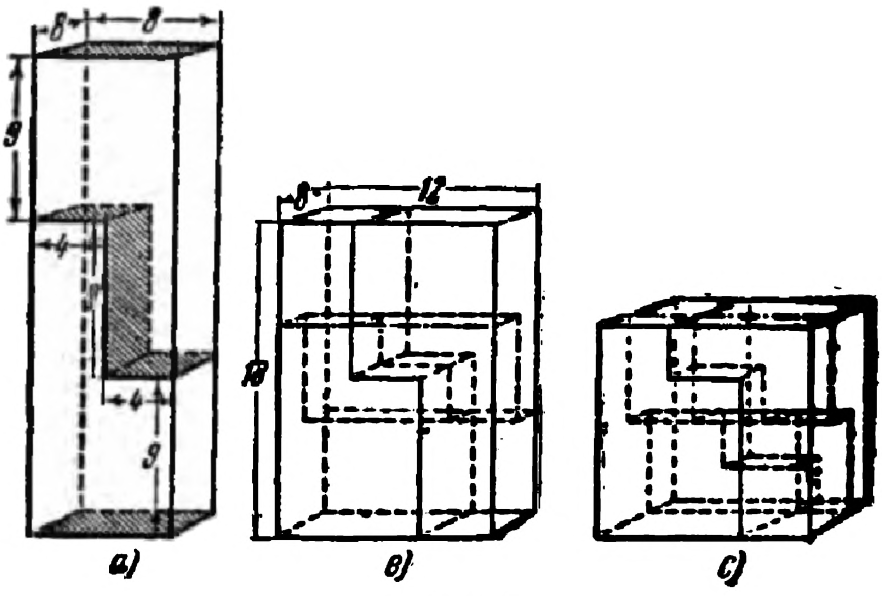


339 pieš.

ant tiesės GH pažymime tašką S. Brėžiame $PR \perp PS$ iki susikirtimo su GH tęsiniu taške R. Atkarpa SR ir bus lygi rutulio skersmeniui.

Ir tikrai, jei sujungtume atkarpomis tašką K su skersmens MN galais, tai susidaręs statusis trikampis MKN bus lygus stačiajam trikampiui SPR, nes jų $KM=PS$ ir $KO=PO_1$.

191. Perpiauname sijelę (gretasienį) į du lygius laiptuotus kūnus, kaip parodyta 340 piešinyje, *a*; be to, laiptuko aukštį padarome lygų 9 *cm*, o plotį — 4 *cm*



340 pieš.

Nukėlę viršutinę sijelės dalį laiptuku žemiau, mes sudarome naują sijelę (gretasienį) su briaunomis 12 *cm*, 8 *cm* ir 18 *cm* (340 pieš., *b*).

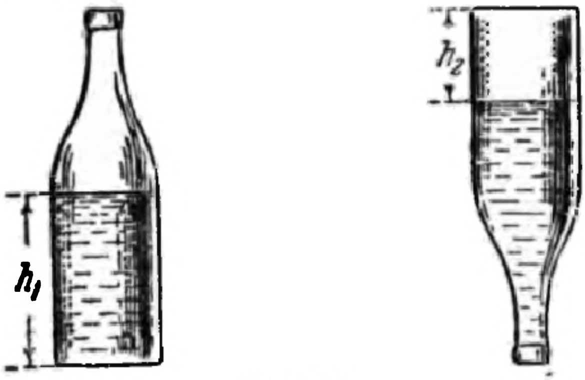
Gautą sijelę (gretasienį) vėl tokiu pačiu būdu perpiauname į 2 laiptuotus kūnus, bet dabar jau kryptimi, statmena pirmesnei. Laiptuko aukštį darome 6 *cm*, plotį — 4 *cm*. Tuo būdu, kiekvienas laiptuotas kūnas bus padalytas dar į 2 laiptuotus kūnus, o iš viso jų bus 4.

. Nukėlę dvi viršutines sijelės dalis vienu laiptuku žemyn, mes sudarysime kubą (340 pieš., *c*).

192. Kadangi butelio dugnas, pagal sąlygą, turi skritulio arba kvadrato, arba stačiakampio pavidalą, tai jo plotas lengvai nustatomas mastelinės liniuotės pagalba. Dugno plotą pažymėkime s.

Išmatuojame butelyje skysčio aukštį h_1. Tada tos butelio dalies, kurią užima skystis, tūris bus lygus sh_1 (341 pieš.).

Apverčiame butelį dugnu į viršų ir išmatuojame jo dalies nuo skysčio paviršiaus iki butelio dugno aukštį h_2. Šios butelio dalies tūris bus lygus sh_2. Likusią butelio dalį užima skystis, kurio tūris jau nustatytas — jis lygus sh_1.

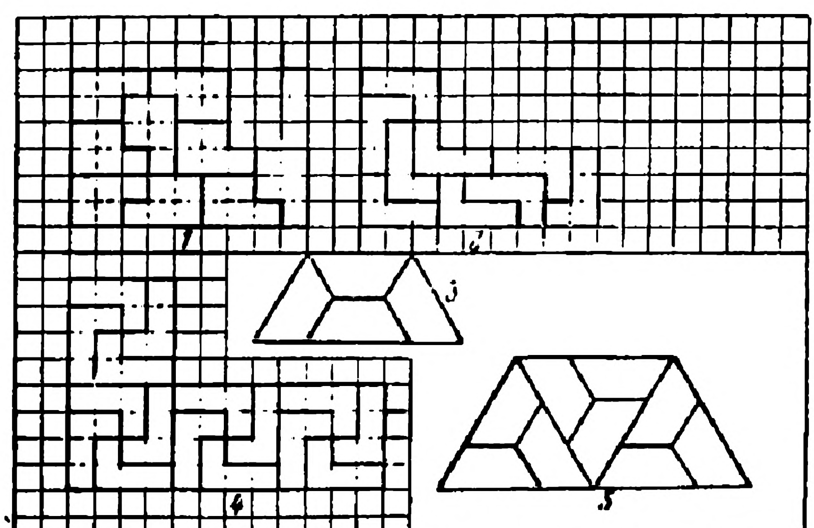


341 pieš.

Iš čia seka, kad viso butelio tūris lygus

$$sh_1+sh_2=s(h_1+h_2).$$

193. Sprendinį žr. 342 piešinyje.

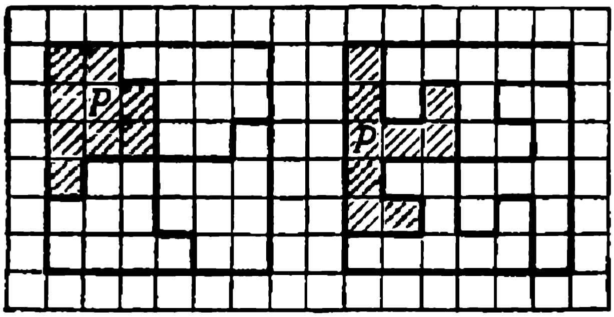


342 pieš.

194. 1) 36.

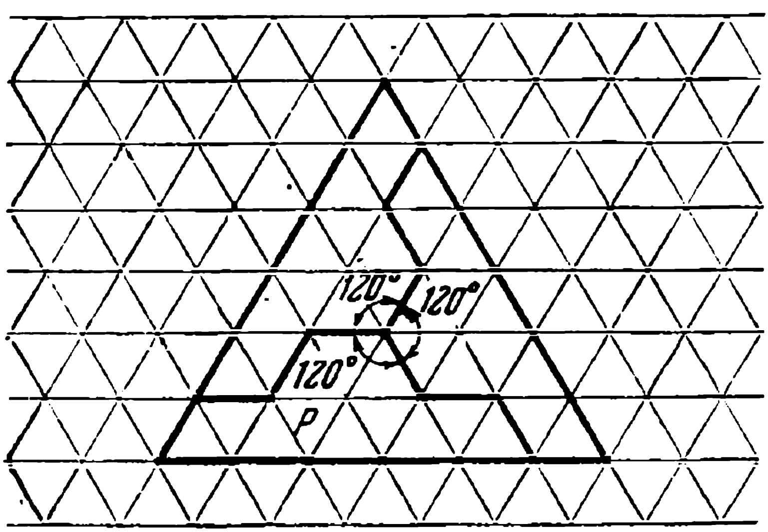
2) Keletas pavyzdžių duota 343 ir 344 piešiniuose.

Norint gauti pirminius daugiakampius P iš stačiakampio, reikia nubrėžti stačiakampį, turintį lyginį skaičių ($ab=2n$) vienetinių kvadratų, ir iš to stačiakampio centro reikia nubrėžti dvi vienodos konfi-



343 pieš.

gūracijos laužtines linijas su 180° kampu tarp jų (345 pieš.). Kartu šios laužtinės sudaro vieną laužtinę liniją, simetrišką stačiakampio

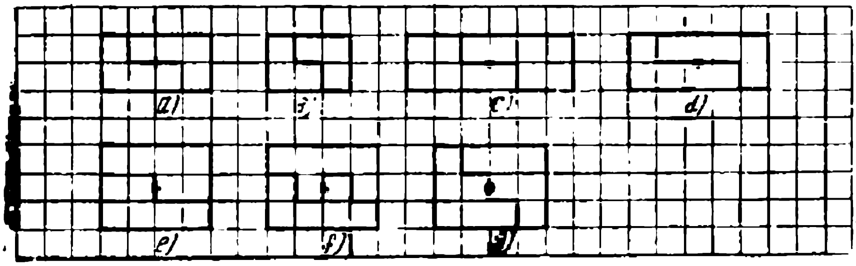


344 pieš.

centro atžvilgiu. Ši linija perkirs stačiakampį į 2 figuras P, kurių kiekviena turės $\frac{ab}{2}=n$ vienetinių kvadratų.

Toliau, iš lygių stačiakampių lengva sudaryti didelį kvadratą, o iš didelių kvadratų — figūrą P'.

Jei a — vienetinių kvadratų, telpančių stačiakampyje išilgai vienos kraštinės, skaičius, o b — vienetinių kvadratų skaičius išilgai antros jo kraštinės, tai, aišku, kvadratui sudaryti iš tokių stačiakampių bū-



345 pieš.

tina ir pakankama paimti jų $\frac{ab}{m^2}$ vienetų, kur m — didžiausias bendras skaičių a ir b daliklis.

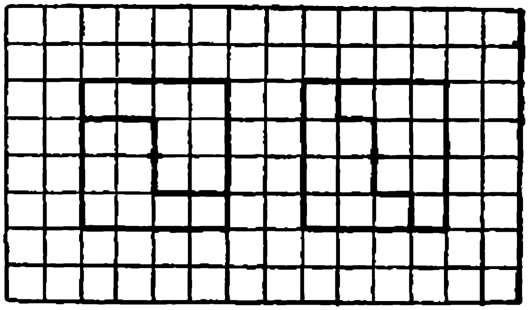
Kiekviename kvadrate bus $\frac{2ab}{m^2}$ figūrų P, o visai figūrai P' bus sunaudota $\frac{2abn}{m^2}$ figūrų P arba, kadangi $2n=ab$, tai P' sudaryti bus sunaudota $\frac{a^2\,b^2}{m^2}$ figūrų P.

Taip, pavyzdžiui, daugiakampiui P', panašiam į atitinkamą daugiakampį P, sudaryti reikia:

16	figūrų P,	pateiktų	345	piešinyje,	a
36	„	P, „	345	„	b ir c
100	„	P, „	345	„	d
144	„	P, „	345	„	e, f, g

Viena ar kita iš figūrų P', matyti, gali būti sudaryta ir iš mažesnio figūrų P skaičiaus, bet šiuo kartu tas klausimas mūsų nedomino. Papildomos pramogos dėlei jūs galite tai išsiaiškinti mėginimų keliu.

Galima ir kvadratą padalyti į figūras *P* ne keturiomis laužtinėmis linijomis, kaip mes darėme, o taip pat, kaip ir stačiakampį, viena linija — simetriška centro atžvilgiu. Atitinkamos iliustracijos pateiktos 346 piešinyje.



346 pieš.

195. Kadangi devyniakampio ir dešimčiakampio vidaus kampai yra atitinkamai 140° ir 144°, tai, šarnyrinio mechanizmo pagalba išbrėžę juos viename brėžinyje prie bendros viršūnės *A*, mes gausime 4° kampą. Du kartus šiam kampui pritaikę dalijimo pusiau procedūrą, mes gausime 1° kampą.

VI skyriui

196. Kadangi dvidešimt aštuoniose domino plytelėse kiekvienas skaitmuo nuo 0 iki 6 pasikartoja 8 kartus (sveiką porų skaičių), o plytelės suporuojamos suglaudžiant kvadratais, turinčiais vienodą akių skaičių, tai domino plytelių grandinėlė, pradėta kvadratu su 5 akimis, turi baigtis poriniu jam kvadratu, tai yra taip pat tik su 5 akimis.

197. P i r m a s p o k š t a s. Iš pirmesniojo uždavinio sprendimo seka, kad visos 28 domino plytelės, prisilaikant lošimo taisyklių, gali būti išdėliotos ratu ir jei iš to rato būtų atimta, pavyzdžiui, plytelė 3-5, tai aišku, kad likusių 27 plytelių išdėliojimo grandinėlė viename gale prasidės p e n k i o m i s, o kitame — t r i m i s akimis.

A n t r a s p o k š t a s. Kodėl taip — nesunku išsiaiškinti. Trylikos domino plytelių, jūsų išdėliotų iš kairės į dešinę, akių skaičius sudaro

seką 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Toliau į dešinę bet kuria tvarka išdėliotos 12 plytelių, kurių dalis (pagal sąlygą ne daugiau kaip 12) buvo perkelta iš dešinės į kairę už plytelės 6-6. Iki plytelių perkėlimo vidurinę vietą užima «tuščia» plytelė («blanšas»), tai yra 0-0.

Dabar sakykim, kad, jums nesant, iš dešiniojo galo į kairįjį buvo perkelta viena domino plytelė. Kuri dabar plytelė bus viduryje? Aišku, kad 0-1. Vienetas ir praneša jums, kad perkelta viena plytelė. O jeigu jūsų draugai perkėlė 2 plyteles, tai eilės viduryje atsiras plytelė su dviem akimis, ir t. t.

Žodžiu, vidurinioji plytelė būtinai ir tiksliai jums nusakys perkeltų plytelių skaičių.

198. Liko nepanaudotos plytelės 0-2, 1-2, 2-5, 6-2. Išdėliotos buvo 2-4, 3-4, 3-2, 2-2.

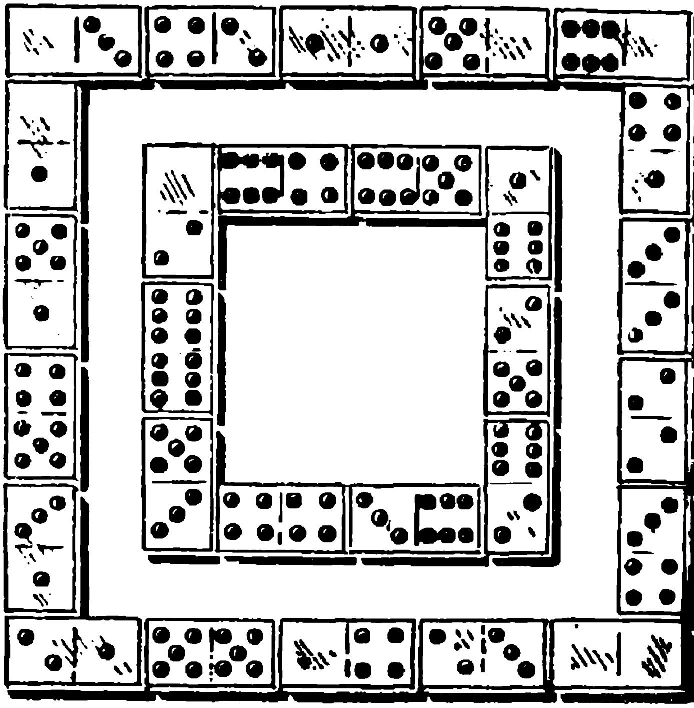
Tarp lošėjų *B*, *C* ir *D* galimas šis plytelių pasiskirstymas: pas *C*: 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 ir 3-4; pas *B*: 0-1, 0-3, 0-6, 0-5, 3-6, 3-5; pas *D*: 6-6, 5-5, 6-5, 6-4, 5-4, 6-1.

199. Viršutinė kraštinė (iš kairės dešinėn): 4-3, 3-3, 3-1, 1-1, 1-4, 4-6, 6-0. Dešinioji šoninė kraštinė (iš viršaus žemyn): 0-2, 2-4, 4-4, 4-5, 5-5, 5-1, 1-2. Apatinė kraštinė (iš dešinės kairėn): 2-3, 3-5, 5-0, 0-3, 3-6, 6-2, 2-2. Kairioji šoninė kraštinė (iš apačios viršun): 2-5, 5-6, 6-6, 6-1, 1-0, 0-0, 0-4.

200. Galimi įvairūs sprendiniai. Jei kampų viršūnėse jūs patalpinsite po tuščią kvadratą (0 akių), tai galėsite sudaryti tokį «rėmelį rėmelyje», kurio kiekviena iš aštuonių kraštinių turės po 21 akį.

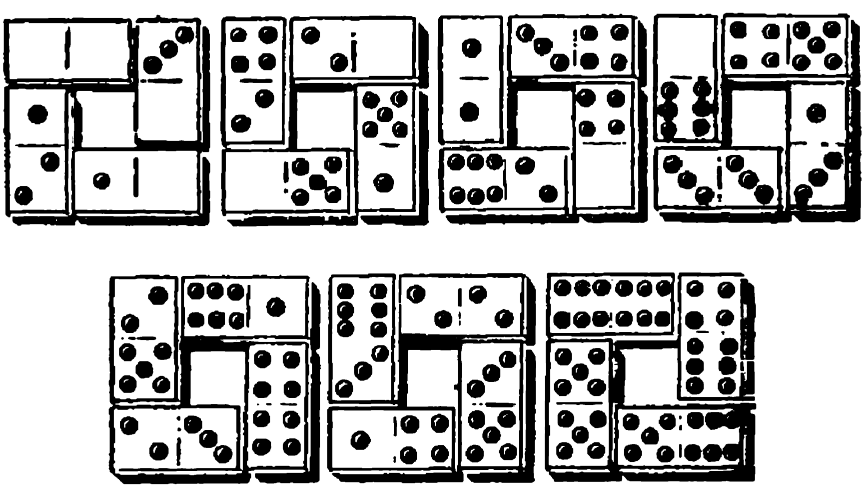
Jei akių suma aštuoniose «rėmelio rėmelyje» viršūnėse bus lygi 8, kaip 347 piešinyje, tai akių suma išilgai kiekvienos tos figūros kraštinės sudarys 22 akis. Kiekviena figūros kraštinė turės po 23 akis, jei visose figūros viršūnėse akių suma bus lygi 16; po 24 akis atitinkamai, jei suma bus lygi 24 akims; po 25 akis, jei suma bus lygi 32 akims; po 26 akis, jei suma bus lygi 40 akių.

Sudaryti «rėmelį rėmelyje» taip, kad kiekvienoje kraštinėje akių suma būtų lygi 27, neįmanoma, nes šiuo atveju 8 viršūnėse turėtų būti 48 akys, o iš tikrųjų daugiau kaip 47 akys negali būti: jei mes 7 kampų viršūnėse patalpintume netgi visas 7 šešiukes, tai aštuntoje viršūnėje tektų patalpinti penkiukę, ir tada gautume $6\times7+5=47$ akis.



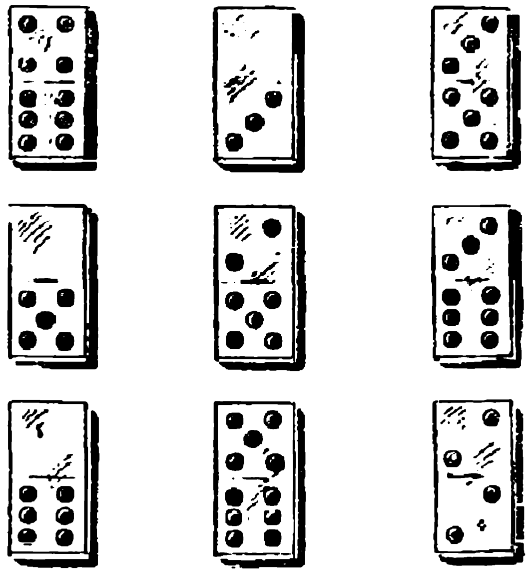
347 pieš.

201. Sprendinys parodytas 348 piešinyje.



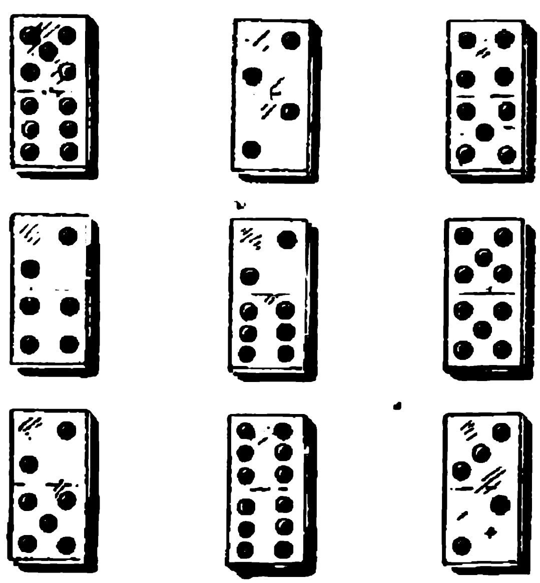
348 pieš.

202. 1) Sprendinys parodytas 349 piešinyje.



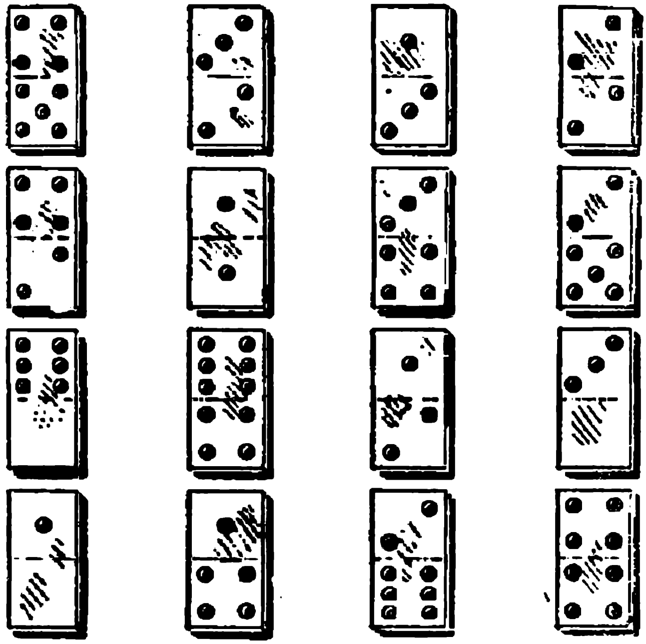
349 pieš.

2) Sprendinys parodytas 350 piešinyje. Kvadrato konstanta 24.



350 pieš.

3) Vienas iš galimų sprendinių parodytas 351 piešinyje.



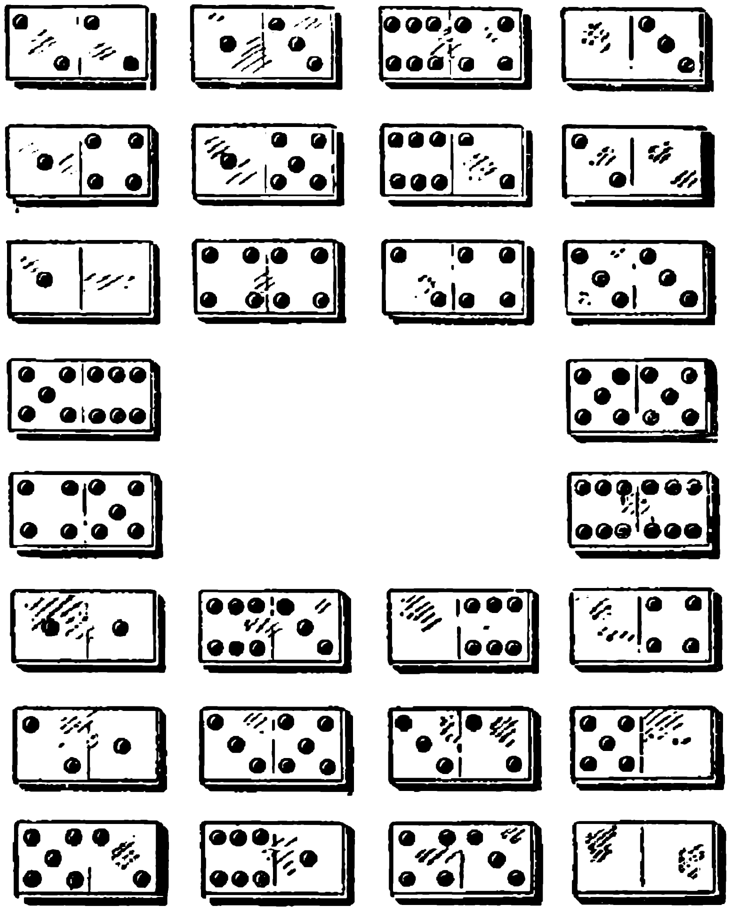
351 pieš.

4) Sprendinys pateiktas šia schema:

5-3	0-3	0-6	2-2	1-5
1-1	3-2	1-6	4-5	0-4
6-2	4-6	0-0	1-2	2-4
0-1	1-3	2-5	3-6	3-3
4-4	1-4	3-4	0-2	0-5

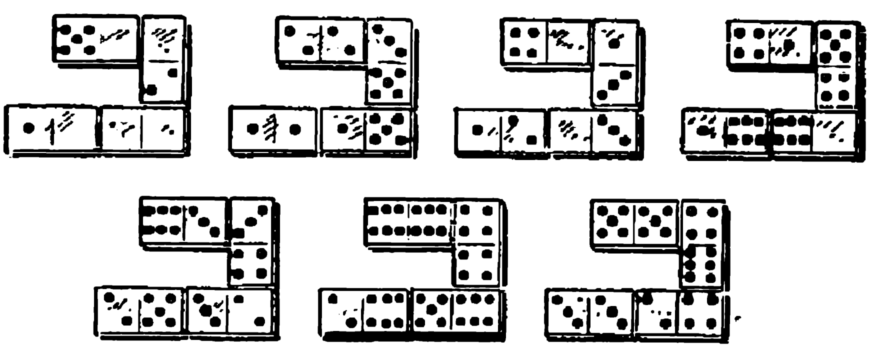
Šiame kvadrate perkeldami stulpelius ar eilutes, mes vėl gausime magiškus kvadratus, panašiai, kaip gaudavome juos iš kvadrato su 16 plytelių (žr. 149 psl.).

203. Sprendinys parodytas 352 piešinyje.



352 pieš.

204. Sprendinys parodytas 353 piešinyje.

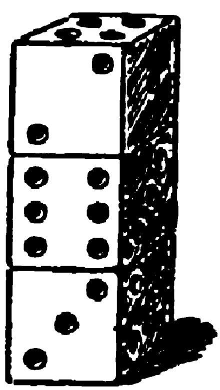


353 pieš.

205. Tegul pasirinkta plytelė bus x-y. Atlikime sąlygose nurodytus veiksmus (žr. 151 psl.): 1) $2x$ arba $2y$; 2) $2x+m$ arba $2y+m$; 3) $(2x+m)5=10x+5m$ arba $(2y+m)5=10y+5m$; 4) $10x+5m+y$ arba $10y+5m+x$. Atimame $5m$, lieka $10x+y$ arba $10y+x$ — dviženklis skaičius; šio dviženklio skaičiaus dešimčių ir vienetų skaitmenys sutampa su skaitmenimis x ir y, nurodančiais pasirinktos plytelės akių skaičių.

206. Iš sąlygos seka, kad «atspėjamoji» akių suma susideda iš visų kauliukų (jų paskutiniojoje padėtyje) viršutinių sienelių akių skaičiaus ir vieno kauliuko kurios nors priešingų sienelių poros akių sumos, o pastaroji, kaip yra žinoma, lygi 7.

207. a) Paslėptos sumos nustatymas pagal pastebėtą stulpelio viršutinės sienelės akių skaičių. Paslėptų tarp sienelių, kuriomis kauliukai susiglaudžia, ir dar vienos — pačios apatinės — akių suma lygi 21 be taškų, esančių ant stulpelio viršutinės sienelės (354 pieš.), skaičiaus.



354 pieš.

Ir tikrai, jei būtų susumuotos akys, atitinkančios visas trijų kauliukų susiglaudžiančias sieneles, vieną — pačią apatinę ir vieną — pačią viršutinę, tai yra akys, atitinkančios kauliukų tris tarpusavy priešingų sienelių poras, tai tokia suma būtų lygi 21 ($3\times7=21$). Tačiau sumoje, kuri yra uždavinio sąlygojama, nėra skaičiaus akių, atitinkančių viršutinę sienelę. Tą skaičių atėmę iš 21, gausime ieškomąją sumą.

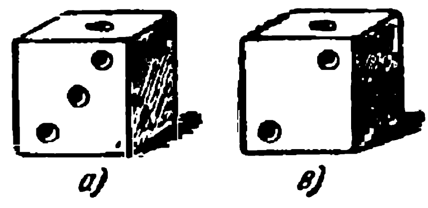
b) Paslėptos sumos nustatymas pagal dvi pastebėtas stulpelio šonines sieneles. Net prisilaikant «septynių principo», galimi 2 taškų išdėliojimo ant lošiamojo kauliuko sienelių būdai. Vienas išdėliojimo būdas — veidrodinis antrojo atvaizdas. Padėkite ant stalo kauliuką vienetu į viršų. Tada 2 taškai išsidėstys ant vienos šoninės sienelės, o 3 taškai — ant kaimyninės sienelės, į kairę ar į dešinę nuo jos. Kitaip tariant, žiūrint iš viršaus, trys akys eina po dviejų arba pagal laikrodžio rodyklę (355 pieš., *a*), arba prieš laikrodžio rodyklę (355 pieš., *b*).

Nustačius vieno, dviejų ir trijų taškų eilės tvarką, keturių, penkių ir šešių taškų išdėstymas ant kitų kubelio sienelių nustatomas vienareikšmiai pagal «septynių principą».

Iš anksto žinant reliatyvų taškų išsidėstymą ant kauliuko sienelių ir atmenant «septynių principą», pakanka pažvelgti į bet kurias gretimas kauliuko šonines sieneles, kad galima būtų nustatyti viršuti-

nės, o po to ir apatinės sienelių akių skaičių. Pavyzdžiui, ant apatinio 354 piešinyje kauliuko mes matome ant vienos šoninės sienelės 3 taškus, o ant gretimos iš dešinės — 5. Vadinasi, ant gretimos iš kairės turi būti 2 taškai, taigi iš viršaus 1, iš apačios 6 (jeigu kauliukas *b* tipo). Artimesnioji vidurinio kauliuko sienelė turi 6 akis, vadinasi, tolimoji — 1, iš dešinės — 3, vadinasi, iš viršaus — 2, o iš apačios — 5.

Žinoma, norint tiksliai atspėti paslėptų kauliuko sienelių taškų skaičių nurodytu metodu, yra reikalingas didelis pastabumas ir paruošiamoji praktika.



355 pieš.

208. Kadangi kiekvieno lošiamojo kauliuko viršutinės ir apatinės sienelių akių suma visada lygi 7, tai iš eilės prirašyti trys skaitmenys papildys pradžioje parašyto triženklio skaičiaus kiekvieną skaitmenį iki 7. Jeigu pradžioje parašytą triženklį skaičių išreikštume raide A, tai prirašytas triženklis skaičius bus $777-A$, o visas šešiaženklis skaičius: $1\,000A+(777-A)$ arba $999A+777=111\cdot(9A+7)$. Kaip matyti, jis dalijasi iš 111; gaunama $9A+7$. Šį skaičių ir paskelbia. Iš jo atėmę 7 ir padalįję iš 9, gauname pradinį skaičių A.

VII skyriui

209. 1) Skaičių dalijant iš 9, liekana gaunama ta pati, kaip ir jo skaitmenų sumą dalijant iš 9 (2 savybė, 157 psl.). Jeigu skaitmenų suma sumažinta dydžiu, išreikštu užbrauktuoju skaitmeniu, tai ir liekana sumažės tuo pačiu dydžiu. Taip pat aišku, kad liekanos dydis nepasikeis, jeigu užbrauktas skaitmuo 9 arba 0.

2) Pagal 1(b) savybę (157 psl.) pasirinktų skaičių skirtumas visada dalijasi iš devynių, vadinasi, skirtumo skaitmenų suma dali devyniems, ir jei mums praneštas skaičius nesidalija iš devynių, tai tik dėl užbraukto skaitmens, kuris, aišku, ir nustatomas pasakytojo skaičiaus papildiniu iki artimiausiojo skaičiaus, dalaus 9. Jeigu pats pasakytasis skaičius dalus devyniems, tai tas reiškia, kad užbrauktas skaitmuo 9.

Uždavinio variantas, nurodytas pastaboje, pagrįstas savybe 1(a) (157 psl.).

3) Reikia suskaičiuoti gauto skirtumo skaitmenų sumą $(6+9+8=23)$.

Šios sumos papildinys iki artimiausio skaičiaus, dalaus devyniems, nusako užbrauktą skaitmenį.

Mūsų pavyzdyje: 27—23=4; užbrauktas skaitmuo 4.

Taisyklė seka iš devyniukės savybių.

4) Prie kiekvieno jūsų parašyto skaičiaus aš prirašau tokį, kurio skaitmenys papildo jūsų skaičiaus skaitmenis iki devynių, tada suma turi būti dali devyniems ir ji liks dali devyniems, jeigu jūs užbrauksite 9, bet jei jūs užbrauksite kitą skaitmenį, ne 9, tai gautosios sumos skaitmenų sumai kaip tik to skaitmens ir truks iki artimiausio skaičiaus, dalaus 9.

5) Prirašomas skaičius, kurio kiekvienas skaitmuo papildo atitinkamo stulpelio skaitmenų sumą iki devynių arba iki skaičiaus, dalaus devyniems. Ieškomas skaitmuo randamas pagal bendrą taisyklę.

6) Iš pradžių reikia prirašyti stulpelį skaičių, papildančių kiekvienos eilutės skaičių sumą iki dalaus devyniems skaičiaus, sudėti prirašytus skaičius (devyniukes čia galima atmesti) ir vietoje viso tų skaičių stulpelio prirašyti tiktai jų sumos dalybos iš devynių liekaną.

Mūsų pavyzdyje prirašytų skaičių (be devyniukių) suma lygi 6+4+4+5=19. Dalybos 19 iš 9 liekana lygi 1. Vadinasi, vietoje skaičių 6, 4, 4, 5 ir 9 stulpelio būtų užtekę prirašyti vieną skaičių 1.

210. Jūs pasiūlėte, pavyzdžiui, iš 1 313 atimti 48. Gauta 1 265. Prirašė 148 ir užbraukė, sakysim, skaitmenį 6. Liko 125 148. Dabar likusius skaitmenis reikia sudėti: 1+2+5+1+4+8=21. Iki artimiausio skaičiaus, dalaus devyniems, trūksta šešių (27—21=6), vadinasi, užbrauktas skaitmuo yra 6.

Kodėl būtent taip — nesunku suprasti. Mes žinome, kad, atimant skaičius, atimami pertekliai, o sudedant — sudedami (žr. savybę 3(a) 158 psl.).

Čia mes prirašome tą patį skaičių, kurį atimame, padidintą 100, vadinasi, rezultato perteklius vienetu didesnis už išeities skaičiaus — 1 313 — perteklių; kadangi šio skaičiaus skaitmenų suma lygi 1+3+ +1+3=8 ir perteklius taip pat lygus 8, tai galutinai gaunamas skaičius (iki skaitmens išbraukimo) visada bus dalus devyniems, ir nustatyti išbrauktą jo skaitmenį galima, papildant jo skaitmenų sumą iki artimiausio skaičiaus, dalaus devyniems.

Suprantama, kad išeities skaičiumi galima paimti bet kurį kitą skaičių, kurio skaitmenų suma yra lygi 8 arba turi perteklių, lygų 8.

Kad būtų įvairiau, prie skirtumo, apie kurį kalbama uždavinyje, galima pasiūlyti betarpiškai prirašyti tą skaičių, kuris buvo atimtas (be pradinio padidinimo 100), tačiau tokiu atveju, ieškant užbrauktojo skaitmens, prie likusiųjų skaitmenų sumos reikia pridėti 1, jei

išeities skaičiaus perteklius buvo 8, o po to jau papildyti iki skaičiaus, dalaus devyniems. (Aplamai, prie skaitmenų sumos reikia pridėti skaičiaus 9 ir išeities skaičiaus pertekliaus skirtumą.)

211. 1) Į pradžioje atrinktus skaitmenis neįėjo skaitmuo 5. Reikia apskaičiuoti skaitmenų, atsiradusių prie «rezultatų tiesės», sumą ir atimti ją iš artimiausio šiai sumai skaičiaus, dalaus 9. Gautasis skirtumas ir nurodys ieškomą skaitmenį.

Mat, kol skaitmenų 1, ..., 9 komplektas pilnas, jų suma dali devyniems. Iš tikrųjų, suma (1+8)+(2+7)+(3+6)+(4+5), kaip matyti, dalijasi iš devynių. Skaičiai prie «rezultatų tiesės» atsirado sudėjus šio komplekto skaitmenis. Jeigu būtų buvę sudėti visi duotieji skaitmenys, tai skaitmenų prie «rezultatų tiesės» suma arba šių skaičių skaitmenų suma taip pat būtų buvusi dali devyniems; kadangi vienas komplekto skaitmuo nebuvo pridėtas, tai skaitmenų prie «rezultatų tiesės» sumoje kaip tik ir trūks jo iki skaičiaus, dalaus 9. Skyrium imant, prie 154 piešinio «rezultatų tiesės» (160 psl.) skaitmenų suma lygi 1+4+1+4+1+2=13. Iki 18 trūksta penkių, vadinasi, ieškomasis skaitmuo yra 5.

2) Ieškomasis skaitmuo 3. 162 puslapyje prie 156 piešinio «rezultatų tiesės» skaitmenų suma lygi 1+4+1+3+2+5+1+1+3+1+2= =24. Iki 27 trūksta trijų, vadinasi, skaitmuo 3 lieka neįtrauktas į vieną kurią nors liniją; tai ir patvirtina piešinys. Sprendimo būdas remiasi samprotavimais, analogiškais pateiktiems pirmesnio uždavinio sprendime.

3) Dėl priežasties, aiškios iš pirmesnio uždavinio, ieškomasis skaičius lygus pasakytojo skaičiaus skaitmenų sumos papildiniui iki artimiausio skaičiaus, dalaus 9.

212. Reikia rasti mums duotojo daugiklio dalybos iš 9 liekaną, šią liekaną padauginti iš pirmos liekanos ir vėl rasti gautosios mūsų sandaugos dalybos iš 9 liekaną. Tai ir bus ieškoma liekana.

Jeigu pirma liekana buvo 2, o duotasis daugiklis 13, tai, 13 padaliję iš 9, gauname liekaną 4. Liekanų sandauga lygi $2 \cdot 4=8$, ir 8 dalybos iš 9 liekana taip pat lygi 8. Vadinasi, ieškomoji liekana 8.

Ši taisyklė lengvai gaunama ir iš 3(b) savybės (158 psl.).

213. Pirmasis rezultato skaitmuo visada papildo trečiąjį skaitmenį iki 9. Jei trečiasis skaitmuo yra 5, tai, vadinasi, pirmasis yra 9—5=4. Antrasis skaitmuo visada vienetu mažesnis už pirmąjį. Mūsų pavyzdyje 4—1=3. Paskutinysis, ketvirtasis skaitmuo papildo antrąjį iki 9. Tokiu būdu, ieškomasis skaičius 4356. Iš tikrųjų, $44 \cdot 99=4356$.

Nusakytą taisyklę patvirtina ši visų galimų rezultatų lentelė:

1	0	8	9
2	1	7	8
3	2	6	7
4	3	5	6
5	4	4	5
6	5	3	4
7	6	2	3
8	7	1	2
9	8	0	1

214. Vidurinis skirtumo skaitmuo visada bus 9, o kraštutiniai skaitmenys papildo vienas kitą iki 9 (tai seka taip pat iš 1(b) savybės, žr. 157 psl.).

Iš tikrųjų, tegul A, B ir C — kurio nors triženklio skaičiaus skaitmenys ir tegul $A>C$. Parašykime duotąjį skaičių aritmetiškai: $[A][B][C]$. Tada apsuktas skaičius bus $[C][B][A]$. Sudarykime skirtumą:

$$\begin{array}{r} [A]\ [B]\ [C] \\ -\ [C]\ [B]\ [A] \\ \hline \end{array}$$

Paskutinysis skirtumo skaitmuo bus $10+C-A$ (kadangi $C<A$, tai atimdami pasiskoliname 10 vienetų iš dešimčių skaičiaus B). Vidurinis skirtumo skaitmuo bus $10+(B-1)-B=9$ (dešimčių skaičius sumažėjo 1 ir atimdami pasiskolinome 10 dešimčių iš šimtų skaičiaus A).

Tokiu būdu iš tikrųjų vidurinis skirtumo skaitmuo visada bus 9.

Pirmas skirtumo skaitmuo bus $(A-1)-C$. Skirtumo pirmojo ir paskutiniojo skaitmenų suma bus: $A-1-C+10+C-A=9$.

215. Skirtumas dviejų skaičių, kurie gaunami vienas iš kito perstačius skaitmenis, visada bus 9 arba dalus 9. Kaip nesunku patikrinti, visos uždavinio sąlygos bus patenkintos tik atveju, kai A ir B amžiaus

skirtumas lygus 9. Tačiau tada *C* amžius sudaro pusę 9, t. y. $4^1/_2$ metų; *B* 10 kartų vyresnis už *C*, vadinasi, jam 45 metai; savo ruožtu *A* amžius 54 metai. Taigi, *A* — 54 metai, *B* — 45 metai ir *C* — $4^1/_2$ metų.

VIII skyriui

216. Uždavinį spręsti geriausia pradėti «nuo galo». Trečioji MTS, perdavusi dalį mašinų pirmai ir antrai MTS, padvigubino jose iki to meto buvusių mašinų kiekį; tada kiekvienoje MTS atsirado po 24 mašinas. Vadinasi, prieš tai jos turėjo: pirmoji MTS — 12 mašinų, antroji — taip pat 12, o trečioji — 48 mašinas. Toks mašinų pasiskirstymas buvo gautas po to, kai antroji MTS padėjo pirmai ir trečiai padvigubinti esančių pas jas mašinų skaičių. Vadinasi, dar anksčiau mašinos buvo pasiskirsčiusios taip: pirmojoje MTS — 6 mašinos, trečiojoje — 24; kadangi antroji MTS atidavė pirmai ir trečiai 30 mašinų, tai joje buvo 12+30=42 mašinos. Taip buvo pasiskirsčiusios mašinos po to, kai pirmoji MTS padvigubino antros ir trečios MTS mašinų skaičių. Vadinasi, iš pradžių antroji ir trečioji MTS turėjo atitinkamai 21 ir 12, o pirmoji — 6+33=39 mašinas.

217. Šio uždavinio sprendimą taip pat geriau pradėti «nuo galo», priimant domėn tai, kad po trečiojo perėjimo pas Dykinėtoją buvo lygiai 24 kapeikos, kurias jis privalėjo atiduoti. Jeigu po paskutiniojo perėjimo pas Dykinėtoją buvo lygiai 24 kapeikos, tai, vadinasi, prieš tą perėjimą pas jį buvo 12 kapeikų. Tačiau tos 12 kapeikų buvo gautos po to, kai jis atidavė 24 kapeikas; vadinasi, viso pinigų pas jį buvo 36 kapeikos. Taigi, antrą kartą pereidamas tiltą, turėjo 18 kapeikų, o tos 18 kapeikų buvo gautos po to, kai jis pirmą kartą perėjo tiltą ir atidavė 24 kapeikas. Tuo būdu, po antro perėjimo jis turėjo iš viso 18+24=42 kapeikas. Iš čia aišku, kad pradžioje Dykinėtojas kišenėje turėjo 21 kapeiką.

218. Mainams pasibaigus, kiekvienas iš brolių turėjo po 8 obuolius. Vadinasi, vyresnysis prieš tai, kai jis pusę savo obuolių atidavė broliams, turėjo 16 obuolių, o vidurinysis ir jaunesnysis — po 4 obuolius. Toliau, vidurinysis brolis prieš tai, kai jis padalijo savo obuolius, turėjo 8 obuolius, o vyresnysis — 14 obuolių, jaunesnysis — 2. Todėl jaunesnysis brolis prieš tai, kai jis savo obuolius padalijo, turėjo 4 obuolius, vidurinysis — 7 obuolius ir vyresnysis — 13.

Kadangi kiekvienas iš pradžių gavo tiek obuolių, kiek jam metų, tai mažėliui 4 metai, viduriniam broliui 7 metai, o vyriausiam — 13.

219. Trise meškeriotojai surūkė 12 papirosų. Vakare pas juos visus kartu liko tiek papirosų, kiek po dalybų buvo pas kiekvieną, tai yra

bendras papirosų skaičius sumažėjo 3 kartus. Kitaip tariant, meškeriotojai surūkė 2 dalis, o viena dalis liko. Dvi dalys sudaro 12 papirosų, o viena dalis — 6. Vadinasi, liko 6 papirosai. Tai ir yra skaičius papirosų, kuriuos kiekvienas gavo per dalybas. Vadinasi, iš viso pakelyje buvo 18 papirosų.

220. Mašinistų susitikimo momentu nuotolis tarp palydovų bus $150+150=300$ *m*. Kadangi kiekvienas traukinys eina 45 *km/val* greičiu, tai palydovai artėja $45+45=90$ *km/val*, arba 25 *m/sek*, greičiu.

Ieškomasis laikas lygus $300:25=12$ *sek*.

221. Kiekvieno uždavinio sprendimo paprastumas ir trumpumas priklauso nuo sėkmingo išeities taško samprotavimų grandinėje parinkimo, arba, algebriškai kalbant, nuo nežinomojo parinkimo. Spręsdami šį uždavinį, pastebime, kad antrą knygos pusę Viera skaitė trigubai greičiau kaip pirmąją.

Pažymėkime Vieros sunaudotą antros knygos pusės skaitymui dienų skaičių raide n (aritmetiniame sprendime laikome viena dalimi). Tada pirmąją knygos pusę Viera skaitė $3n$ dienų, po 10 puslapių per dieną. Taigi pusę knygos sudaro $3n \cdot 10=30n$ puslapių, o visa knyga turi $60n$ puslapių. Visą knygą Viera skaitė $3n+n=4n$ dienų. Vadinasi, esant bet kuriam knygos puslapių skaičiui, Viera vidutiniškai perskaitydavo $60n:4n=15$ puslapių per dieną. Mama buvo teisi. Išspręskite tą patį uždavinį, parinkdami kitokį nežinomąjį.

222. Tegul kiekvienas berniukas atnešė į stovyklą x grybų. Iš uždavinio sąlygos seka, kad Marusia davė Koliai $x-2$ grybus, Vaniai $x+2$ grybus, Andriušai $\frac{x}{2}$ ir Petiai $2x$ grybų, o iš viso

$$(x-2)+(x+2)+\frac{x}{2}+2x=4\frac{1}{2}x.$$

Pagal sąlygą

$$4\frac{1}{2}x=45.$$

Iš čia $x=10$.

A t s a k y m a s. Kolia iš Marusios gavo 8 grybus, Vania 12 grybų, Andriuša 5 grybus, Petia 20 grybų. Kai jie atėjo į stovyklą, kiekvienas berniukas turėjo po 10 grybų.

223. Dažnai atsakoma: «abu grįš vienu metu». Taip galvojantieji savo atsakymą pagrindžia tuo, kad nors sportininkas, irkluojantis pagal upės tėkmę, aplenkia savo partnerį tam tikru laiko kiekiu, tačiau, grįždamas atgal prieš srovę, jis tiek pat laiko praranda.

Tai — klaidingas samprotavimas. Tekantis vanduo iš tikrųjų sutrumpina laiką, kai laivelis eina pasroviui, bet prailgina jį, kai judama priešinga kryptimi; vienu atveju upė lyg ir padeda judėjimui, o antru — kliudo. Tačiau parama trunka trumpesnį laiko tarpą kaip pasipriešinimas, vadinasi, natūralu laukti, kad sportininkas, plaukiąs upe, grįš į startą vėliau už sportininką, plaukiantį stovinčiame vandenyje.

Tą patį rezultatą gauname nagrinėdami kraštutinį atvejį. Tegul laivelio judėjimo greitis, suteikiamas irkluotojo pastangomis, lygus vandens tekėjimo greičiui; tada sportininkas, plaukiąs upe, pasieks numatytą tašką, judėdamas dvigubai greičiau, kaip jo partneris ežere. Tačiau, kada pirmas sportininkas pasuka atgal, upė jį sulaikys ir grįžti į išplaukimo vietą jis nebegalės. Jei vandens tekėjimo greitis išreiškiamas dydžiu x, o laivelio plaukimo stovinčiame vandenyje greitis nuo irkluotojo pastangų v, tai stovinčiame vandenyje nuplaukti keliui s į vieną galą reikia $\frac{s}{v}$ laiko vienetų, o tokiam pat keliui s pasroviui reikia $\frac{s}{v+x}$ laiko vienetų. Laiko laimima $\frac{s}{v}-\frac{s}{v+x}$, arba subendravardiklinus

$$\frac{s}{v}-\frac{s}{v+x}=\frac{sx}{v(v+x)} \text{ laiko vienetų.}$$

Tam pačiam keliui s prieš srovę reikia $\frac{s}{v-x}$ laiko vienetų; palyginus su judėjimu stovinčiame vandenyje, pralaimima:

$$\frac{s}{v-x}-\frac{s}{v}=\frac{sx}{v(v-x)} \text{ laiko vienetų.}$$

Palyginę trupmenas $\frac{sx}{v(v+x)}$ (laimėtą laiką) ir $\frac{sx}{v(v-x)}$ (pralaimėtą laiką, judant upe), gauname, kad pirmoji trupmena mažesnė už antrąją, nes ji skiriasi nuo antrosios trupmenos tik didesniu vardikliu, taigi upėje, plaukiant laiveliu prieš srovę, daugiau laiko pralaimima, negu laimima, jam judant pasroviui.

Vadinasi, iš abiejų irkluotojų į startą grįš anksčiau tas, kuris plaukia stovinčiame vandenyje.

Savarankiškai išnagrinėkite tokį klausimą: kaip priklausomai nuo vandens tekėjimo greičio kitimo kis pralaimėtas laikas to irkluotojo, kuris plaukia upe.

224. Samprotavimai, pateikti uždavinio tekste, įgalina nustatyti, kad laikas, kurį plaukikas sunaudojo, plaukdamas prieš srovę nuo pirmojo tilto iki posūkio atgal vietos, lygus jo plaukimo pasroviui nuo posūkio vietos iki antrojo tilto, po kuriuo jis prisivijo skrybėlę, laikui. Iš čia seka, kad plaukikas, o kartu su juo ir skrybėlė, vandenyje judėjo 20 minučių. Per tą laiką skrybėlė nuplaukė srovės greičiu visą nuotolį tarp pirmojo ir antrojo tiltų, tai yra 1 000 *m*. Vadinasi, srovės greitis lygus 1 000 : 20 = 50 *m/min*.

Pateiksiu dar vieną šio uždavinio sprendimą, pagrįstą kitais, tačiau taip pat labai sąmojingais samprotavimais. Padėtį nagrinėsime «skrybėlės požiūriu».

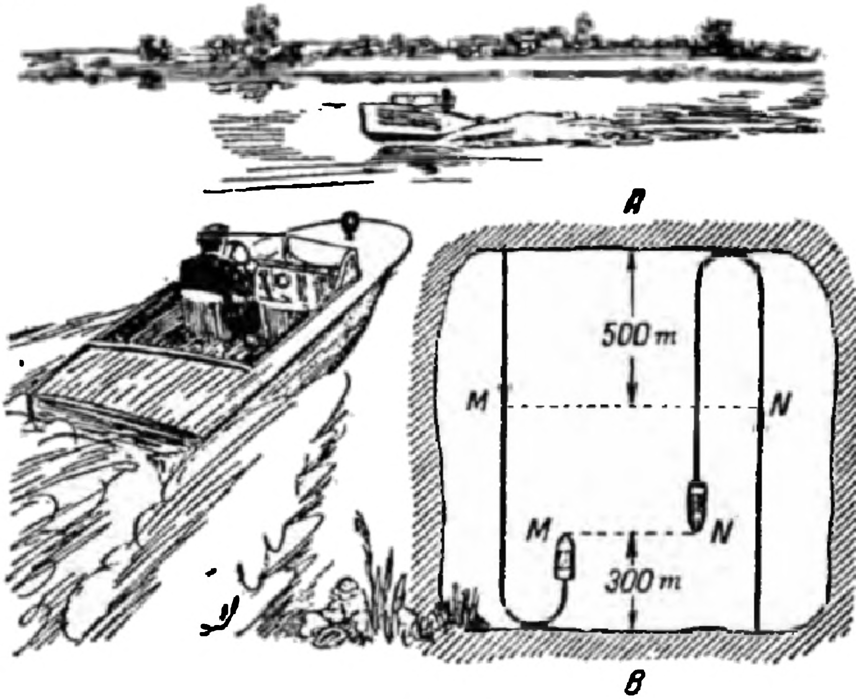
Susitarkime, kad ne skrybėlė, nešama tekančio vandens, plaukia nuo pirmojo tilto prie antrojo, o antrasis tiltas plaukia vandens greičiu skrybėlės kryptimi, ramiai gulinčios nejudančiame vandenyje po pirmuoju tiltu. Dalyko esmė nuo to nepasikeis. Ar ne taip? Ką gi gauname? Nukrito į vandenį skrybėlė. Skrybėlė stovi vietoje, o į ją bėga tiltas Nr. 2. O kas bus su plaukiku? Plaukikas nejudančiame vandenyje plaukia 10 minučių į vieną pusę, po to tiek pat laiko (todėl, kad vanduo nejuda) plaukia atgal. Praplaukiojęs 20 minučių, jis sugrįžta į ankstyvesnę vietą ir, vadinasi, iš naujo susitinka su skrybėle. Ta pačia akimirka, prabėgęs 1 000 *m*, prie plaukiko ir skrybėlės priartėja tiltas Nr. 2 (uždavinio sąlygoje buvo sakyta, kad plaukikas pasivijo skrybėlę po tiltu Nr. 2).

Vadinasi, tiltas judėjo 1 000 : 20 = 50 *m/min* greičiu. Tai ir yra srovės greitis. O plaukiko greitis reikšmės neturi.

225. Prie gelbėjimo rato abu laivai priplauks vienu laiku. Iš tikrųjų, jei judėjimą stebėtume nuo prieplaukos, tai laivas, plaukiantis pavandeniui, įgauna papildomą greitį, lygų srovės greičiui, o laivo, plaukiančio prieš vandenį, greitis tiek pat sumažėja. Jeigu laivo judėjimą stebėtume nuo gelbėjimo rato, kuris vandens srovės greičiu plaukia paskui pavandeniui plaukiantį laivą, tai tas laivas praranda visą greičio laimėjimą, ir, atvirkščiai, atgauna greičio pralaimėjimą laivas, plaukiąs prieš vandenį. Kitaip tariant, plaukiančio rato atžvilgiu atrodys taip, lyg ratas stovėtų vietoje, o laivai plauktų stovinčiame vandenyje. Iš čia seka, kad po valandos abu laivai bus vienoduose nuotoliuose nuo plaukiančio rato (nes jų nuosavi greičiai vienodi) ir, pakeitę judėjimo kryptį, priplauks prie jo taip pat po valandos, tai yra vienu laiku.

226. Gliseris *M*, palikęs krantą *A*, nuplaukė 500 *m* ir susitiko su gliseriu *N*. Kartu jie nuplaukė nuotolį, lygų ežero ilgiui (356 pieš.). Tęsdamas kelionę, gliseris *M* pasiekė krantą *B* ir, grįždamas atgal,

susitiko su gliseriu *N* 300 *m* nuotolyje nuo kranto *B*. Iki šio momento abu gliseriai perplaukė ežero ilgį tris kartus (žr. 356 pieš.). Iš čia seka, kad nuo gliserių judėjimo pradžios iki jų antro susitikimo praėjo 3 kartus daugiau laiko, nei nuo jų judėjimo pradžios iki pirmo susitikimo.



356 pieš.

Kadangi iki pirmo susitikimo momento gliseris *M* nuplaukė 500 *m*, tai iki antro susitikimo momento jis padarė, suprantama, 500×3= = 1 500 *m* (nueitas pastoviu greičiu kelias proporcingas laikui). Ežero ilgis 300 *m* trumpesnis už kelią, perplauktą gliserio *M* nuo judėjimo pradžios iki antro susitikimo, tai yra jis lygus 1 500—300=1 200 *m*.

227. Tegul visas būrys pasodino x medelių. Kiriuša pažadėjo pasodinti tiek medelių, kiek pasodins visi kiti jo būrio pionieriai; vadinasi, jis turi pasodinti pusę bendro medelių skaičiaus, kurį pasodins visas būrys, tai yra $\frac{x}{2}$.

Vitia pažadėjo pasodinti pusę skaičiaus medelių, pasodintų visų kitų būrio pionierių. Tai reiškia: jei Vitios dalį laikytume viena viso

pasodintų medelių skaičiaus dalimi, tai kitų būrio pionierių dalis sudarytų 2 tokias dalis. Iš čia seka, kad Vitia turi pasodinti v i e n ą t r e č i ą j ą x, tai yra $\frac{x}{3}$ medelių.

Kiriuša ir Vitia įsipareigojo pasodinti $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{6}$ medelių.

Vadinasi, kiti jų būrio pionieriai pasodino $\frac{x}{6}$ medelių, o tai, pagal sąlygą, sudaro 40 medelių. Turime: $\frac{x}{6}=40$, iš kur $x=240$ medelių. Iš jų Kiriušos daliai tenka 120, o Vitios daliai — 80 medelių.

228. Du kartus. Jei pusę mažesniojo skaičiaus išreikštume raide m, tai mažesniojo skaičiaus liekana bus taip pat m, o liekana didesniojo skaičiaus — $3m$. Tada mažesnysis skaičius lygus $m+m=2m$, o didesnysis $3m+m=4m$. Todėl didesnysis skaičius didesnis už mažesnįjį $4m:2m=2$ kartus.

229. A l g e b r i n i s s p r e n d i m a s. Laivo greitis x; hidroplano greitis $10x$. Hidroplano kelias iki susitikimo su laivu — s; per tą laiką laivo kelias $s-180$, vadinasi,

$$\frac{s}{10x}=\frac{s-180}{x}.$$

Padauginame abi lygybės puses iš $10x$ ($x\neq 0$) ir gauname $s=200$ mylių.

A r i t m e t i n i s s p r e n d i m a s. Per tą laiką, per kurį hidroplanas padaro 10 mylių, laivas nutolsta 1 mylią. Tokiu būdu, kol hidroplanas nuskris pradines 180 mylių, laivas nutols 18 mylių. Kol hidroplanas padarys kitas 10 mylių, laivas nuplauks devynioliktąją mylią ir tarp jų liks 9 mylių atstumas. Dvidešimtoje mylioje hidroplanas pasivys laivą. Tuo pačiu, nuo kranto jie abu bus nutolę per 200 mylių.

230. Žinant dviratininkų-figūrininkų judėjimo greičius, galima padaryti išvadą, kad vieną sąlyginį ilgio vienetą jie pravažiuoja atitinkamai per $^1/_6$, $^1/_9$, $^1/_{12}$ ir $^1/_{15}$ valandos. Tačiau vienam ratui apvažiuoti kiekvienam jų reikia tik $^1/_3$ nurodyto laiko, tai yra $^1/_{18}$, $^1/_{27}$, $^1/_{36}$ ir $^1/_{45}$ valandos (kiekvieno rato apskritimo ilgis sudaro $^1/_3$ sąlyginio ilgio vieneto). Per valandą dviratininkai-figūrininkai padarys 18, 27, 36 ir 45 pilnus apsisukimus, o per 20 minučių — 6, 9, 12 ir

15 apsisukimų. Visi skaičiai — sveiki, vadinasi, praėjus 20 minučių dviratininkai-figūrininkai suvažiuos į išeities taškus. Aplamai, figūrininkai gali suvažiuoti į išeities taškus tiktai po kurio nors visiems bendro laiko tarpo, per kurį jie padaro pilnus (nors ir nevienodus) apsisukimų skaičius. Vadinasi, didžiausią galimą 20 minučių bėgyje dviratininkų-figūrininkų susitikimų skaičių nustato skaičių 6, 9, 12 ir 15 bendrojo didžiausio daliklio dydis. Šių skaičių B. D. D. yra 3. Vadinasi, per 20 min. dviratininkai-figūrininkai suvažiuos 3 kartus kas $6^2/_3$ minutės ($20:3=6^2/_3$).

231. Tarp detalės apdirbimo greičio ir laiko, reikalingo jai apdirbti, galioja atvirkščiai proporcinga priklausomybė. Tai reiškia, kad jei laiko kiekis t_1, reikalingas detalei apdirbti, esant piovimo greičiui v_1, pasikeitė iki dydžio t_2, esant piovimo greičiui v_2, tai santykis $\frac{t_2}{t_1}$ lygus santykiui $\frac{v_1}{v_2}$:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{v_1}{v_2}.$$

Pagal uždavinio sąlygą $t_2=2^1/_2$ min, esant greičiui v_2 *m/min*; $t_1=35$ min., esant greičiui $v_1=v_2-1\,690$ *m/min*.

Sustatę proporciją $\frac{2^1/_2}{35}=\frac{v_2-1\,690}{v_2}$, o po to išsprendę ją, randame: $v_2=1\,820$.

A t s a k y m a s. Tekintojas P. Bykovas tada pasiekė piovimo greitį 1 820 *m/min*.

232. Nuotolis nuo Skagvėjo iki stovyklos, į kurią skubėjo Džekas Londonas, yra $133^1/_3$ mylios.

Iš tikrųjų, uždavinio sąlygoje pasakyta, kad 50 mylių, praeitų pilnu greičiu, būtų pagreitinę Džeko Londono atvykimą į stovyklą viena diena. Vadinasi, 100 mylių, praeitų pilnu greičiu, būtų pagreitinę jo atvykimą 2 dienomis, ir Džekas Londonas būtų į stovyklą atvykęs nepavėlavęs. Iš to galima padaryti išvadą, kad pirmos kelionės dienos pabaigoje iki stovyklos liko dar 100 mylių. Jeigu Džekas Londonas visą laiką būtų judėjęs pilnu greičiu, jis vietoje 100 mylių būtų padaręs $\frac{100\cdot5}{3}=166^2/_3$ mylios. $66^2/_3$ mylios būtų pagreitinusios jam kelionę dviem paromis. Iš čia išplaukia, kad pilnas, iš anksto apskaičiuotas Londono greitis buvo lygus $33^1/_3$ mylios per dieną. Pirmą parą jis ir nukeliavo $33^1/_3$ mylios.

Pridėję prie to likusias 100 mylių, rasime ieškomą nuotolį. Jis bus: $100+33^1/_3=133^1/_3$ mylios.

233. 1) Jei mėnesinis uždarbis padidėjo 30%, tai tiek pat padidėjo ir perkamoji galia.

2) Jeigu uždarbis lieka nepakeistas, bet prekių kainos sumažinamos 30%, tai perkamoji galia pakyla ne 30%, kaip kad daugelis galvoja, o daugiau. Iš tikrųjų, jei, sakykime, už 1 rub. galima pirkti 1 daiktą 1 rub. vertės, tai po jo kainos sumažinimo iki 70 kap. (30%), už 1 rub. galima nupirkti $\frac{100}{70}=\frac{10}{7}$ daikto, tai yra $^3/_7$ daikto daugiau, o $^3/_7$ — tai apytikriai 43%.

3) Neteisinga analogija ir čia gali atvesti prie klaidingo atsakymo: $10+8=18\%$. Iš tikrųjų iš pradžių numatytas pelnas — 20%.

Iš tikrųjų, parduodamas knygas su 10% nuolaida, knygynas gavo 8% pelno. Tai reiškia, kad 90% nustatytos kainos sudaro knygos savikainos 108%.

Nesunku sužinoti, kiek knygos savikainos procentų būtų sudariusi visa nustatytoji kaina.

Šiam klausimui išspręsti sudarome proporciją:

$$\frac{90}{100}=\frac{108}{x}.$$

Iš čia $x=120\%$. Vadinasi, iš pradžių numatytas pelnas — 20%.

4) Daugelis galvoja, kad keliais procentais sutrumpėja detalės padirbimo laikas, tiek pat procentų turi padidėti darbo našumas. Lengva įrodyti, kad tai — klaida.

Tegul vienos detalės padirbimui sunaudojama 1 val. Sunaudojamąjį laiką sutrumpinus $p\%$, jis bus $\frac{p}{100}$ valandos trumpesnis, tai yra sudarys $1-\frac{p}{100}$ val. Vadinasi, per 1 val. bus padirbta ne viena detalė, o $1:(1-\frac{p}{100})=\frac{100}{100-p}$ detalių arba $\frac{100}{100-p}-1=\frac{p}{100-p}$ detalių daugiau.

Jei šį produkcijos prieauglį išreikštume procentais, tai gautume $\frac{100p}{100-p}\%$ Pavyzdžiui, jei laiko norma sumažėjo 50% ($p=50$), tai darbo našumas išaugs ne 50%, o šimtu %, tai yra dvigubai.

234. Jei testatoriaus valios esme laikytume motinos dalies (m) ryšį su sūnaus dalimi (s) ir su dukters dalimi (t), tai iš sąlygos sektų,

kad duktė turi gauti du kartus mažesnę palikimo dalį, nei motina, o sūnus — du kartus didesnę, nei motina. Vadinasi, palikimas turi būti padalytas į 7 lygias dalis, kurių 2 dalis reikia atiduoti motinai, 4 dalis sūnui ir 1 dalį dukteriai: $m:s:t=2:4:1$.

Salvianas Julianas taip ir pasiūlė palikimą padalyti. Tačiau toks sprendimas motinai yra nepalankus. Ir tikrai, juk testatoriaus valią galima aiškinti ir taip, kad jis turėjęs galvoje motinai palikti m a ž i a u s i a b e n t $^1/_3$ nuosavybės, o romėnų juristo sprendimas suteikia jai tik $^2/_7$ palikimo. Todėl, jei stotume motinos interesų ginti, tai jai reikėtų atiduoti $^1/_3$ viso palikimo, likusius $^2/_3$ palikimo padalyti tarp sūnaus ir dukters santykiu 4 : 1. Tada sūnus gaus $^2/_{15}\cdot 4={}^8/_{15}$, o duktė $^2/_{15}\cdot 1={}^2/_{15}$ viso palikimo arba $m:s:t=5:8:2$. Iš dviejų galimų uždavinio sprendimų mes matome, kad testatoriaus valia suformuluota nepakankamai tiksliai, nes galimi du jo valios aiškinimai.

235. Tegul ieškomasis atstumas lygus $2x$. Vienoje šio atstumo pusėje yra $\frac{x}{2}$ žingsnių porų; antroje pusėje $\frac{x}{3}$ žingsnių trejetų. Pagal sąlygą, žingsnių porų yra 450 daugiau, nei žingsnių trejetų. Vadinasi,

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=450,\quad \frac{x}{6}=450,\quad x=2\,700 \text{ žingsnių}.$$

Visas atstumas $2x=5\,400$ žingsnių.

236. Tegul nuotolis nuo kaimo iki miesto lygus x *km*. Jei senesnysis nuvažiavo y *km*, tai jam lieka važiuoti $(x-y)$ *km*. Jei jis būtų nuvažiavęs $3y$ *km*, tai jam būtų likę važiuoti $(x-3y)$ *km*.

Pagal sąlygą, nuotolis $x-3y$ dukart mažesnis už nuotolį $x-y$. Vadinasi,

$$x-y=2(x-3y), \text{ arba } x-y=2x-6y.$$

Iš čia

$$y=\frac{1}{5}x.$$

Tegul jaunasis iš pradžių nuvažiavo z *km*; jam liko važiuoti $(x-z)$ *km*. Jei jis būtų nuvažiavęs $\frac{z}{2}$ *km*, tai jam būtų likę važiuoti $(x-\frac{z}{2})$ *km*. Pagal sąlygą

$$(x-z)3=x-\frac{z}{2}.$$

Iš čia

$$z=\frac{4}{5}x.$$

Tačiau $\frac{4}{5}x$ yra daugiau, negu $\frac{1}{5}x$, tai yra $z>y$, o tai reiškia, kad iš pradžių jaunasis nuvažiavo daugiau, nei senesnysis.

Vadinasi, jaunasis važiavo mašina, o senesnysis arkliu.

237. Tegul

pirmasis motociklininkas	antrasis motociklininkas
važiavo x valandų,	ilsėjosi $\frac{x}{2}$ valandų,
ilsėjosi $\frac{y}{3}$ valandų;	važiavo y valandų.

Kadangi abu motociklininkai kelyje išbuvo tą patį laiką, tai

$$x+\frac{y}{3}=\frac{x}{2}+y,\ \text{arba}\ \frac{x}{2}=\frac{2}{3}y.$$

Iš čia $x=\frac{4}{3}y$, tai yra $y<x$.

Antrasis motociklininkas važiavo greičiau už pirmąjį.

238. Jei ieškomasis lėktuvas yra n-je vietoje, skaitant iš kairės į dešinę, tai jam iš dešinės yra $9-n$ lėktuvų (žr. 161 pieš., 181 psl.), o iš kairės $n-1$ lėktuvas. Šių skaičių sandauga: $(9-n)(n-1)$. Jei lėktuvas būtų buvęs 3 vietomis dešiniau, tai į dešinę nuo jo būtų buvę $6-n$ lėktuvų, o į kairę $n+2$ lėktuvai. Pagal sąlygą

$$(6-n)(n+2)-(9-n)(n-1)=3.$$

Iš čia $n=3$.

Ieškomasis lėktuvas, skaičiuojant iš kairės į dešinę — trečias.

239. Ieškomosios dalys 8, 12, 5 ir 20.

240. Tegul x — ilgesnės žvakės ilgis, o y — trumpesnės ilgis. Per valandą pirmosios žvakės sudega $x:3\frac{1}{2}=\frac{2}{7}x$, o antrosios $y:5=\frac{1}{5}y$. Per 2 valandas degdamos jos sutrumpėja atitinkamai dydžiais $\frac{4}{7}x$ ir $\frac{2}{5}y$. Pirmosios žvakės liks $\frac{3}{7}x$, o antrosios $\frac{3}{5}y$. Pagal uždavinio sąlygą $\frac{3}{7}x=\frac{3}{5}y$; vadinasi, antroji žvakė buvo už pirmąją $\frac{5}{7}$ karto trumpesnė.

241. Svarbiausia yra tai, kad tokiu būdu sugalvotų skaičių suma bus visada dali 11. Iš tikrųjų, sugalvotą keturženklį skaičių [a][b][c][d] galima parašyti kaip $1\,000a+100b+10c+d$, o po pirmo skaitmens a perstatymo į skaičiaus galą — kaip $1\,000b+100c+10d+a$. Šių skaičių suma bus: $1\,000a+100b+10c+d+1\,000b+100c+10d+a=1\,001a+$ $+1\,100b+110c+11d$.

Nesunku pastebėti, kad kiekvienas sumos dėmuo dalijasi iš 11.

Iš skaičių, pasakytų Kolios, Tolios, Polios ir Olios, tik vienas rezultatas — Tolios — dalijasi iš 11.

Iš to galima padaryti išvadą, kad Kolia, Polia ir Olia neabejotinai padarė klaidą, o Tolios rezultatas gali būti teisingas.

242. Iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti, kad sieninio laikrodžio vėlavimą visiškai kompensuoja stalinio laikrodžio tiek pat minučių skubėjimas. Savo ruožtu, žadintuvo vėlavimas kompensuojamas rankinio laikrodžio skubėjimo, taigi, rankinis laikrodis rodys tikslų laiką. Tačiau yra visai ne taip. Iš tikrųjų, per vieną tikslaus laiko valandą sieninis laikrodis nueina 58 min. Per 60 sieninio laikrodžio minučių stalinis laikrodis nueina 62 min. Vadinasi, per kiekvieną sieninio laikrodžio minutę stalinis laikrodis nueina $\frac{62}{60}$ min, o per 58 sieninio laikrodžio minutes (tai yra per 1 tikslaus laiko valandą) stalinis laikrodis nueina $\frac{58\cdot 62}{60}$ min.

Toliau. Per 60 stalinio laikrodžio minučių žadintuvas padaro 58 min. Vadinasi, per kiekvieną stalinio laikrodžio minutę žadintuvas padaro $\frac{58}{60}$ min., o per $\frac{58\cdot 62}{60}$ stalinio laikrodžio minutės (tai yra per 1 tikslaus laiko valandą) žadintuvas padaro $\frac{58\cdot 62}{60}\cdot\frac{58}{60}$ min.

Visiškai taip pat per kiekvieną žadintuvo minutę rankinis laikrodis padaro $\frac{62}{60}$ min. Vadinasi, per $\frac{58\cdot 62\cdot 58}{60\cdot 60}$ žadintuvo minutės (tai yra per 1 tikslaus laiko valandą) rankinis laikrodis padaro $\frac{58\cdot 62\cdot 58}{60\cdot 60}\cdot\frac{62}{60}$ min. Atlikę veiksmus, gausime apytikriai 59,86 min.

Vadinasi, per kiekvieną tikslaus laiko valandą rankinis laikrodis pavėluoja 0,14 minutės. Tokiu būdu, per 7 tikslaus laiko valandas jis pavėluoja $0{,}14\cdot 7=0{,}98\approx 1$ minute.

19-tą signalinio laiko valandą rankinis laikrodis rodys 18 val. 59 min.

243. Tegul mūsų laikrodžiai po x valandų vėl rodys tą patį laiką. Tai atsitiks tada, kai laikas, kurį mano laikrodis užbėgs, ir laikas, kuriuo Vasios laikrodis atsiliks, sudarys k a r t u 12 valandų (43 200 sek.). Mano laikrodis per x valandų skubės x sek., o Vasios atsiliks $\frac{3}{2}x$ sek. Gauname lygtį

$$x + \frac{3}{2}x = 43\,200.$$

Iš čia $x = 17\,280$ valandų, arba 720 dienų.

Beveik 2 metus man ir Vasiai teks laukti, kol mūsų laikrodžiai rodys tą patį laiką.

Dar ilgiau teks laukti, kol mūsų laikrodžių parodymai sutaps su tikslaus laiko signalu.

Iš tikrųjų, dėl to mano laikrodis turi nueiti pirmyn 12 valandų, o Vasios 12 valandų atsilikti.

Mano laikrodis tai padarys po 43 200 val., arba po 1 800 dienų, o Vasios $^3/_2$ karto anksčiau, tai yra po 1 200 dienų. V i e n a l a i k i s mano ir Vasios laikrodžių parodymų sutapimas su tikslaus laiko signalu įvyks po dienų skaičiaus, dalaus skaičiams 1 800 ir 1 200, tai yra po 3 600 dienų — beveik po 10 metų!

244. 1) Meistrui nesant, laikrodžio rodyklių nueitų «atstumų» suma buvo lygi vienam apsisukimui. Kadangi minutinė rodyklė juda 12 kartų greičiau už valandinę, tai rodyklių nueitas atstumas sudarys atitinkamai $\frac{12}{13}$ ir $\frac{1}{13}$ viso rato. Iš čia seka, kad meistro nebuvo $\left(\frac{12}{13} \cdot 60 = 55\frac{5}{13}\right)$ min. Jeigu rodyklių nueitą kelią skaičiuotume laiko minutėmis ir x-su pažymėtume skaičių minučių, praėjusių nuo abiejų rodyklių padėties ties skaitmeniu 12 iki minutinės rodyklės padėties meistro išėjimo pietų momentu, tai valandinė rodyklė per tas x minučių paslinks tik $\frac{1}{12}x$, ir, vadinasi, meistro išėjimo momentu «nuotolis» tarp rodyklių bus $x - \frac{x}{12} = \frac{11}{12}x$ min. Gauname lygtį

$$\frac{11}{12}x = \frac{1}{13} \cdot 60.$$

Iš čia

$$x = 5\frac{5}{143} \text{ min.}$$

Vadinasi, meistras išėjo pietų $5\frac{5}{143}$ min. pirmos, ir jo nebuvo $55\frac{5}{13}$ min.

Kada jis sugrįžo, buvo $55\frac{5}{13}+5\frac{5}{143}=60\frac{60}{143}$ min. po dvyliktos, tai yra $\frac{60}{143}$ min. antros.

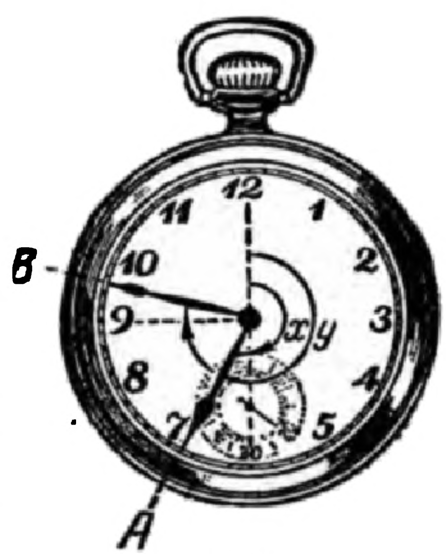
2) Per 2 valandas po to, kai aš išėjau pasivaikščioti, minutinė laikrodžio rodyklė atsiras toje pačioje vietoje, o valandinė nuslinks per $^2/_{12}$ viso ciferblato.

Kad laikrodžio rodyklės pasikeistų vietomis daugiau kaip per 2 val., jos kartu turi nueiti $^{10}/_{12}$ viso ciferblato arba dar 50 min. Minutinė rodyklė juda 12 kartų greičiau, nei valandinė, vadinasi, jai likęs kelias lygus $\frac{12}{13}\cdot 50=46\frac{2}{13}$ min. Taigi aš nebuvau virš tų dviejų valandų dar $46\frac{2}{13}$ min.

3) Tarp 4-tos ir 5-tos valandos laikrodžio rodyklės sutampa praėjus $20:\frac{11}{12}=21\frac{9}{11}$ min. po 4-tos. Minutinė rodyklė priešais valandinę rodyklę atsiras $50:\frac{11}{12}=54\frac{6}{11}$ min. po 4-tos. Vadinasi, mokinys sprendė uždavinį

$$54\frac{6}{11}-21\frac{9}{11}=32\frac{8}{11}\text{ min.}$$

Jis užbaigė uždavinio sprendimą 4 val. $54\frac{6}{11}$ min.



357 pieš.

245. Iš uždavinio sąlygos seka, kad tuo momentu, kada prasidėjo pasitarimas, valandinė rodyklė buvo tarp šeštos ir septintos laikrodžio ciferblato padalų, o minutinė — tarp devintos ir dešimtos padalų (357 pieš.).

Vienetu laikykime kampinį kelią, kurį nueina valandinė rodyklė per valandą (tai yra kelią, atitinkantį penkias minutines padalas). Jei pasitarimas prasidėjo x

valandą, tai, vadinasi, kampinis kelias, nueitas valandinės rodyklės iš jos padėties, atitinkančios 12-tą valandą, taip pat bus x.

Jei pasitarimas baigėsi y valandą, tai kampinis kelias, nueitas valandinės rodyklės iš jos pradinės padėties (nuo 12-tos valandos) taip pat bus y. Tą patį kampinį kelią y minutinė rodyklė nuėjo per laiko tarpą nuo 6 val. 00 min. (tada ji buvo ties skaitmeniu 12) iki pasitarimo pradžios momento. Savo ruožtu per tą patį laiko tarpą valandų rodyklė (kuri juda 12 kartų lėčiau), nuo skaitmens 6 nuėjo kampinį kelią, lygų $\frac{y}{12}$. Turime:

$$x=6+\frac{y}{12}.$$

Pasitarimo baigimosi momentu rodyklės pasikeitė vietomis. Analogiškai samprotaudami, gausime:

$$y=9+\frac{x}{12}.$$

Išsprendę gautąsias lygtis kartu, randame, kad $x=6\frac{114}{143}$ val. $=$ 6 val. 47 min. $49\frac{133}{143}$ sek. — pasitarimo pradžios laikas; $y=9\frac{81}{143}$ val $=$ 9 val. 33 min. $59\frac{23}{143}$ sek. — pasitarimo pabaigos laikas.

246. Kadangi pirmasis žvalgas pusę viso laiko ėjo didesniuoju iš dviejų nelygių greičių, tai didesniu greičiu jis nuėjo, aišku, d i d e s n ę k e l i o d a l į, o antrasis žvalgas tokiu pat greičiu nuėjo tik p u s ę k e l i o.

Tegul, kad būtų konkrečiau, kiekvieno žvalgo pradžios greitis yra didesnis už pakeistą greitį. Tada pirmą kelio pusę abu žvalgai ėjo vienodą laiką, bet antrą kelio pusę pirmasis žvalgas nuėjo per mažesnį laiko tarpą, nei antrasis, nes antrasis ėjo visą antrą kelio pusę sumažintu greičiu, o pirmasis — tiktai jo dalį. Vadinasi, ir visą kelią pirmasis žvalgas nuėjo per mažesnį laiko tarpą, nei antrasis. Štai ir visas uždavinio sprendimas — trumpas ir puikus.

Nesunku ir algebriškai pagrįsti tvirtinimą, kad didesniuoju greičiu pirmasis žvalgas nuėjo didesnę kelio dalį. Tegul m ir n — žvalgų greičiai, be to, $m>n$, t — pusė viso laiko kiekio, sugaišto pirmojo žvalgo, s — kelias, nueitas greičiu m, ir s_1 — kelias, nueitas greičiu n.

Kai $m>n$, turime:

$$\frac{s}{t}>\frac{s_1}{t}, \text{ iš kur } s>s_1.$$

Algebriškai sprendimą galima tęsti taip:

visas kelias: $mt + nt$;

pusė kelio: $\frac{mt+nt}{2} = \frac{(m+n)t}{2}$;

pilnas pirmojo žvalgo laikas: $x=2t$;

pilnas antrojo žvalgo laikas: $y=\frac{(m+n)t}{2m}+\frac{(m+n)t}{2n}$.

Imkime skirtumą $y-x$:

$$y-x=\frac{(m+n)t}{2m}+\frac{(m+n)t}{2n}-2t=$$
$$=\frac{(mn+n^2+m^2+mn-4mn)t}{2mn}=\frac{(m-n)^2t}{2mn}.$$

Kadangi visi daugikliai dešinėje pusėje teigiami, tai $y-x>0$, arba $y>x$. Antrasis žvalgas ėjo ilgiau, nei pirmasis.

247. Tegul x — traukinio ilgis, y — jo greitis. Kadangi traukinys praeina pro stebėtoją per t_1 sek., tai yra nueina kelią, lygų savo ilgiui x per t_1 sek., tai $y=\frac{x}{t_1}$. Per t_2 sek. jis pervažiuoja a metrų ilgio tiltą, tai yra per tą laiką nueina kelią, lygų savo ilgio ir tilto ilgio sumai.

Vadinasi, $y=\frac{x+a}{t_2}$. Iš čia $x=\frac{at_1}{t_2-t_1}$; $y=\frac{a}{t_2-t_1}$.

248. Jei geležinkelio ruože yra n stočių, tai kiekviena stotis turi turėti $n-1$ bilietų komplektą, vadinasi, iš viso reikia $n(n-1)$ bilietų komplektų.

Jei ruože buvo x stočių, o bus y, tai reikės $y(y-1)-x(x-1)$ naujų bilietų komplektų. Iš sąlygos turime lygtį

$$y(y-1)-x(x-1)=46, \text{ arba } y^2-x^2-(y-x)=46,$$
$$(y-x)(y+x-1)=46.$$

Kadangi abu dauginamieji turi būti sveiki ir teigiami skaičiai, o $46=2\cdot 23$, tai, aišku,

$$y-x=2, \quad \text{o} \quad y+x-1=23.$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname:

$$x=11, \ y=13.$$

Vadinasi, ruože buvo 11 stočių, o kai atidarys dvi naujas stotis, bus 13 stočių.

249. Sudauginkime kairiąsias ir dešiniąsias puses duotųjų lygybių:

$$a^2=bd \text{ ir } ad=b^2c.$$

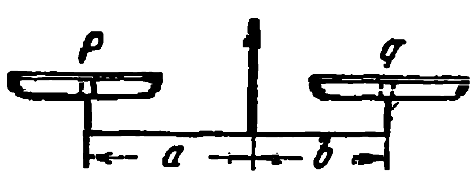
Gausime: $a^3d=b^3dc$, arba, suprastinę iš d: $a^3=b^3c$.

Iš čia seka, kad c turi būti sveiko skaičiaus kubas. Tarp sveikų skaičių nuo 2 iki 15 yra tik vienas skaičius, kuris yra kubas, būtent 8. Vadinasi, $c=8$. Iš čia turime: $a^3=8b^3$ arba $a=2b$.

Kadangi pagal sąlygą $a^2=bd$, tai $4b^2=bd$, arba $4b=d$. Tačiau b negali būti lygus 2, nes tada $d=8$, bet pas mus jau $c=8$, o duotųjų žodžių tarpe nėra dviejų su 8 raidėmis ir b negali būti daugiau už 3, nes duotųjų žodžių tarpe nėra žodžių su 16 raidžių ir daugiau. Vadinasi, $b=3$. Iš čia $a=6$ ir $d=12$. Taigi išrinkti žodžiai turi 6, 3, 8 ir 12 raidžių. Tokie tarp duotųjų žodžių yra: protas, yla, įsakymas, pasiuntinybė.

250. Ne, negali. Tikras cukraus svoris, kurį gaus pirkėjas, bus virš 2 *kg*. Tarybinė moralė neleidžia pirkėjui apgaudinėti pardavėją, lygiai kaip ir pardavėjui pirkėją.

Atlikime skaičiavimus. Jei svarstyklės — pusiausvyroje, tai lygiapetės jos ar nelygiapetės — vis vien bus patenkinta lygybė $ap=bq$, kur a ir b — svarstyklių svirties kairio ir dešinio pečių ilgiai, o p ir q — kairioje ir dešinėje svarstyklių lėkštėse krovinių svoriai (358 pieš.).



358 pieš.

Pagal uždavinio sąlygą $a\neq b$, ir tegul 1 *kg* svarstis atitinka pirmu atveju x *kg* cukraus, o antru y *kg*. Tada $a\cdot 1=bx$ ir $b\cdot 1=ay$. Iš čia $x=\frac{a}{b}$, o $y=\frac{b}{a}$, ir bendras pirkėjo nupirktas cukraus svoris lygus $x+y=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ *kg*. Tačiau bet kurio teigiamo skaičiaus $\frac{a}{b}$ (išskyrus 1) ir jam atvirkščio skaičiaus $\frac{b}{a}$ suma visada didesnė už 2. Iš tikrųjų, $(a-b)^2>0$, jei $a\neq b$. Iš čia

$$a^2-2ab+b^2>0, \text{ arba } a^2+b^2>2ab.$$

Padaliję abi nelygybės puses iš ab, gauname:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

Vadinasi, pardavėjas apsiriko, manydamas, kad pusę krovinio pasvėręs vienoje nelygiapečių svarstyklių lėkštėje, o antrą pusę — antroje lėkštėje, jis gaus teisingą viso krovinio svorį.

Tikras abiejų krovinio «pusių» sumos svoris visada bus didesnis už svarsčių svorį.

251. Jokiais teisėtais pertvarkymais negalima iš lygybės $x+y=2v$ padaryti tokių išvadų, kokių ji neišreiškia. Iš abiejų lygybės

$$(x-v)^2=(y-v)^2$$

pusių ištraukdamas kvadratinę šaknį, algebrinių pertvarkymų mėgėjas išleido iš akių du galimus rezultatus: arba $x-v=y-v$, arba $x-v=v-y$. Tikras gi iš jų — tiktai antrasis ir štai kodėl. Kadangi x ir y — teigiami skaičiai, tai iš pradinės lygybės $x+y=2v$ seka, kad jei $x>v$, tai $y<v$ (pirmas atvejis), ir jei $x<v$, tai $y>v$ (antras atvejis).

Pirmu atveju $x-v>0$, o $y-v<0$, vadinasi, lygybė

$$x-v=y-v$$

negali būti teisinga (teigiamas skaičius negali būti lygus neigiamam).

Antru atveju $x-v<0$, o $y-v>0$, o tai vėl nepatvirtina lygybės

$$x-v=y-v$$

teisingumo. Gi antroji lygybė

$$x-v=v-y$$

neprieštarauja nei pirmo, nei antro atvejo sąlygoms. Priėmęs šią lygybę, mūsų mėgėjas būtų išvengęs klaidos, tačiau... ir nebūtų gavęs, kaip ir reikėjo laukti, jokio naujo rezultato. Iš lygybės $x-v=v-y$ vėl gautų pradinę lygybę $x+y=2v$.

252. Prirašydami penkiaženklio skaičiaus [A] priekyje 1, aišku, mes jį padidiname 100 000.

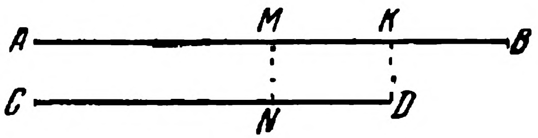
Taigi, [1][A] yra $A+100\,000$. Jeigu mes vienetą prirašome skaičiaus A gale, tai tas tolygu jo padauginimui iš 10 ir pridėjimui prie tos sandaugos vieneto. Taigi, [A] [1] yra $A\times10+1$.

Iš uždavinio sąlygos seka, kad

$$\frac{10A+1}{A+100\,000}=3.$$

Iš čia $10A+1=3A+300\,000$, arba $7A=299\,999$ ir, galiausiai, $A=42\,857$.

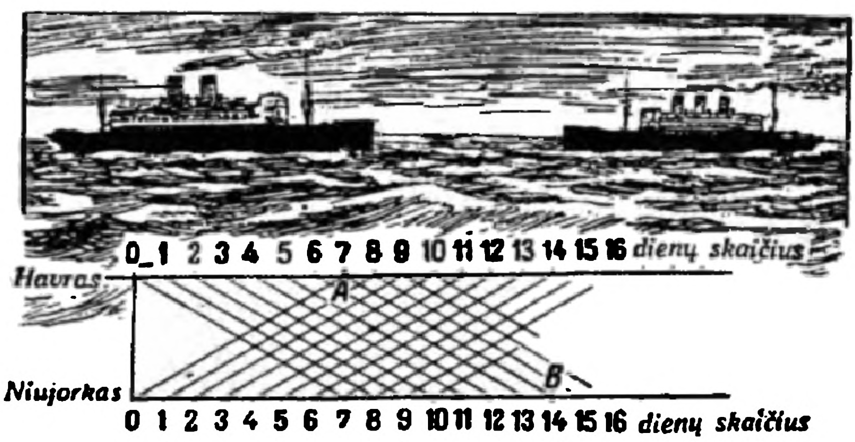
253. Jei mano amžių atvaizduotume atkarpa AB (359 pieš.), o jūsų — atkarpa CD, tai atkarpa KB parodys, prieš kiek metų mano amžius buvo lygus jūsų amžiui. Tačiau prieš tiek metų jūsų amžius



359 pieš.

buvo mažesnis atkarpa $ND=KB$ ir buvo reiškiamas atkarpa CN, kuri 2 kartus trumpesnė už atkarpą AB. Iš čia seka, kad ir atkarpoje MB telpa 2 kartus po atkarpą KB; atkarpoje AB telpa 4 kartus po atkarpą KB, o CD — 3 kartus.

Kada jums bus tiek pat metų, kiek man dabar, tai jūsų amžius bus vaizduojamas atkarpa, lygia atkarpai AB, kurioje, kaip nustatyta, telpa 4 kartus po atkarpą KB. Tačiau ir mano amžius per tą laiką



360 pieš.

padidės atkarpa KB ir bus vaizduojamas atkarpa, kurioje telpa 5 kartus po atkarpą KB.

Pagal sąlygą $4KB+5KB=63$, tai yra atkarpa KB vaizduoja 7 metus. Vadinasi, šiuo metu jums 21 metai, o man 28 metai. Prieš sep-

tynerius metus jums buvo 14 metų, o tai iš tikrųjų sudaro pusę mano šiuolaikinio amžiaus.

254. Dažnai duodamas neteisingas atsakymas, pavyzdžiui, 7. Tai paaiškinama tuo, kad, turint galvoje tuos laivus, kurie turi dar išvykti į kelionę, pamirštama apie tuos, kurie jau kelyje. Labai vaizdingą ir įtikinantį sprendimą galima gauti kiekvieno laivo judėjimo grafikų pagalba (360 pieš.).

Laivas, kurio grafikas atvaizduotas linija *AB*, plaukiąs iš Havro į Niujorką, jūroje sutiks 13 laivų ir dar du: vieną išplaukimo momentu (atplaukusį iš Niujorko), ir vieną atplaukimo į Niujorką momentu (išplaukiantį iš Niujorko), arba iš viso 15 laivų. Grafikai taip pat parodo ir tai, kad kasdien laivai susitiks vidurdienį ir vidurnaktį.

255. Ir čia uždaviniui spręsti ir analizuoti yra patogus grafinis būdas. Ant vertikalios ašies (361 pieš., *a*) atidedame atstumus (kilometrais), o ant horizontalios — laiko momentus (valandomis). Masteliai bet kokie.

Jei visa kelionė atliekama dviračiu (po 15 *km/val*), tai, kaip rodo grafiko *OA* galinis taškas, tam reikia 4 valandų. Jeigu visa kelionė atliekama pėsčiomis (be sustojimų, po 5 *km/val*), tai, kaip rodo grafiko *OB* taškas *B*, tam reikia 12 valandų. Tačiau abu berniukai keliavo pakaitomis pėsčiomis ir dviračiu ir užbaigė savo kelionę vienu metu, vadinasi, jų judėjimo grafikai turi turėti bendrą galinį tašką.

Uždavinio sąlygoje nepasakyta, kiek kartų berniukai keitė savo keliavimo būdą. Sakysime — po vieną kartą. Tokiu atveju jų judėjimo grafikai turi sudaryti lygiagretainį.

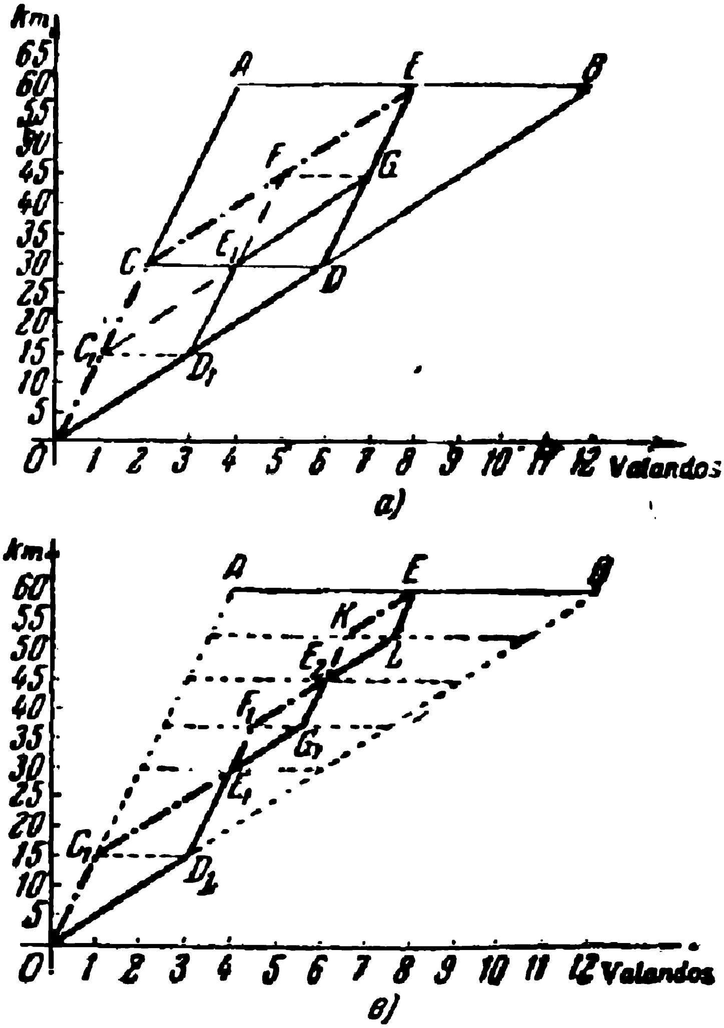
Ir tikrai, tegul dviratininko judėjimo grafikas *OC* kuriame nors taške *C* pasikeitė grafiku *CE*, charakterizuojančiu judėjimą pėsčiomis ir, vadinasi, lygiagrečiu *OB*.

Antrojo berniuko judėjimo grafikas *OD*, pasikeitus judėjimui pėsčiomis judėjimu dviračiu, «perlūžta» tokiame taške *D*, kuris yra horizontalios ašies atžvilgiu viename lygyje su tašku *C*, nes tas berniukas turi nueiti iki tos vietos, kur draugas paliko jam dviratį (tai yra nueiti tokį pat kelią, kokį nuvažiavo dviračiu pirmas berniukas). Likusią kelio dalį antras berniukas važiuoja dviračiu, vadinasi, jo judėjimo dviračiu grafiko atkarpa *DE* lygiagreti *OA*.

Tad figūra *OCED* — lygiagretainis. Figūra *CDBE* — taip pat lygiagretainis ($CE \parallel DB$ ir $CD \parallel BE$).

Sulyginę lygiagretainių kraštines, gauname: $OD = CE$ ir $CE = DB$. Iš čia $OD = DB$.

Vadinasi, taškai *D* ir *C* atitinka viso kelio vidurį. Šiuo atveju keliavimo būdo pasikeitimas įvyksta tiktai vieną kartą 30 *km* atstume nuo berniukų pasivažinėjimo galutinio tikslo. Taškas *E* yra atkarpos



361 pieš.

AB vidurys ir parodo, kad berniukų pasirinkto keliavimo būdo atveju visa kelionė jiems tetruks tiktai 8 valandas vietoje 12 tuo atveju, jei abu visą kelią būtų ėję pėsčiomis.

Bet keliavimo būdo pasikeitimas gali įvykti ir ne vieną kartą. Pagal uždavinio sąlygą, berniukas, važiuojantis dviračiu, pavijęs draugą, užleidžia jam dviratį, o pats toliau keliauja pėsčiomis. Toks vieno berniuko dviračio perdavimo kitam momentas mūsų diagramoje charakterizuojamas judėjimo grafikų susikirtimo tašku. Aišku, kad toks taškas, analogiškas taškui E, gali būti ir taškas E_1 — atkarpos CD vidurys.

Pakartojus samprotavimus, analogiškus ligšioliniams, galima gauti, pavyzdžiui, šiuos judėjimo grafikus: OC_1E_1FE — pirmam berniukui ir OD_1E_1GE — antram berniukui. Šiuo atveju keliavimo būdo pakeitimas paskutinį kartą įvyksta 15 *km* nuo galinio berniukų pasivažinėjimo punkto (361 piešinyje, *a*, lygis FG).

Dabar lengva suprasti, kad berniukų judėjimo grafikus galima paįvairinti.

Pavyzdžiui, po berniukų susitikimo, atitinkančio momentą E_1 (361 pieš., *b*), galima pasiūlyti jiems tokius judėjimo grafikus: $E_1F_1E_2KE$ — pirmam berniukui ir $E_1G_1E_2LE$ — antram. Šiuo atveju paskutinysis berniukų keliavimo būdo pakeitimas įvyks dar arčiau galinio jų pasivažinėjimo punkto, vos tik $7^1/_2$ *km* nuo jo (361 piešinyje, *b*, lygis KL).

Kaip matote iš uždavinio sąlygos, gali būti nesuskaitoma daugybė berniukų judėjimo grafikų variantų ir ta prasme uždavinys yra nepakankamai apibrėžtas. Tačiau vienas atsakymas lieka pilnai apibrėžtas. Kiek kartų berniukai bebūtų keitę savo keliavimo būdą, visa jų kelionė tęsis lygiai 8 valandas.

256. Pavyzdžių galima paimti kiek patinka. Tačiau pavyzdžiais neįrodysi savybės bendrumo. Tam tikslui nepakeičiama yra a l g e b r a ir jos veiksmų su raidėmis taisyklės, kur vietoje kiekvienos raidės, reikalui esant, suprantamas b e t k u r i s g a l i m a s s k a i č i u s.

Tegul $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ — duotosios trupmenos, kurių skaitikliai ir vardikliai — bet kokie teigiami skaičiai. Laikysime, kad jas mes surašėme didėjančia tvarka, taigi, pati mažiausia trupmena bus $\frac{a_1}{b_1}$, o pati didžiausia $\frac{a_n}{b_n}$. Reikia įrodyti, kad

$$\frac{a_1}{b^1} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

Turime:

$$\frac{a_2}{b_2} > \frac{a_1}{b_1} \text{ arba } a_2 > b_2\frac{a_1}{b_1},$$

$$\frac{a_3}{b_3} > \frac{a_1}{b_1} \text{ arba } a_3 > b_3\frac{a_1}{b_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a_1}{b_1} \text{ arba } a_n > b_n\frac{a_1}{b_1}.$$

Iš čia

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n > (b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\frac{a_1}{b_1}.$$

Pridėkime prie kairiosios šios nelygybės pusės a_1, o prie dešiniosios $b_1 \cdot \frac{a_1}{b_1}$, tada

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\frac{a_1}{b_1}.$$

Iš čia

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} > \frac{a_1}{b_1}.$$

Analogiškai yra įrodoma ir antra teorema, tai yra, kad

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

IX skyriui

257. Ketvertą batų ir trejetą puskojinių. Tarpe 4 batų, paimtų iš spintos, 2 būtinai bus vieno fasono; 3 puskojinių tarpe dvi puskojinės bus vienos spalvos. Jeigu paimtume tik 2 ar 3 batus, tai jie gali būti skirtingų fasonų, jei paimtume tiktai 2 puskojines, tai jos gali būti skirtingų spalvų.

258. 1) 4 obuoliai, 2) 7 obuoliai.

259. Negalima, nes po 72 valandų, tai yra po trijų parų vėl bus 12 valanda nakties, o naktį saulė nešviečia (jei tik tai nevyksta už poliarinio rato).

260. Šeštaklasiai savo užduotį viršijo 5 medeliais, todėl ketvirtaklasiai savo užduoties neįvykdė 5 medeliais. Vadinasi, vyresnieji pasodino dešimčia medelių daugiau, nei jaunesnieji.

261. 1) Petios pavardė ne Gridniovas (žr. 3 sąlygą).

2) Burovo motina — tikra Sierovo sesuo (1 sąlyga), tai yra jos mergautinė pavardė — Sierova; tačiau Petios senelis — Mokrousovas (2 sąlyga); vadinasi, jis Petios motinos tėvas, o ne jo tėvo, nes Petios tėvas — arba Burovas, arba Klimenka (žr. 1 teiginį). Vadinasi, Burovo motina ir Petios motina — ne tas pats asmuo. Tuo nustatoma, kad Burovas — ne Petia. Tačiau Burovas — ir ne Kolia, ką taip vikriai išgavo majoras Krylovas iš paties pulkininko Haroldo.

Jei Burovas — ne Petia ir ne Kolia, tai jo vardas — Griša.

3) Jei Burovas — Griša, tai Gridniovas — ne Griša, tačiau jis — ir ne Petia (žr. sprendimo 1 p.). Vadinasi, Gridniovas — Kolia, o Klimenko — Petia.

4) Petia šiais metais būtų pradėjęs mokytis algebros, geometrijos ir fizikos (2 sąlyga), vadinasi, jis būtų mokęsis vidurinės mokyklos 6-toje klasėje, o į pirmą klasę jis įstojo 7 metų, vadinasi, šiuo metu jam 12 metų (suprantama, jis negalvoja, kad būtų likęs antriems metams kurioje nors klasėje).

5) Pagal sąlygą Gridniovas ir Griša vyresni už Petią 1 metais (3 ir 4 sąlygos), vadinasi, Gridniovui ir Burovui po 13 metų.

Galiausiai:

Burovas, Griša, 13 metų,
Gridniovas, Kolia, 13 metų,
Klimenko, Petia, 12 metų.

262. Iš sąlygos seka, kad Mania jaunesnė už Sanią, o Pania vyresnė už Sanią. Pagal amžių jas galima sustatyti į tokią eilę: Mania — Sania — Pania. Iš pirmosios sąlygų dalies seka, kad viena jų vienmetė Taniai. Iš antrosios sąlygų dalies seka, kad Taniai vienmetė gali būti arba Mania, arba Sania. Bet tvirtinimas, kad vienmetės yra Mania ir Tania, prieštarauja trečiajai sąlygų daliai, iš kurios seka, kad Tania vyresnė už Manią. Vadinasi, vienmetė Taniai — Sania. Lengva patikrinti, kad šiuo atveju visos uždavinio sąlygos įvykdomos.

263. Iš pradžių reikia surašyti visų aštuoniolikos šūvių vertes (taškų skaičius), po to išskirstyti jas į 3 eilutes (po 6 skaičius

kiekvienoje) taip, kad kiekvienoje eilutėje taškų suma butų 71. Galimas tik vienas tokio išskirstymo variantas, būtent:

eilutė Nr. 1 — 25, 20, 20, 3, 21 — viso 71 taškas;
eilutė Nr. 2 — 25, 20, 10, 10, 5, 1 — viso 71 taškas;
eilutė Nr. 3 — 50, 10, 5, 3, 2, 1 — viso 71 taškas.

Kadangi pirmieji 2 šūviai Andriušai davė 22 taškus, tai jam ir priklauso eilutė Nr. 1, nes tik šioje eilutėje yra 2 skaičiai, kurių suma lygi 22.

Pirmas šūvis Volodiai davė tris taškus, vadinasi, jam priklauso eilutė Nr. 3 (antroje eilutėje nėra skaičiaus 3). Toje eilutėje yra ir skaičius 50. Vadinasi, į centrinį taikinio ratą pataikė Volodia. Eilutė Nr. 2, aišku, priklauso Boriai.

264. Braižymo ir cheminių pieštukų skaičius, o taip pat paprastų ir spalvotų pieštukų kaina dali 4. Vadinasi, ir visų pieštukų kainų suma taip pat turi būti dali 4, tačiau 890 nesidalija iš 4, vadinasi, sudedant buvo padaryta klaida.

265. 1) Antrojo veiksmo daliklis reiškia sumą skaičių, sudėtų pirmame veiksme. Vadinasi, pasidaro aišku, kad bendras surinktų žolių kiekis išreiškiamas dviženkliu skaičiumi su skaitmeniu 7 gale. Pirmas šio skaičiaus skaitmuo, aišku, 1, nes bet kurių dviejų v i e n a ž e n k l i ų skaičių suma mažesnė už 20. Taigi surinkta 17 *kg* žolių.

2) Dviejų vienaženklių skaičių, būtent 8 ir 9, suma yra 17. Kitų vienaženklių skaičių, kurių suma 17, negali būti, nes, pirmąjį dėmenį padidinus nuo 8 iki 9, antrasis dėmuo sumažėja nuo 9 iki 8, tai yra skaičiai lieka tie patys, o pirmąjį dėmenį sumažinus bent 1, antrasis dėmuo virsta dviženkliu skaičiumi, o tai prieštarauja sąlygai.

3) Antrame veiksme dalijamasis turi būti lygus trečiojo ir ketvirtojo veiksmų rezultatų sumai, tai yra dviejų dviženklių skaičių sumai, bet suma net pačių didžiausių dviženklių skaičių, 99+99=198, prasideda vienetu; vadinasi, antrajame veiksme pirmas dalijamojo skaitmuo yra 1.

4) Antrajame veiksme pirmas dalmens skaitmuo, aišku, taip pat 1, nes dalijamasis ir daliklis prasideda vienetu ir daliklis yra mažesnis skaičius, kaip skaičius, sudarytas iš pirmų dviejų dalijamojo skaitmenų, kitaip dalmenyje nebūtų dviženklio skaičiaus. Iš čia seka, kad antras dalijamojo skaitmuo didesnis už 7.

5) Antrajame veiksme antras dalijamojo skaitmuo yra 8 ar 9, tačiau 9 atkrinta, nes tada trečia eilutė prasidėtų 2, o dviženklis skaičius, kuris prasideda 2, negali dalytis be liekanos iš 17. Vadinasi, antras dalijamojo skaitmuo 8. Tada pirmas trečios eilutės skaitmuo

1, o antras 7, nes dalyba iš 17 buvo atlikta be liekanos. Tokiu būdu, antrajame veiksme dalmuo yra 11.

A t s a k y m a s. Pirma grandis gavo 9×11=99 rub. Antra grandis gavo 8×11=88 rub.

266. Dalmenyje 5 skaitmenys, o po dalijamuoju sandaugų prirašyta tik 3. Vadinasi, 2 ir 5 dalmens skaitmenys turi būti nuliai. Sprendžiant iš sandaugų, — tai ne pirmas ir ne paskutinis dalmens skaitmuo. Taigi nuliai — antras ir ketvirtas skaitmenys, uždengti baltu ir juodu rikiais. Toliau, kada dviženklis daliklis dauginamas iš 8, tai gaunama dviženklė sandauga, tačiau kada daliklis dauginamas iš skaičiaus, paslėpto dalmenyje po baltuoju bokštu, tai gaunama triženklė sandauga. Vadinasi, skaičius, uždengtas baltuoju bokštu, turi būti didesnis už 8 — aišku, 9. Paskutinį dalmens skaitmenį padauginę iš daliklio, taip pat gauname triženklę sandaugą, vadinasi, paskutinis dalmens skaitmuo kaip ir pirmas lygus 9. Dalmuo surastas pilnai: 90 809.

Dabar rasime daliklį. Jo sandauga iš 8 yra dviženklis skaičius, o sandauga iš 9 yra triženklis skaičius. Vienintelis dviženklis skaičius, patenkinantis šį reikalavimą, — 12, nes 12×8=96, o 12×9=108. Taigi daliklis — 12. Padauginę daliklį (12) iš dalmens (90 809) ir pridėję liekaną 1, gausime dalijamąjį, lygų 1 089 709.

267. P i r m a s r e b u s a s. Pradžioje išnagrinėkime skaičiaus ABC sandaugą iš A (ketvirta eilutė). Paskutinis šios sandaugos skaitmuo — A, vadinasi, jis ne 1, nes priešingu atveju ir C būtų 1, tačiau pagal sąlygą skirtingos raidės atitinka nevienodus skaitmenis.

Taip pat pastebime, kad A ne didesnis už 3, nes priešingu atveju nagrinėjama sandauga turėtų daugiau kaip tris skaitmenis, o piešinys parodo, kad ji triženklė. Vadinasi, A gali būti tiktai arba skaičius 2, arba skaičius 3.

Tegul $A=3$. Koks turi būti C, kad 3 ir C sandauga baigtųsi skaitmeniu 3? Šią sąlygą patenkina tiktai $C=1 (3\cdot 1=3)$. Tačiau C negali būti vienetas, nes skaičiaus ABC sandauga iš C — keturženklis skaičius (trečia eilutė). Vadinasi, A nelygus 3, taigi, tada $A=2$. Vėl paieškome C tokio, kad sandauga $2\cdot C$ baigtųsi skaitmeniu 2. Vienintelė galima C reikšmė — skaičius 6.

Dabar išnagrinėkime skaičiaus $2B6$ sandaugą iš B (penkta eilutė). Paskutinis šios sandaugos skaitmuo lygus B; bet gi jis gaunamas, sudauginus 6 su B. Raidei B galimos 3 reikšmės: 4, 6 ir 8, tačiau 246×4=984 — triženklis skaičius, o sandauga turi būti keturženklė; reikšmė 6 taip pat atkrinta, nes $C=6$. Vadinasi, $B=8$. Taigi, $ABC=$ $=286$ ir $BAC=826$.

Antras rebusas. 1) Kadangi, padauginus triženklį skaičių iš 2, gaunama keturženklis skaičius (ketvirta eilutė), o trečioje ir penktoje eilutėse skaičiai yra triženkliai, tai abu kraštiniai antros eilutės skaičiai turi būti mažesni už 2, vadinasi, jie abu lygūs 1.

Tokiu būdu, daugiklis lygus 121.

2) Kadangi penkta eilutė gaunama, dauginamąjį padauginus iš 1, tai esantis penktoje eilutėje skaitmuo 8 parodo, kad antras dauginamojo skaitmuo (pirma eilutė) lygus 8, vadinasi, ir trečios eilutės antrasis skaitmuo — taip pat 3 (trečia eilutė gaunama, padauginus pirmą eilutę iš 1). Taigi, turime:

$$\begin{array}{r} \ast 8 \ast \\ \times \; 121 \\ \hline \ast 8 \ast \\ + \ast\ast\ast\ast\; \\ \ast 8 \ast \;\;\; \\ \hline \ast\ast 9 \ast 2 \ast \end{array}$$

3) Pirmos eilutės pirmas skaitmuo didesnis už 4, kitaip ketvirta eilutė negalėtų būti keturženklis skaičius, bet jei pirmos eilutės pirmas skaičius būtų net ir 9, tai vis vien ketvirtos eilutės pirmas skaičius yra nedidesnis už 1. Taip pat aišku, kad ketvirtos eilutės paskutinis skaitmuo 4 (suma turi baigtis skaitmeniu 2; žr. šeštą eilutę).

4) Dabar aišku, kad šeštos eilutės pirmas skaitmuo gali būti tik 1, o penktosios pirmas skaitmuo (vadinasi, taip pat trečios ir pirmos eilučių) — arba 8, arba 9, kitaip tariant, šešta eilutė nebus šešiaženklis skaičius.

$$\begin{array}{r} \ast 8 \ast \\ \times \; 121 \\ \hline \ast 8 \ast \\ + 1\ast\ast 4\; \\ \ast 8 \ast \;\;\; \\ \hline \ast\ast 9 \ast 2 \ast \end{array}$$

5) Kadangi paskutinis ketvirtos eilutės skaitmuo lygus 4 (žr. 3 p.), tai pirmos, trečios ir penktos eilučių paskutinis skaitmuo — arba 2, arba 7.

6) Ketvirtos eilutės trečias skaitmuo — arba 6, arba 7, nes pastarasis skaitmuo yra sandaugos 2×8, kraštutiniu atveju padidintos vienetu, paskutinis skaitmuo. Ketvirtos eilutės antras skaitmuo —

arba 7, arba 9, priklausomai nuo to, ar bus pirmos eilutės pirmas skaitmuo 8, ar 9 (žr. 4 p.). Jei ketvirtos eilutės antras skaitmuo būtų skaitmuo 7, tai stulpelį, kuriame jis yra (7+8), būtų tekę papildyti skaičiumi 4, kad gautųsi atitinkamas tam stulpeliui skaitmuo 9, parodytas sandaugoje, bet trečiojo stulpelio trijų skaičių suma (net jei jie visi būtų devyniukės) negali duoti kitai skilčiai daugiau kaip du vienetus (didžiausia galima sumos reikšmė 28). Vadinasi, ketvirtos eilutės antras skaitmuo — 9.

7) Iš 6 ir 4 sąlygų seka, kad pirmos eilutės (vadinasi, ir trečios bei penktos eilučių) pirmas skaičius gali būti tik skaitmuo 9:

```
 ×98*
   121
  ----
   98*
  19*4
+ 98*
------
**9*2*
```

8) Kadangi paskutinis nežinomasis dauginamojo skaitmuo nustato visus likusius sandaugos skaitmenis, tai aišku, kad pirmos eilutės trečias skaitmuo — ne 2, o 7 (žr. 5 p.). Jei pirmos eilutės paskutinis skaitmuo būtų 2, tai negalėtų šeštos eilutės trečias skaitmuo gautis 9.

Taip paaiškėjo, kad yra galima atstatyti visus sušifruotus skaitmenis. Galutinis rezultatas:

```
  ×987
   121
  ----
   987
  1974
+ 987
------
119427
```

T r e č i a s r e b u s a s. 3 125 : 25 = 125.
K e t v i r t a s r e b u s a s. 7 375 428 413 : 125 473 = 58 781.
P e n k t a s r e b u s a s. 1 337 174 : 943 = 1 418,

arba 1 202 464 : 848 = 1 418,
arba 1 343 784 : 949 = 1 416,
arba 1 200 474 : 846 = 1 419.

Š e š t a s r e b u s a s. 1 091 889 708 : 12 = 90 990 809.

268. Pagal sąlygą kupėje — 2 gydytojai, 2 mokytojai ir 2 inžinieriai. Taip pat žinoma, kad *A* — gydytojas, *E* — mokytojas ir *C* — inžinierius. Nustatykime *B* profesiją: *B* — ne maskvietis («*B* ir maskvietis išlipo Kijeve»), vadinasi, ir ne gydytojas («*A* ir maskvietis — gydytojai»), *B* — ne inžinierius, nes jei būtų inžinierius, tai jis — tulietis («tulietis ir *C* — inžinieriai»), bet jis ne tulietis, nes žinoma, kad *B* — Tėvynės karo dalyvis, o tulietis armijoje netarnavo. Lieka paskutinė prielaida: *B* — m o k y t o j a s. Ji neprieštarauja nei vienai uždavinio sąlygai. Nustatykime *F* profesiją. Jis, kaip ir *B*, karo dalyvis, vadinasi, ne tulietis, taigi, ir ne inžinierius. Mokytojas jis taip pat negali būti, nes abu mokytojai jau paaiškėjo (*B* ir *E*). Vadinasi, *F* — g y d y t o j a s. Dabar aišku, kad *D* — i n ž i n i e r i u s.

Iš sąlygos matyti, kad *F* — maskvietis, *B* — leningradietis, *D* — tulietis. Nustatykime *A*, *C*, ir *E* gyvenamąsias vietas. Iš jų *A* — ne charkovietis («charkovietis vyresnis už *A*») ir *C* — ne charkovietis, nes sąlygoje pasakyta, kad *C* ir charkovietis išlipo Vinicoje. Vadinasi, charkovietis — *E*. Kuris gi odesietis: — *A* ar *C*? Sąlygoje pasakyta: «odesietis vyresnis už *C*». Vadinasi, odesietis — *A*. Keleivis *C* — kijevietis.

269. Piaunant metrinius apvalius rąstus į pusmetrinius gabalus, gabalų kiekis turi būti dalus dviem. Piaunant pusantro metro rąstus — gabalų kiekis turi būti dalus 3, o piaunant dvimetrius — dalus 4.

Lavrovas ir Kotovas supiovė 26 gabalus (dalijasi iš 2),

Galkinas ir Pastuchovas — 27 (dalijasi iš 3) ir

Medvedevas su Jevdokimovu — 28 (dalijasi iš 4).

Vadinasi, pusantro metro ilgio malkas piovė Galkinas ir Pastuchovas, kurių vardai pagal uždavinio sąlygas buvo Petia ir Kostia, tačiau Petia — brigadininkas, o Pastuchovas — ne brigadininkas. Taigi Pastuchovas — Kostia.

270. Yra žinoma, kad palydovas gyvena lygiai pusiaukelyje tarp Maskvos ir Leningrado (2). Vienas iš keleivių gyvena Maskvoje (1), kitas — Leningrade (3), vadinasi, nei tas, nei kitas pagal jo gyvenamąją vietą negali būti artimiausias palydovo kaimynas (4). Taigi artimiausias konduktoriaus kaimynas — ne Ivanovas (1), ir ne Petrovas (5), kurio mėnesinis uždarbis nesidalija iš 3 (4), o Sidorovas. Todėl palydovas — ne Sidorovas (3). Pečkurys taip pat ne Sidorovas (6). Vadinasi, Sidorovas — m a š i n i s t a s.

Dabar nesunku sužinoti ir kitų traukinio brigados narių pavardes. Kadangi keleivis Ivanovas gyvena Maskvoje, o keleivis Sidorovas — arčiau kelio Maskva—Leningradas vidurio, tai, aišku, ke-

leivis Petrovas gyvena Leningrade (3). Vadinasi, palydovo pavardė — Petrovas (3). Pečkurio pavardė — Ivanovas.

271. Jei (3) teisingas, tai ir (10), ir (12) — melas, o tai pagal sąlygą neįmanoma. Vadinasi, (3) — melas (tai yra piniginę pavogė ne Teo). Kadangi (3) — melas, tai ir (9) — melas. Kadangi (9) — melas, tai (8) — teisingas. Kadangi (8) — teisingas, tai (15) — melas. Jei (15) — melas, tai (14) — teisingas. Vadinasi, kalta yra Džudi.

272. Motociklininkas išbuvo kelyje 20 min. mažiau, negu jam paprastai trukdavo kelionė iki aerodromo ir atgal. Laikas buvo sutaupytas dėl to, kad šį kartą motociklininkui neteko nuvažiuoti iki aerodromo. Tas 20 min. jis būtų sugaišęs kelyje nuo susitikimo su raiteliu vietos iki aerodromo ir atgal. Vadinasi, kad nuvažiuotų tą kelią į vieną galą, pavyzdžiui, nuo susitikimo su raiteliu vietos iki aerodromo, motociklininkui būtų prireikę 10 min. Tačiau mes žinome, kad motociklininkas susitiko su raiteliu po to, kai jis išbuvo kelyje 30 min., tai yra praėjus pusvalandžiui po lėktuvo atvykimo. Kadangi motociklininkas iš pašto skyriaus išvyko laiku, tai, vadinasi, pridėjus prie šių 30 min. tas 10 min., kurių reikia motociklininkui nuvykti į aerodromą, mes sužinome, kad lėktuvas atvyko į aerodromą 40 min. anksčiau nustatyto laiko.

273. Samprotavimai analogiški anksčiau pateiktiems. «Pobieda» sugrįžo į gamyklą 10 min. anksčiau, nei paprastai, todėl, kad ji neprivažiavo iki stoties. Tai yra tos 10 min., kurių bėgyje «Pobieda» būtų turėjusi atlikti kelią nuo susitikimo su inžinieriumi vietos iki stoties ir atgal. Vadinasi, kad atliktų kelią į vieną galą, pavyzdžiui, nuo stoties iki susitikimo su inžinieriumi vietos, «Pobiedai» būtų prireikę 5 min. O kad tą nuotolį nueitų pėsčiomis, inžinierius sugaištų 25 min. (30 min. — laikas, kiek jis anksčiau atvažiavo, minus 5 min.). Vadinasi, inžinieriaus ir «Pobiedos» susitikimo momentu buvo 8 val. 25 min.; o pėsčiomis inžinierius eina 5 kartus lėčiau, negu važiuoja automobiliu.

274. 1) Sakysime, kad nė vienas dauginamasis nėra didesnis už 8. Tada galimi 3 atvejai: a) kiekvienas dauginamasis lygus 8, b) vienas iš dauginamųjų lygus 8, antras mažesnis už 8, c) abu dauginamieji mažesni už 8. Lengva matyti, kad kiekvienu iš tų atvejų sandauga mažesnė už 75, o tai prieštarauja sąlygai. Vadinasi, kraštutiniu atveju vienas iš dauginamųjų didesnis už 8.

2) Sakykime, kad pirmas skaitmuo skiriasi nuo 1. Tada jis ne mažesnis už 2, o pats skaičius ne mažesnis už 20. Tačiau sandauga 20 ir 5 lygi 100, vadinasi, nagrinėjamojo dviženklio skaičiaus sandauga iš 5 ne mažesnė už 100, kitaip tariant, nėra dviženklis

skaičius, o tai prieštarauja sąlygai. Vadinasi, pirmas duotojo dviženklio skaičiaus skaitmuo yra 1.

275. Pirmas uždavinys. Suskirstome 9 monetas į 3 lygias grupes ir dedame po 3 monetas į kiekvieną svarstyklių lėkštę (pirmas pasvėrimas); trečią grupę paliekame nuošalyje. Galimi du atvejai.

Pirmas atvejis. Svarstyklės lieka pusiausvyroje; tada ieškomoji moneta — tarpe paliktų nuošalyje. Išrenkame iš tų trijų monetų bet kurias 2 ir dedame po vieną į kiekvieną svarstyklių lėkštę (antras pasvėrimas). Jeigu dabar pusiausvyros nebus, tai lėkštė su netikra (lengvesne) moneta pakils į viršų; jeigu svarstyklės liks pusiausvyroje, tai ieškomoji moneta — trečioji, nepakliuvusi ant svarstyklių.

Antras atvejis. Pusiausvyros nėra; vadinąsi, ieškomoji moneta — toje lėkštėje, kuri pakilo į viršų. Tokiu būdu, ir šiuo atveju pirmas pasvėrimas nustato monetų trejetą, kurių tarpe — ieškomoji. Antru pasvėrimu (taip pat, kaip ir pirmu atveju) išskiriame ieškomąją monetą.

Antras uždavinys. Sprendžiamas analogiškai pirmam uždaviniui. Jis sunkesnis tuo, kad reikia susiprasti suskirstyti duotąsias 8 monetas į nelygias grupes: dvi grupes, po tris monetas kiekvienoje, ir vieną iš 2 monetų. Dedame ant svarstyklių pirmas 2 grupes — po 3 monetas į kiekvieną svarstyklių lėkštę (pirmas pasvėrimas). Jei svarstyklės liks pusiausvyroje, tai ieškomoji moneta — tarpe likusių dviejų ir ją, kaip lengvesnę, iš karto išskirsime antru pasvėrimu. Jei svarstyklės neliks pusiausvyroje, tai netikra moneta — toje svarstyklių lėkštėje, kuri pakilo į viršų. Dabar iš tų monetų išrenkame bet kurias 2 ir dedame po vieną į kiekvieną svarstyklių lėkštę (antras pasvėrimas). Jei pusiausvyros nebus, tai vėl lėkštė su netikra moneta pakils į viršų; jeigu svarstyklės liks pusiausvyroje, tai ieškomoji moneta — trečioji, nepakliuvusi ant svarstyklių.

Trečias uždavinys. Visas sunkumas tas, kad iš anksto nežinoma, ar netikroji moneta lengvesnė, ar sunkesnė už tikrąją. Todėl čia, išskirstant monetas į 3 grupes, po 4 monetas kiekvienoje grupėje, būtina jas individualizuoti, pavyzdžiui, sunumeruoti. Į vieną svarstyklių lėkštę padėkime pirmą monetų grupę, turinčią, sakysim, numerius 1, 2, 3 ir 4, į antrą svarstyklių lėkštę — antrą monetų grupę su numeriais 5, 6, 7 ir 8 (pirmas pasvėrimas). Galimi 2 atvejai.

Atvejis A. Svarstyklės pusiausvyroje. Vadinasi, netikroji moneta — tarp trečios grupės monetų su numeriais 9, 10, 11 ir 12. Dabar sulyginame trijų iš jų, pavyzdžiui, devintos, dešimtos ir vienuoliktos, svorius su pirmos, antros ir trečios monetos svoriais (antras pasvė-

r i m a s). Jei svarstyklės liks pusiausvyroje, tai netikroji moneta — dvyliktoji, ir, sulyginę ją, pavyzdžiui, su pirmąja. apie kurią yra žinoma, kad ji — tikra (t r e č i a s p a s v ė r i m a s), nustatome, ar bus netikroji moneta sunkesnė už tikrąją, ar lengvesnė. Jeigu antro pasvėrimo metu nebus pusiausvyros, tai netikra moneta arba Nr. 9, arba Nr. 10, arba Nr. 11, be to, pagal svarstyklių lėkščių su tomis monetomis padėtį iš karto nepaaiškėja, kokia ji — sunkesnė ar lengvesnė. Sakykime, persvėrė lėkštė su monetomis Nr. 9, 10, 11. Vadinasi, netikroji — sunkesnė. Kad ją išskirtume iš trijų numerių, pakanka dar vieno (trečio) pasvėrimo. Tam ant svarstyklių padėkime monetas Nr. 9 ir 10. Tada netikra arba persvers, arba ji bus Nr. 11.

Atvejis B. Pirmąjį kartą sveriant nebuvo pusiausvyros. Persvėrė, sakysim, lėkštė su monetomis Nr. 1, 2, 3 ir 4. Tada arba ieškoma moneta tarp Nr. 1, 2, 3 ir 4 ir sunkesnė, arba tarpe Nr. 5, 6, 7 ir 8 ir lengvesnė. Tuo pačiu paaiškėja, kad trečios grupės monetos su Nr. 9, 10, 11 ir 12 — tikros. A n t r u s v ė r i m u sulyginame monetas Nr. 9, 10, 11 ir 5 (tris tikras ir vieną iš lengvesniųjų grupės), su monetomis Nr. 3, 4, 6 ir 7 (dvi iš sunkesniųjų grupės ir dvi iš lengvesniųjų grupės). Tada galimi trys atvejai:

a) Svarstyklės pusiausvyroje. Tai reiškia, kad atrinktos monetos — tikros, o netikroji arba tarpe Nr. 1 ir 2 ir yra sunkesnė, arba Nr. 8 ir yra lengvesnė. Sulyginę monetas Nr. 1 ir 2 (t r e č i a s p a s v ė r i m a s), nustatome, kad netikroji moneta yra lengvesnė ir jos Nr. 8, jei svarstyklės liks pusiausvyroje, arba, kad netikroji — sunkesnė ir arba Nr. 1, arba Nr. 2 — ta, kuri persvers.

b) Persvers monetų Nr. 9, 10, 11 ir 5 grupė. Tada šioje grupėje negali būti netikrosios, nes Nr. 9, 10 ir 11 tikrosios, o jei netikroji būtų moneta Nr. 5, paimta iš lengvesniųjų grupės, tai negalėtų persverti lėkštės su trimis tikromis monetomis ir viena netikra — lengva. Vadinasi, netikroji — antroje svarstyklių lėkštėje tarpe Nr. 3, 4, 6 ir 7 ir, butent, tarpe tų, kurios paimtos iš lengvesnių grupės, tai yra arba Nr. 6, arba Nr. 7. Iš tų dviejų lengvesnioji (t r e č i a s p a s v ė r i m a s) ir yra netikra.

c) Persvers monetų Nr. 3, 4, 6 ir 7 grupė. Tada arba netikra moneta sunkesnė ir, vadinasi, yra nusvirusioje lėkštėje tarpe monetų, paimtų iš sunkesniųjų grupės, tai yra netikroji moneta yra arba Nr. 3, arba Nr. 4, arba netikra moneta lengvesnė ir, vadinasi, yra monetų Nr. Nr. 9, 10, 11 ir 5 grupėje. Pastaruoju atveju — tai moneta Nr. 5, nes yra žinoma, kad monetos su Nr. 9, 10 ir 11 — tikros.

Tokiu būdu, netikra moneta gali būti viena iš trijų: Nr. 3 ar Nr. 4 (ir tada ji sunkesnė), arba Nr. 5 (ir tada ji lengvesnė).

Dedame ant svarstyklių monetas Nr. 3 ir 4 (trečias pasvėrimas), ir tada arba netikroji (sunkesnė) bus ta, kuri persvers, arba, pusiausvyros atveju, netikroji (lengvesnė) moneta bus moneta Nr. 5.

276. Sunumeruokime sąlygose paminėtus faktus.

1) 1-me rate pulkininkas lošė su kavaleristu.

2) 1-me rate lakūnas nelošė.

3) 2-me rate pėstininkas lošė su jefreitoriumi.

4) 2-me rate majoras lošė su viršila.

5) Po 2-o rato kapitonas iš turnyro pasitraukė.

6) Dėl to 3-me rate buvo laisvas seržantas.

7) Dėl to 4-me rate buvo laisvas tankistas.

8) Dėl to 5-me rate buvo laisvas majoras.

9) 3-me rate leitenantas lošė su pėstininku.

10) 3-me rate pulkininkas lošė su artileristu.

11) 4-me rate pionierius lošė su leitenantu.

12) 4-me rate viršila lošė su pulkininku.

13) Po 6-to rato buvo baigiama kavaleristo ir minosvaidininko partija.

Sudarykime, derinant turnyro dalyvius su jų specialybėmis, lentelę ir atitinkamuose lentelės langeliuose nurodykime numerius sąlygų, dėl kurių negali būti atitinkamo derinimo (žr. lentelę).

	Pėstininkas	Lakūnas	Tankistas	Artileristas	Kavaleristas	Minosvaidininkas	Pionierius	Ryšininkas
Pulkininkas	9—10	1—2	7—12	10	1	1—13	11—12	+
Majoras	3—4	—	7—8	+	—	—	—	—
Kapitonas	5—9	+	5—7	5—10	5—13	5—13	5—11	—
Leitenantas	9	—	7—11	9—10	+	—	11	—
Viršila	3—4	—	7—12	10—12	1—12	+	11—12	—
Seržantas	6—9	—	6—7	6—10	—	—	+	—
Jefreitorius	3	—	+	—	—	—	—	—
Eilinis	+	—	—	—	—	—	—	—

Iš lentelės seka, kad pulkininkas-ryšininkas (pažymėkime ženklu «plius»). Kiti šachmatininkai — ne ryšininkai (dedame «minus» ženklą į laisvus lentelės stulpelio langelius). Čia pat paaiškėja kapitono specialybė. Kapitonas-lakūnas. Į atitinkamą lentelės langelį statome «plius»; į likusius to stulpelio langelius įrašome «minusus». Tokiu būdu lengvai nustatomos visų turnyro dalyvių specialybės.

Galiausiai:

pulkininkas — ryšininkas,
majoras — artileristas,
kapitonas — lakūnas,
leitenantas — kavaleristas,
viršila — minosvaidininkas,
seržantas — pionierius,
jefreitorius — tankistas,
eilinis — pėstininkas.

Skaitytojams — šachmatininkams siūloma sudaryti šiam turnyrui atitinkančią turnyrinę lentelę.

277. *A* samprotavo taip: «Mano draugų popierėliai balti, vadinasi, mano popierėlis gali būti baltas, o gali būti ir juodas. Sakysime, jis juodas. Tada *B* gali pareikšti, kokia jo popierėlio spalva, nes jis gali sau pasakyti: «Aš matau, kad *A* popierėlis juodas, o *C* — baltas, vadinasi, mano gali būti arba baltas, arba juodas; tačiau jis negali būti juodas, nes tada *C*, žinodamas, kad juodų popierėlių tiktai du, ir matydamas mano ir *A* juodus popierėlius, tučtuojau pareikštų apie savo popierėlio spalvą. Tačiau *C* tučtuojau nepareiškė apie tai, taigi jis galvoja, ar tik ne juodas jo popierėlis, nes tada, vadinasi, jis mato, kad mano popierėlis baltas». Tačiau *B* taip pat tyli, vadinasi, mano popierėlis — ne juodas. Bet jei jis — ne juodas, tai — b a l t a s».

Taip samprotavo *A*, pasitikėdamas savo draugų sugebėjimais tiek pat logiškai protauti. Analogiškai samprotavo ir du kiti draugai, todėl jie visi vienu metu ir padarė teisingą išvadą, kad kiekvieno iš jų popierėlis yra b a l t a s.

278. *A* samprotavo taip: «Kiekvienas iš mūsų gali galvoti, kad jo veidas švarus. *B* užtikrintas, kad jo veidas švarus, ir juokiasi iš nutepto išminčiaus *C* veido. Tačiau, jei *B* matytų, kad mano veidas švarus, tai jis būtų nustebęs *C* juoku, nes tokiu atveju *C* neturėtų priežasties juoktis. Tačiau *B* nenustebęs, vadinasi, jis gali galvoti, kad *C* juokiasi iš manęs. Taigi mano veidas išteptas».

279. 1) a) Nereikalingas žodis: «dviejų». b) Nereikalingi žodžiai: «stačiojo trikampio» ir «smailusis».

2) a) Styga. b) Trikampis. c) Skersmuo. d) Lygiakraštis trikampis. e) Koncentriški apskritimai.

3) Aukštinė, pusiaukraštinė, pusiaukampinė, simetrijos ašis, geometrinė vieta taškų, vienodai nutolusių nuo atkarpos *AC* galų.

4) Geometrinis vaizdas ⟶ plokščioji figūra ⟶ daugiakampis ⟶ iškilasis daugiakampis ⟶ lygiagretainis ⟶ rombas ⟶ kvadratas.

5) Iškilojo daugiakampio visų priekampių suma lygi keturiems statiems kampams, vadinasi, joks iškilasis daugiakampis negali turėti daugiau kaip 3 bukus priekampius. Iš čia išplaukia, kad joks iškilasis

daugiakampis negali turėti daugiau kaip tris smailius vidaus kampus. Trys smailūs kampai gali būti trikampyje.

280. 1) Įrodyta, kad ieškomasis skaičius lyginis ir dalus 9, vadinasi, jis dalus 18. Taip pat įrodyta, kad jis didesnis už 10, bet mažesnis už 25. Iš čia tuoj pat seka, kad ieškomasis skaičius 18, nes tarp 10 ir 25 skaičius 18 — vienintelis skaičius, pasidalijantis iš 18.

Patikrinimas:

$$18 \times 4\frac{1}{2} = 81.$$

2) a) Tarpe ieškomųjų skaičių nėra skaičiaus 10, nes tada jų sandauga baigtųsi nuliu.

b) Jei visi ieškomieji skaičiai būtų didesni už 10, tai jų sandauga būtų didesnė už $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, tai yra didesnė už 10 000. Vadinasi, tarpe ieškomųjų skaičių turi būti skaičiai, mažesni už 10.

c) Įrodyta, kad bent vienas iš ieškomųjų skaičių mažesnis už 10. Tačiau ieškomieji skaičiai pagal sąlygą paeiliui vienas nuo kito skiriasi vienetu; kadangi nė vienas iš jų neturi būti lygus 10, tai, vadinasi, visi 4 ieškomieji skaičiai mažesni už 10 (vienaženkliai).

d) Tarpe ieškomųjų vienaženklių skaičių nėra 5, nes priešingu atveju būtų ir skaičius 4 arba 6, todėl ieškomųjų skaičių sandauga baigtųsi nuliu.

e) Išnagrinėkime 2 galimas grupes vienaženklių skaičių, patenkinančių uždavinio sąlygą:

$$e_1)\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ ir } e_2)\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Pirmoji grupė atkrenta, nes $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; vadinasi, jei uždavinys turi sprendinį, tai ieškomąjį skaičių gali sudaryti tiktai skaičiai: 6, 7, 8 ir 9.

Patikrinimas: $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3\,024$.

281. Senas mašinistas samprotavo taip: mokinio amžius turi būti ne mažesnis už 3 metus (pagal sąlygą) ir ne didesnis už 12 (pagal žodžio «vaikas» prasmę). Vadinasi, po trijų metų vaikui bus ne mažiau kaip šeši ir ne daugiau kaip 15 metų. Tačiau tarp skaičių 6 ir 15 yra tik vienas toks skaičius (sveikas), iš kurio galima tiksliai ištraukti kvadratinę šaknį, būtent, 9. Taigi, vaiko amžius yra $9-3=$ $=6$ metai.

Galia turėjo galvoje šiuos sprendimus.

a) Aritmetinis. Tegul a — vaiko amžius prieš 3 metus. Pagal uždavinio sąlygą to skaičiaus kvadratas didesnis už jį patį šešiais, tai yra $a^2-a=6$, arba $a(a-1)=6$.

Jei sakytume, kad a — sveikas skaičius, tai a ir $a-1$ yra skaičiaus 6 dalikliai. Tačiau $6=3\cdot2=6\cdot1$. Iš tų dviejų suskaidymų tiktai pirmasis duoda daugiklius, kurie skiriasi vienetu. Vadinasi, $a=3$, o vaiko amžius yra $3+3=6$ metai.

b) Algebrinis. Tegul x — vaiko amžius šiuo metu. Prieš tris metus jam buvo $x-3$ metai, o po 3 metų bus $x+3$ metai. Pagal sąlygą $x+3=(x-3)^2$. Iš čia $x^2-7x+6=0$. Šios lygties šaknys $x_1=6$ ir $x_2=1$. Tačiau pagal uždavinio prasmę $x>3$. Vadinasi, turime vieną sprendinį: $x=6$.

282. Tą skaičių tarpą, kuriame yra pasirinktasis skaičius, reikia padalyti per pusę ir išaiškinti, kurioje pusėje yra pasirinktasis skaičius; su dvigubai sumažintu tarpu vėl pasielkite taip pat ir t. t., tai yra, kaip pasakytų artileristai, paimkite pasirinktą skaičių «į šakutę» ir spauskite tą «šakutę», kol visiškai «pataikysite į taikinį».

Iš kur gi matyti, kad tam pakanka dešimties klausimų?

Todėl, kad dešimčiakartė skaičių nuo 1 iki 1 000 tarpo dalyba pusiau atves prie tarpo, susidedančio tiktai iš dviejų skaičių, kurių vienas — ieškomasis. Tikrai, imkime tarpą, susidedantį iš dviejų skaičių: *1* ir *2*. Padvigubinkime jį. Gausime skaičių nuo 1 iki 4 tarpą. Ir vėl padvigubinkime. Viršutine tarpo riba tampa skaičius 8, arba 2^3. Dar kartą padvigubinkime. Viršutinė riba pasistums iki skaičiaus 16, arba 2^4.

Tęsdami skaičių tarpo padvigubinimą, praplėsime jo ribas nuo 1 iki 2^5, po to nuo 1 iki 2^6 ir t. t., kol tarpo viršutinė riba nepasieks skaičiaus $2^{10}=1\,024$, kuris, kaip matote, net trupučiu viršija 1 000.

Kaip užduoti klausimus, paaiškinsiu pavyzdžiais.

1 pavyzdys. Tegul pasirinktas skaičius 1. Klausiame:

1) Pasirinktasis skaičius didesnis už 512 (pusė tarpo nuo 1 iki 1 024)?

— Ne.

2) Pasirinktasis skaičius didesnis už 256 (pusė tarpo nuo 1 iki 512)?

— Ne.

3) Jis didesnis už 128 (pusė to tarpo, kuriame jis gali būti)?

— Ne.

4) Jis didesnis už 64? — Ne.
5) Jis didesnis už 32? — Ne.
6) Jis didesnis už 16? — Ne.
7) Jis didesnis už 8? — Ne.
8) Jis didesnis už 4? — Ne.
9) Jis didesnis už 2? — Ne.
10) Jis didesnis už 1?

Pasirinkęs skaičių 1, žinoma, ir į šį klausimą turi atsakyti neigiamai — ne.

Tada mums pasidaro aišku, kad pasirinktasis skaičius 1.

2 pavyzdys. Tegul pasirinktas skaičius 860. Klausiame:

1) Pasirinktasis skaičius didesnis už 512? — Taip.

Vadinasi, ieškomasis skaičius yra tarpe nuo 512 iki 1 000; patogumo dėlei laikysime, kad jis — tarpe nuo 512 iki 1 024. Imame pusę to tarpo, tai yra 256, pridedame prie 512 ir klausiame:

2) Jis didesnis už 768? — Taip.

Atžymime, kad ieškomasis skaičius yra tarpe 768—1 024. Pridedame prie 768 pusę to tarpo, tai yra 128, ir klausiame:

3) Jis didesnis už 896? — Ne.

Įsidėmime, kad ieškomasis skaičius tarpe 768—896. Prie 768 pridedame (arba atimame iš 896) pusę to tarpo, tai yra 64 ir klausiame:

4) Jis didesnis už 832? — Taip.

Ieškomasis skaičius tarpe 832—896. Pridedame prie 832 pusę to tarpo, tai yra 32, ir klausiame:

5) Jis didesnis už 864? — Ne.

Ieškomasis skaičius tarpe 832—864 (32 vienetų dydžio).

6) Jis didesnis už 848? — Taip.

Tarpas susiaurėjo iki 16 vienetų: nuo 848 iki 864.

7) Jis didesnis už 856? — Taip.

Tarpas sumažėjo iki 8 vienetų: nuo 856 iki 864.

8) Jis didesnis už 860? — Ne.

Ieškomasis skaičius tarpe 856—860.

9) Jis didesnis už 858? — Taip.

Vadinasi, ieškomasis skaičius gali būti tiktai arba 859, arba 860: Klausiame:

10) Jis didesnis už 859? — Taip.

Pasirinktasis skaičius — 860.

X skyriui

283. Gali. Parengtinį apskaičiavimą patogiau atlikti «nuo pabaigos». Paskutiniame rate pirmas žaidėjas turi antrajam palikti vieną daiktą. Kiek daiktų jis turi palikti antram žaidėjui priešpaskutiniame rate? Aišku, kad 5.

Tikrai, jei dabar antrasis žaidėjas paims 1, 2 ar 3 daiktus, tai pirmasis žaidėjas gali atitinkamai paimti 3, 2 ar 1 daiktą, ir kiekvienu atveju antrajam žaidėjui liks $5-4=1$ daiktas.

Analogiškai samprotaudami, rasime, kad pirmasis žaidėjas dar anksčiau turi palikti antrajam 9 daiktus. Dabar antrasis žaidėjas paims 1, 2 ar 3 daiktus, pirmasis žaidėjas gali paimti atitinkamai 3, 2 ar 1 daiktą ir visais atvejais antrajam žaidėjui lieka 9—4=5 daiktai. Viso daiktų 11. Vadinasi, pradedantis žaidimą turi paimti 2 daiktus, kad galėtų antrajam palikti 9; antrame rate jis turi antrajam palikti 5 daiktus, tada trečiame rate jis galės savo partneriui palikti 1 daiktą ir laimėti žaidimą. Daiktų kiekis, kurį palieka (nuo pabaigos) pirmas žaidėjas antrajam: 1, 5, 9, sudaro skaičių seką, kurioje pirmasis skaičius 1, o kiekvienas paskesnis didesnis už pirmesnį keturiais. Tęsdami šią skaičių seką, gausime žaidimui laimėti raktą 30 daiktų atvejų: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29. Vadinasi, kai turime 30 daiktų, žaidėjas, pradedantis žaidimą, turi paimti 1 daiktą, palikdamas savo partneriui 29, o kiekviename tolesniame rate palikti jam atitinkamai 25, 21, 17, 13, 9, 5, 1 daiktus.

Žaidimo apibendrinimas. Samprotaudami analogiškai kaip ir anksčiau, rasime, kad žaidimą laimi tas, kuris sugeba palikti savo priešininkui šį degtukų skaičių (skaičiuojant «nuo pabaigos»): 1, $p+2$, $2p+3$, $3p+4$ ir t. t. iki skaičiaus, artimiausio n, bet mažesnio už n. Pažymėkime jį raide N. Tada, prisilaikydamas nurodytos taisyklės, laimi pirmasis žaidėjas, jei pirmą kartą paima $n-N$ degtukų. Jei $n-N=0$, tai žaidimą laimi ne pirmasis žaidėjas, o antrasis.

284. Laimi tas, kuris žaidimo pabaigoje savo partneriui palieka 7 degtukus. Ir tikrai, visų 7 degtukų partneris paimti negali, o kiek jis jų bepaimtų ribose nuo vieno iki šešių, jis, vadinasi, nebus paskutinis paėmęs degtuką nuo stalo. Savo ruožtu, kad galima būtų partneriui palikti 7 degtukus, reikia prieš tai jam palikti 14 degtukų, o dar anksčiau 21 ir 28.

Tas žaidėjas, kuris pradeda žaidimą, turi paimti 2 degtukus ir tada, toliau prisilaikydamas nurodytos taisyklės, jis taps nugalėtoju.

285. Deriniai «PP» bus iš eilės: (1, 2); (3, 5); (4, 7); (6, 10); (8, 13); (9, 15);...

Min Sy-chao derinių «PP» sekoje pastebėjo ir pagrindė dėsningumą. Pažymėję paeiliui raide a_i pirmus skaičius ir b_i — antrus skaičius, sudarančius derinius «PP», surašykime juos į dvi sekas:

$$
(I)\ \begin{cases} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & \ldots, \\ 1, & 3, & 4, & 6, & 8, & 9, & \ldots; \end{cases}
$$

$$
(II)\ \begin{cases} 2, & 5, & 7, & 10, & 13, & 15, & \ldots, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6, & \ldots \end{cases}
$$

Pastebime, kad b_1 didesnis už a_1 vienetu, b_2 didesnis už a_2 dviem, ..., b_n didesnis už a_n skaičiumi n, nes

$$b_n = a_n + n.$$

Kokiu gi principu sudaryta pirmoji skaičių seka?

Mes žinome, kad $a_1=1$ ir $b_1=2$. Sudarome naują skaičių seką (III) kol kas iš dviejų skaičių

(III) { 1, 2, ...

M a ž i a u s i a s iš natūrinių skaičių, nesančių sekoje (III), yra skaičius 3. Jis ir bus tolimesnis sekos (I) skaičius: $a_2=3$. Iš čia $b_2=3+2=5$.

Papildome seką (III) skaičiais 3 ir 5:

(III) { 1, 2, 3, 5, ...

Mažiausias iš natūrinių skaičių, nesančių sekoje (III), yra skaičius 4. Jis bus tolesnis sekos (I) skaičius: $a_3=4$. Iš čia $b_3=4+3=7$.

III seką papildome skaičiais 4 ir 7:

(III) { 1, 2, 3, 4, 5, 7, ...

Tuo pačiu principu randame, kad $a_4=6$. Iš čia $b_4=6+4=10$ ir t. t.

Tokiu būdu, kiekviename derinyje «PP»: (a_n , b_n) mažesnysis skaičius (a_n) yra mažiausias natūrinis skaičius iš tų, kurių dar nebuvo pirmesniuose deriniuose. Pagal Min Sy-chao išvestas formules

$$a_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right] \text{ ir } b_n = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$$

galima ir betarpiškai gauti visus derinius «PP», įstatant $n=1, 2, 3, \ldots$ [ ] ženklas nurodo, kad jei skaičių, suskliaustą tais skliaustais, išreikštume dešimtaine trupmena, tai reikia palikti tiktai sveiką šio skaičiaus dalį, o visas jo dešimtąsias, šimtąsias ir kitas dalis reikia atmesti. Pavyzdžiui, [1,61]=1,[3,2]=3 ir t. t. Kad «Czianšiczi» žaidimo teorija būtų visiškai aiški, paminėsiu be įrodymo dar vieną teoremą, pagrįstą Min Sy-chao.

Prisilaikant žaidimo taisyklių, nė jokio derinio «PP» negalima vienu «ėjimu» paversti kitu deriniu «PP», tačiau bet kurį derinį, kuris nėra «PP» derinys, galima vienu «ėjimu» paversti deriniu «PP».

Iš tos teoremos seka, kad bet kuris derinys, neįėjęs į grupę derinių «PP», yra derinys «PL».

286. Jei jūs norite pirmas pasiekti šimtą, tai jums reikia pirmam pasiekti ir 89. Ir tikrai, kada jūsų pasakyta suma skirsis nuo 100 skaičiumi 11, tai, kurį skaičių (dešimt ar mažiau) jūsų partneris bepridės, jūs tuojau pat rasite dėmenį, papildantį partnerio pasakytą sumą iki šimto. Tačiau tam, kad pirmas pasiektumėte 89, reikia partnerį atitolinti ir nuo to skaičiaus per 11, tai yra sugebėti pirmam pasakyti 78. Tęsdami šiuos samprotavimus, mes gausime tokių skaičių seką, kuriuos išvardydami jūs ateisite į finišą pirmuoju. Prasideda ši skaičių seka vienetu: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Dabar aišku, kad jei pasakysite 1, tai, kokį skaičių (vienuolika ar mažiau) jūsų draugas bepasakytų, jis nesukliudys jums pasakyti 12, po to 23, 34, ir t. t. Prisiminti šią «raktinių» skaičių seką lengva: kiekvienoje dešimtyje yra po vieną skaičių, kuriame vienetų skaičius vienetu didesnis už dešimčių skaičių.

(Jei partneris nežino žaidimo «rakto», tai jis, aišku, kaskart pridės skaičių, atsitiktinai atėjusį jam į galvą, todėl jūs, kartodami su juo žaidimą, galite parizikuoti pirmos šimtinės pusės riboje «panaikinti pėdsakus», neprisilaikydami «raktinių» skaičių.)

Žaidimą galima paįvairinti ribinio dėmens ir ribinės sumos pakeitimu. Tegul, pavyzdžiui, ribinis dėmuo po senovei bus 10, bet ribinė suma ne 100, o 120. Atimdami 11 iš 120, iš gauto rezultato vėl 11 ir t. t., rasime šiuos «raktinius» skaičius: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 109. Žinantieji šią «paslaptį» laimės, jei pradės nuo skaičiaus 10. Tegul dabar ribinė suma lieka 100, o ribinis dėmuo bus ne 10, o 8. Tada «raktinius» skaičius rasime, atimdami po 9 iš 100 ir iš kiekvieno gaunamo skirtumo: 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. Ir šiuo atveju laimi tas, kuris pradeda žaidimą ir žino jo «paslaptį».

Tačiau, jei priimtume ribiniu dėmeniu skaičių 9, tai skaičiai, kuriuos reikia turėti galvoje, bus 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20. Šiuo atveju norintis laimėti neturi būti žaidimą pradedąs, jei, suprantama, partneriui yra žinoma pergalės «paslaptis».

287. Teisingas žaidimas ir šiuo atveju užtikrina pergalę tam, kuris daro pirmą ėjimą. Tačiau atrasti tikrą kelią į pergalę prieš «priešininką» šiame žaidime sunkiau, nei pirmesniuose. Pradedąs žaidimą pirmu ėjimu turi paimti 2 degtukus, o po to, priklausomai nuo to, kiek «priešininkas» paima degtukų, turi prisilaikyti šios taisyklės.

Jei pas «priešininką» l y g i n i s degtukų skaičius, tai reikia jam palikti tokį degtukų skaičių, kuris vienetu didesnis už dalų šešiems skaičių

(19, 13, 7); jei pas «priešininką» nelyginis degtukų skaičius, tai reikia jam palikti tokį degtukų skaičių, kuris vienetu mažesnis už dalų šešiems skaičių (23, 17, 11, 5), o jei pasirodytų, kad tai negalima, tai reikia jam palikti degtukų skaičių, dalų šešiems (24, 18, 12, 6).

Jūs, pavyzdžiui, imate 2 degtukus, o jūsų «priešininkas» 4 arba 2 (lyginį skaičių). Lieka 27–6=21 degtukas arba 27–4=23 degtukai. Sutinkamai su sąlyga, jūs imate 2 degtukus arba 4, kad «priešininkui» liktų 19. Jeigu «priešininkas» paėmė 3 degtukus (nelyginį skaičių), tai liko 27–5=22 degtukai. Kadangi jūs padaryti liekaną lygią 17 degtukų negalite (negalima paimti 5 degtukų), tai jums tenka paimti 4 degtukus, kad liekana būtų 18. Jei «priešininkas» paėmė vieną degtuką, tai ir jums reikia paimti vieną degtuką, kad liekana būtų 27–4=23 degtukai ir t. t. Ši taisyklė gaunama iš tokių samprotavimų. Žaidžia *A* ir *B*.

1) Tegul, bebaigiant žaidimą, ant stalo liko 5 degtukai. Tai naudinga *A* tiktai tuo atveju, kai kitas ėjimas yra *B* ir jis turi nelyginį degtukų skaičių. (Kadangi paimti 22 degtukai, tai *A* čia gali turėti taip pat tiktai nelyginį degtukų skaičių.) Galima išnagrinėti visus galimus žaidimo tęsinius:

	A	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*
turėjo	nelyg.	nelyg.	nelyg.	nelyg.	nelyg.	nelyg.	nelyg.	nelyg.
paėmė	—	1	—	2	—	3	—	4
„	3	1	3	—	1	1	1	—
	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.

Jeigu *B* (taigi, ir *A*) turi lyginį degtukų skaičių, tai jo ėjimui palikti 5 degtukus žaidėjui *A* nenaudinga — veda prie pralaimėjimo (įsitikinkite!).

2) Tegul, bebaigiant žaidimą, ant stalo liko 6 degtukai. Tai taip pat naudinga *A* tiktai tuo atveju, kai tolesnis ėjimas yra *B* ir jis turi nelyginį degtukų skaičių. (Aišku, kad *A* turi taip pat lyginį degtukų skaičių.) Ir tikrai:

	A	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*
turėjo	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.
paėmė	—	1	—	2	—	3	—	4
„	4	1	4	—	2	1	2	—
	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.

Jeigu *B* turi lyginį degtukų skaičių (taigi, *A* — nelyginį), tai jo ėjimui palikti 5 degtukus žaidėjui *A* nenaudinga — veda prie pralaimėjimo. Ir tikrai, pakanka tiktai *B* paimti vieną degtuką ir tada *A* atsiras tokioje pat padėtyje, kokioje buvo, likus penkiems degtukams, *B* (žr. 1 p.).

3) Tegul, bebaigiant žaidimą, ant stalo liko 7 degtukai. Tai naudinga *A* tiktai tuo atveju, kada tolesnis ėjimas yra *B* ir jis turi lyginį degtukų skaičių. (Čia *A*, aišku, turi taip pat lyginį degtukų skaičių.) Ir tikrai:

	A	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*
turėjo	lygin.	lygin.	lygin.	lygin.	lygin.	lygin.	lygin.	lygin.
paėmė	—	1	—	2	—	3	—	4
"	1	—	4	1	4	—	2	1
	toliau suvedama į 1 p.		lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.	lygin.	nelyg.

Jeigu *B* (taigi, ir *A*) turi nelyginį degtukų skaičių, tai jo ėjimui palikti 7 degtukus žaidėjui *A* nenaudinga — veda prie pralaimėjimo. Ir tikrai, pakanka tiktai *B* paimti vieną degtuką, ir tada *A* atsiras tokioje pat padėtyje, kokioje buvo, likus 6 degtukams, *B* (žr. 2 p.).

4) Po savo paties ėjimo palikti 8, 9 ar 10 degtukų visais atvejais žaidėjui *A* nenaudinga — veda prie pralaimėjimo. Tegul, pavyzdžiui, po *A* ėjimo ant stalo liko 8 degtukai. Galimi du atvejai:

a) *A* turi nelyginį degtukų skaičių, *B* — lyginį; *B* paima 3 degtukus. Dabar pas jį taip pat nelyginis degtukų skaičius. Ant stalo lieka 5 degtukai. Šiuo atveju, kaip žinoma (žr. 1 p.), pralošia tas, kurio ėjimas. Ėjimas *A*, vadinasi, *A* pralošia.

b) *A* turi lyginį degtukų skaičių, *B* — nelyginį; *B* ima vieną degtuką. Pas jį atsiranda lyginis degtukų skaičius. Ant stalo lieka 7 degtukai. Šiuo atveju, kaip žinoma (žr. 3 p.), taip pat pralošia tas, kurio ėjimas. Ėjimas *A*, vadinasi, *A* pralošia. Tokį patį galimumą pakreipti žaidimą savo naudai *B* turi ir tais atvejais, kada *A* po savo ėjimo ant stalo palieka 9 ar 10 degtukų. Šių atvejų analizę atlikite savarankiškai.

5) Toliau didinant skaičių degtukų, likusių po *A* ėjimo ant stalo, tai yra nagrinėjant 11, 12, 13, ... degtukų atvejus, laimėjimo sąlygos pasikartoja ta pačia tvarka, kaip ir 5, 6, 7,... paliktų degtukų atvejais, o tai ir patvirtina aukščiau nusakytą žaidimo taisyklę.

Tegul, pavyzdžiui, po *A* ėjimo ant stalo liko 11 degtukų. Nesunku parodyti, kad *A* laimi, jei pas *B* (taigi, ir pas patį *A*) — nelyginis degtukų skaičius. Iš tikrųjų,

	A	*B*	*A*	*B*
turėjo	nelyg.	nelyg.	nelyg.	nelyg.
paėmė	—	1 ar 3	—	2 ar 4
„	3 ar 1	—	4 ar 2	—
	toliau suvedama į 3 p.		toliau suvedama į 1 p.	

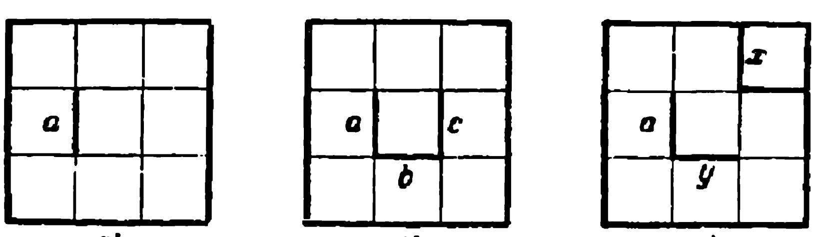
Patys išnagrinėkite dar keletą atvejų, bent, pavyzdžiui, 12 ir 13 likusių degtukų atvejus.

6) Lieka dar parodyti, kodėl, kai yra 27 degtukai, pirmu ėjimu reikia paimti kaip tik 2 degtukus — ne daugiau ir ne mažiau. Jei jūs paimsite 1 degtuką, tai «priešininkas» galės paimti 2; liks 24 degtukai, ir jums nepavyks jam palikti 19 degtukų, kaip kad to reikalauja taisyklė. Jei jūs paimsite 3 degtukus, tai «priešininkas» galės paimti 1; liks 23 degtukai. Jūsų ėjimas, o likus 23 degtukams, pralošia tas, kuris turi nelyginį degtukų skaičių ir daro eilinį ėjimą (žr. 5 p.).

Jei jūs paimsite 4 degtukus, tai ir «priešininkas» paims tiek pat; liks 19 degtukų. Jūsų ėjimas, o likus 19 degtukų, pralošia tas, kuris turi lyginį degtukų skaičių ir daro eilinį ėjimą (žr. 5 p.).

Jei jūs paimsite 2 degtukus, tai, kiek «priešininkas» bepaimtų, jūs galėsite, sutinkamai su taisyklėmis, žaidimą pakreipti savo naudai.

289. Jei žaidimo laukas yra kvadratas iš 9 langelių, tai žaidimą tenka pradėti nubrėžiant kurią nors centrinio kvadrato kraštinę, pa



a) б) c)

362 pieš.

vyzdžiui, kraštinę *a* (362 pieš., *a*). Jei dabar «priešininkas» nubrėžia kraštinę kurio nors iš trijų kraštinio kairiojo stulpelio kvadratų, jūs tuojau užimate visus šio stulpelio langelius ir padarote likusiame stačia-

kampyje ėjimą, užtikrinantį laimėjimą (žr. «Taisyklių» 3 p., 215 psl.). Visi 9 langeliai jūsų. Jei «priešininkas», atsakydamas į jūsų pirmą ėjimą (kraštinės *a* brėžimas), nubrėš bet kurią antrą centrinio kvadrato (362 pieš., *b*) kraštinę (pavyzdžiui, *b*), jūs tuojau apveskite trečią (*c*), ir «priešininkui», kad nepraradus visų 9 langelių, nieko daugiau nelieka, kaip užimti centrinį langelį ir atiduoti likusius 8. Jeigu «priešininkas» po jūsų pirmo ėjimo (*a*) nubrėš kurią nors iš trijų kraštinio dešiniojo stulpelio kvadratų kraštinę, pavyzdžiui, *x* (362 pieš., *c*), jūs galite paimti dešinįjį viršutinį langelį, atsakyti jam ėjimu *y* ir vėl visi 9 langeliai jūsų.

292. 1 u ž d a v i n y s. Skaičiui Nr. 5 vertikaliai rasti galima padaryti dvi prielaidas: jis arba 543, arba 567 (žr. sąlygą). Mėginame pirmąjį: 543. Jei taip, tai pirmieji du keturženklio skaičiaus Nr. 6 horizontaliai skaitmenys: 34, o visas pilnutinai pagal sąlygą jis susideda iš sandaugos skaičių 77 ir $\overline{x3}$ (x — nežinomas dešimčių skaitmuo). Tinkamiausia x reikšmė — skaičius 4, tačiau $77 \times 43 = 3\,311$. Šimtų skaitmuo nesutampa su tuo, kuris turėtų būti.

Mėginame antrą galimą skaičių Nr. 5 vertikaliai: 567. Dabar pirmieji skaičiaus Nr. 6 horizontaliai skaitmenys: 36, jie gi turi būti pirmi skaičių 77 ir $\overline{x7}$ sandaugos skaičiai. Tinkamiausia x reikšmė — skaičius 4. Patikriname: $77 \times 47 = 3\,619$. Tai ir bus skaičius Nr. 6 horizontaliai, o 47 patenkina skaičiaus Nr. 8 sąlygą.

Lieka rasti skaičių Nr. 7 vertikaliai ir Nr. 9 horizontaliai. Kombinuojant skaičių Nr. 1 horizontaliai ir Nr. 3 vertikaliai daugiklius, lengva rasti, kad skaičius Nr. 7 vertikaliai bus 99. Skaičius Nr. 9 horizontaliai bus 39. Visi duotojo kvadrato langeliai užpildyti (363 pieš.).

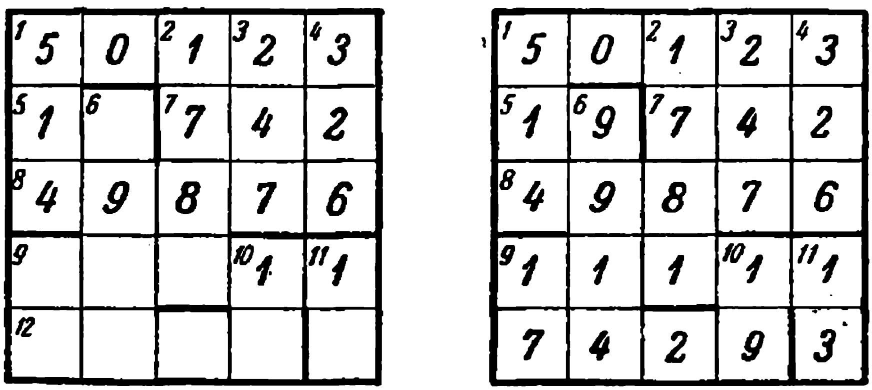
[1] 3	0	[2] 8	[3] 7
[4] 4	[5] 5	6	7
[6] 3	6	1	[7] 9
[8] 4	7	[9] 3	9

363 pieš.

2 u ž d a v i n y s. Išspręsti galima, pavyzdžiui, šiuo keliu. Visų pirma reikia surasti skaičius Nr. 1 ir Nr. 8 horizontaliai. Tų dviejų penkiaženklių skaičių sudarymui turi būti pavartoti visi 10 skaitmenų, o skaičių skirtumas turi būti triženklis skaičius (žr. Nr. 3). Tai reiškia, kad pirmųjų ieškomų skaičių skaitmenų skirtumas lygus 1. Surandamas pirmas skaičių Nr. 5 ir Nr. 10 (364 pieš., *a*) skaitmuo.

Jei didžiausias skaičiaus Nr. 3 (žr. Nr. 5) daugiklis prasideda 1, tai jo mažiausias dviženklis daugiklis, aišku, taip pat prasideda 1. Surandamas skaičiaus Nr. 11 pirmas skaitmuo.

Pirmas skaičiaus Nr. 2 skaitmuo pagal sąlygą bus taip pat vienetas, o antras jo skaitmuo bus 7. Tas pats skaitmuo išreiškia skaičiaus Nr. 8 dešimtis (žr. Nr. 7). Kadangi du paskutinieji skaičiaus Nr. 9 horizontaliai skaitmenys yra surasti (du vienetai), o visas jis sudaro vieną devintąją sumos skaičių Nr. 1 ir Nr. 8 horizontaliai, tai tų skaičių vienetų suma lygi 9 ir jų dešimčių suma taip pat lygi 9. Vadinasi, pirmas skaičiaus Nr. 3 skaitmuo yra 2. Jis gi — paskutinis



a) b)

364 pieš.

skaičiaus Nr. 7 skaitmuo. Jei x ir y — skaičių Nr. 1 ir Nr. 8 horizontaliai vienetų skaitmenys, tai aišku, pirma, kad $x+y=9$, o antra, $2x=y$ (žr. Nr. 4). Iš čia $x=3$, $y=6$. Skaičius Nr. 4 nustatytas pilnai: 326.

Antras skaičiaus Nr. 7 skaitmuo $11-7=4$ (žr. Nr. 3). Žinant skaičių Nr. 1 ir Nr. 8 horizontaliai skirtumo šimtų skaitmenį ir skaičiaus Nr. 1 horizontaliai šimtų skaitmenį (1), lengva surasti skaičiaus Nr. 8 šimtų skaitmenį: jis lygus 8. Taip pat lengva dabar nustatyti (pašalinimo metodu) du pirmuosius skaičių Nr. 1 ir Nr. 8 horizontaliai skaitmenis (364 pieš., *a*). Toliau surandame skaičių Nr. 9 horizontaliai (11 111). Skaičius 247 turi du daugiklius: 19 ir 13. Tai duoda skaičius Nr. 5, Nr. 10 ir Nr. 11.

Dabar rasime skaičių Nr. 6 vertikaliai. Apsuktas skaičius — keturženklis, baigiasi 99 ir susideda iš skaičiaus 247 sandaugos su pirminiu dviženkliu skaičiumi. Tinkamas tik 17. Vadinasi, apsuktas skaičius Nr. 6 lygus 4 199 ir susideda iš trijų pirminių daugiklių: 13, 17 ir 19. Skaičius Nr. 6 vertikaliai: 9 914. Sprendinys parodytas 364 piešinyje, *b*.

3 u ž d a v i n y s. Peržiūrėję triženklių skaičių kvadratų lentelę, mes rasime tik vieną tokį skaičių, kuris vienodai skaitomas tiek iš kairės dešinėn, tiek ir iš dešinės kairėn: 696 896. Šio skaičiaus žinojimas

duoda raktą skaičiams Nr. 10 ir Nr. 11 vertikaliai surasti, o tuojau pat po jų ir skaičiams Nr. 4 ir Nr. 9 vertikaliai, Nr. 13, Nr. 15 ir Nr. 5 horizontaliai surasti.

Skaičiui Nr. 1 vertikaliai surasti reikia išspręsti nedidelį uždavinį: rasti mažiausią sveiką skaičių, kurį padalijęs iš 2, 3, 4, 5 ir 6, gauname liekanas atitinkamai 1, 2, 3, 4 ir 5. Pridėkime prie ieškomojo skaičiaus vienetą, tada jis dalysis iš 2, 3, 4, 5 ir 6. Sudauginę visus pirminius daugiklius, įeinančius į tuos skaičius didžiausiais laipsniais gausime $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, o ieškomasis skaičius bus 59. Iš čia skaičius Nr. 1 vertikaliai $59-8=51$.

^{1}5	^{2}3	2	^{3}9		^{4}1
^{5}1	1		^{6}7	^{7}2	9
	^{8}7	^{9}3		4	
^{10}6	9	8	^{11}8	9	^{12}6
^{13}3	9		^{14}3	6	5
8		^{15}1	6	0	0

365 pieš.

Rasime skaičių Nr. 1 horizontaliai. Yra tiktai du pirminių skaičių kvadratai keturženkliai skaičiai: 5041 ($=71^2$) ir 5329 ($=73^2$). Pirmasis skaičius netinka, nes nulis negali būti skaičiaus Nr. 2 vertikaliai priešakyje. Tuo pačiu sužinome ir skaičių Nr. 8 horizontaliai (73). Skaičius Nr. 2 vertikaliai buvo surastas dalimis; kontrolei lieka patikrinti jo skaitmenų sumą. Vienintelis pirminis dviženklis skaičius, prasidedąs devyniuke, yra 97. Tuo pačiu nustatomas skaičius Nr. 3 vertikaliai. Toliau visiškai paprasta. Galutinis sprendinys atvaizduotas 365 piešinyje.

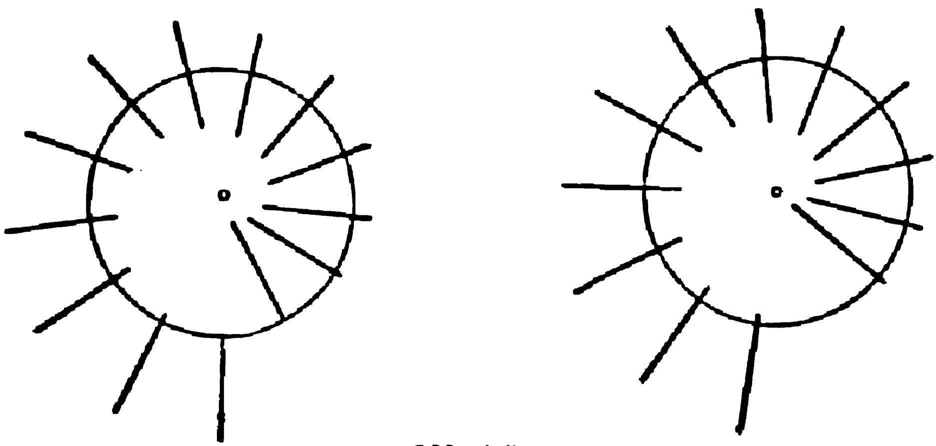
304. Tryliktoji lazdelė neišnyko, ji tik buvo paskirstyta tarp kitų dvylikos, kurios dėl to pailgėjo. Tuo galima įsitikinti arba išmatavus pradžioje duotų trylikos ir vėliau gautų dvylikos lazdelių ilgius, arba geometriškai.

Įsivaizduokime tiesę (185 pieš., žr. 242 psl.), jungiančią viršutinius duotųjų trylikos lazdelių galus. Ši tiesė ir tiesė *MN* sudaro kampo kraštines, perkirstas eilės lygiagrečių tiesių, vienodai nutolusių viena nuo kitos. Prisiminę atitinkamą geometrijos teoremą, mes suvoksime, kad tiesė *MN* nuo antros lazdelės atkerta $^1/_{12}$ jos ilgio, nuo trečios $^2/_{12}$, nuo ketvirtos $^3/_{12}$ ir t. t.

Perstumdami abi kartono dalis, atkirstą kiekvienos lazdelės (pradedant antrąja) atkarpą mes pridedame prie pirmesnės lazdelės apatinės dalies.

Kadangi kiekviena atkirsta atkarpa ilgesnė už pirmesnę viena ir ta pačia dalimi ($^1/_{12}$), tai tos operacijos dėka lazdelė turi pailgėti

$^1/_{12}$ savo ilgio, o viso lazdelių turi likti 12. Iš akies tas pailgėjimas nepastebimas, taigi iš pirmo žvilgsnio tryliktosios lazdelės išnykimas atrodo gana paslaptingas.



366 pieš.

Kad būtų efektingiau, lazdeles galima išdėstyti ant skritulio, kaip parodyta 366 piešinyje. Jei išplautume vidaus skritulį ir įtvirtintume jį centre taip, kad jis galėtų suktis, tai, atitinkamai pasukę skritulį, mes vėl pasieksime vienos lazdelės išnykimo.

XI skyriui

305. Kelių skaičių bendras mažiausias kartotinis (B.M.K.) yra vieno skaičiaus visų pirminių daugiklių atitinkamų laipsnių ir kitų skaičių trūkstamų daugiklių sandauga. Pirmosios dešimties skaičių B.M.K. susideda, aišku, iš šių daugiklių: $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3$, o tai ir duoda skaičių 2 520.

Įdomu pastebėti, kad skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10 B.M.K. sutampa su šios dešimties antros pusės skaičių B. M. K., tai yra su skaičių 6, 7, 8, 9 ir 10 B. M. K. Tai yra pavyzdys, iliustruojantis bendrą teiginį, kad bet kurio lyginio skaičiaus natūrinių skaičių nuo 1 iki $2n$ B.M.K. sutampa su antrosios jų pusės: $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ B.M.K.

306. Visais mandarinų paskirstymo į popierinius maišelius atvejais trūksta tiktai vieno mandarino. Vadinasi, jeigu mes būtume turėję vienu mandarinu daugiau, tai jų skaičius dalytųsi iš 10, iš 9, iš 8, iš 7, iš 6, iš 5, iš 4, iš 3 ir iš 2. Toks skaičius, kaip jūs žinote iš pirmesnio uždavinio sprendimo, yra 2 520 arba jam dalus.

Vadinasi, mes turėjome mažiausiai 2 519 mandarinų.

307. Tokių skaičių — nesuskaičiuojama daugybė. Mažiausias iš jų 58. Ir tikrai, daliklio ir liekanos skirtumas visais atvejais lygus 2. Vadinasi, jei prie ieškomojo skaičiaus pridėtume 2, tai jis be liekanos dalytųsi iš bet kurio uždavinyje nurodyto daliklio. Skaičių 3, 4, 5 ir 6 bendras mažiausias kartotinis yra 60. Atėmę 2, gauname 58.

308. Skaičių 2, 3, 4, 5 ir 6 mažiausias kartotinis lygus 60. Reikia rasti 7 kartotinį, vienetu didesnį už 60 kartotinį. Pastebėsime, kad $2\times60=120$ dalydami iš 7, gauname liekaną, lygią 1, tai yra skaičius $2\times60-1$ dalijasi iš 7. Vadinasi, $7\times60-(2\times60-1)=301$ taip pat dalijasi iš 7.

Pintinėje buvo 301 kiaušinis.

309. Aišku, kad pasirinktasis skaičius dalus 7, 8 ir 9. Vadinasi, jis lygus $7\times8\times9=504$. Kitų daugiklių jis neturi, nes jei turėtų nors ir patį mažiausią iš jų, tai yra dar vieną dvejukę, ieškomasis skaičius jau būtų keturženklis.

310. Skaičių 4, 8, 12 ir 16 B.M.K. yra 48. Vadinasi, laivai susitiks po 48 savaičių, tai yra 1953 metų gruodžio 4 dieną.

311. Druskos ir muilo kainos dalios skaičiui 3. Cukraus pakelių ir degtukų dėžučių kiekiai taip pat dalūs trims. Todėl visų pirkinių kainų suma turi būti dali skaičiui 3. Suma, nurodyta čekyje, nebuvo dali 3 (skaitmenų $2+9+1+7=19$ suma nesidalijo iš 3). Vadinasi, apskaičiuojant buvo padaryta klaida.

312. Sprendimas remiasi tuo, kad kairioji lygties pusė dalijasi iš 9, todėl ir dešinioji pusė turi dalytis iš 9. Vadinasi, turi iš 9 dalytis ir skaitmenų suma: $4+9+2+a+4$. Tačiau $4+9+2+4=19$. Vadinasi, $a=8$. Raidė a kitų reikšmių negali turėti, nes ji pakeičia skaitmenį.

Ištraukę iš skaičiaus 492 804 kvadratinę šaknį, gauname: $3(230+ +t)=702$. Iš čia $t=4$.

313. Kairioji lygybės pusė dalijasi iš 11. Vadinasi, ir dešinioji pusė turi dalytis iš 11. Sutinkamai su dalumo iš 11 požymiu, turime: $1+2+1+7=a+3$. Iš čia $a=8$ (kiti dalumo požymio numatyti atvejai čia nepritaikomi, nes jie dydžiui a priskiria neigiamas arba dviženkles reikšmes).

Ištraukę iš skaičiaus 37 810 201 kvadratinę šaknį, gauname 6 149. Dabar turime nesudėtingą lygtį:

$$11(492+x)=6\,149.$$

Išsprendę ją, rasime, kad $x=67$.

314. Žinome, kad skaičiai 10^3+1 ir 10^6-1 dalijasi iš 1 001. Nesunku įsitikinti, kad skaičius 10^9+1 taip pat dalijasi iš 1 001, taigi, ir iš 7, 11 ir 13.

Dabar imame bet kurį, suskaidomą į 4 skiltis skaičių, pavyzdžiui 31 218 001 416, ir parašome jį šiuo pavidalu: $31\,218\,001\,416=416+1\cdot 10^3+218\cdot 10^6+31\cdot 10^9=416+1(10^3+1-1)+218\cdot(10^6-1+1)+31(10^9+1-1)=(416-1+218-31)+[(10^3+1)+218(10^6-1)+31(10^9+1)]$.

Skaičius, suskliaustas laužtiniuose skliaustuose, dalijasi iš 7, 11 ir 13. Vadinasi, tiriamojo skaičiaus dalumas iš 7, 11 ir 13 priklauso tiktai nuo dalumo skaičiaus, suskliausto pirmuose lenktiniuose skliaustuose, kuris yra skilčių, imant kas antrą, sumų skirtumas: $(416+218)-(1+31)=602$.

Skaičius 602, o kartu su juo ir tiriamasis skaičius, dalijasi iš 7 ir nesidalija iš 11 ir iš 13.

315. Triženklį skaičių parašykime įprasta algebrine forma: $100x+10y+z$. Reikia įrodyti, kad jis dalijasi iš 8 tik tada, kai dviženklis skaičius $(10x+y)$, sudarytas iš šimtų (x) ir dešimčių (y) skaitmenų, sudėtas su vienetų (z) skaičiaus puse, tai yra skaičius $10x+y+\frac{z}{2}$ dalijasi iš 4.

Tegul $10x+y+\frac{z}{2}=4k$, kur k — bet kuris sveikas teigiamas skaičius. Iš čia išreikškime z ir įstatykime į parašytą triženklį skaičių:

$$20x+2y+z=8k,\quad z=8k-20x-2y,$$
$$100x+10y+z=100x+10y+8k-20x-2y=80x+8y+8k.$$

Aišku, kad pastarasis reiškinys, o kartu ir pradinis triženklis skaičius, dalijasi iš 8.

Na, o jei $10x+y+\frac{z}{2}$ nesidalija iš 4? Ar iš to išeina, kad ir duotasis skaičius $100x+10y+z$ nesidalija iš 8?

Atsakymą duoda atvirkštinė teorema:

Jei $100x+10y+z$ dalijasi iš 8, tai $10x+y+\frac{z}{2}$ būtinai dalysis iš 4.

Iš tikrųjų, tegul $100x+10y+z=8k$. Iš čia išreiškiame z ir įstatome į $10x+y+\frac{z}{2}$. Gauname:

$$10x+y+\frac{z}{2}=10x+y+\frac{1}{2}\cdot(8k-100x-10y)=-40x-4y+4k.$$

Šio reiškinio dalumas iš 4 aiškus.

Triženklio skaičiaus dalumo iš 8 požymis pilnutinai nustatytas. Sujungę jį su visiems žinomu daugiaženklio skaičiaus dalumo iš 8 požymiu, galime laikyti, jog įrodėme, kad duotasis skaičius $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 8, jei $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 4 skaičius, sudarytas iš duotojo skaičiaus šimtų ir dešimčių skaitmenų, plius jo vienetų skaičiaus pusė.

316. Tegul N — skaičius, suskaidomas į 3 skiltis. Parašysime jį tokia forma:

$$N=10^6a+10^3b+c,$$

kur a, b ir c — skiltis sudarantieji skaičiai. Tegul $a+b+c$ dalijasi iš 37. Tada $a+b+c=37k$. Iš čia išreiškiame c ir įstatome į N:

$$N=10^6a+10^3b+37k-a-b=a(10^6-1)+b(10^3-1)+37k.$$

Skaičiai 10^6-1, 10^3-1 ir 37 dalijasi iš 37, vadinasi, ir skaičius N dalijasi iš 37.

Atvirkštinę teoremą įrodykite savarankiškai.

317. Pavartokite tokį pat įrodymo būdą, kaip ir spręsdami pirmesnį uždavinį. Iš įrodytos savybės seka toks duotojo skaičiaus dalumo iš 3, 7 ir 19 požymis:

Iš duotojo skaičiaus atskirti paskutinius du skaitmenis, o prie likusio skaičiaus pridėti atskirtąjį skaičių, padaugintą iš 4; jei reikia, procesą galima pakartoti iki bus gautas rezultatas, kurio dalumas iš 3, 7 ir 19 arba iš $399=3\cdot7\cdot19$ yra akivaizdus. Jei rezultatas $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 399 arba iš jo daugiklių, tai ir duotasis skaičius $\frac{\text{dalijasi}}{\text{nesidalija}}$ iš 399 arba iš jo daugiklių.

Išaiškinsime, pavyzdžiui, pagal šį būdą skaičių 138 264 ir 40 698 dalumą iš 3, 7 ir 19. Turime:

skaičiui 138 264:

$64\times4=256$

$$\begin{array}{r} 1\,382 \\ +\quad 256 \\ \hline 1\,638 \end{array};\quad 38\times4=152$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ 152 \\ \hline 168 \end{array}$$

Toliau tęsti proceso nėra reikalo. Padarome išvadą: 168, taigi, ir duotasis skaičius 138 264 dalijasi iš 3 ir iš 7, bet nesidalija iš 19.

skaičiui 40 698:

$98\times4=392$

$$\begin{array}{r} 406 \\ +\ 392 \\ \hline 798 \end{array};\quad 98\times4=392$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ +\ 392 \\ \hline 399 \end{array}$$

399 dalijasi iš 3, 7 ir 19, vadinasi, ir duotasis skaičius 40 698 dalijasi ir iš 3, ir iš 7, ir iš 19, o taip pat ir iš 399.

318. Yra žinoma, kad x^m-1 dalijasi iš $x-1$ (žr. 259 psl.). Vadinasi, $11^{10}-1=(11-1)(11^9+11^8+11^7+11^6+11^5+11^4+11^3+11^2+11+1)$. Pirmasis dauginamasis 10. Antrasis dauginamasis taip pat dalijasi iš 10, nes susideda iš 10 dėmenų, kurių kiekvienas baigiasi 1 (bet kuris sveikas vienuolikos laipsnis baigiasi vienetu). Tačiau, jei kiekvienas iš dviejų dauginamųjų dalijasi iš 10, tai jų sandauga dalijasi iš 100, vadinasi, ir $11^{10}-1$ dalijasi iš 100.

319. 1) Tegul $N=10x+y$ dalijasi iš 7. Tada

$$10x+y=7k,$$

kur k — sveikas teigiamas skaičius. Apsuktas skaičius, padidintas duotojo skaičiaus dešimčių skaičiumi, turi pavidalą: $10y+x+x=10y+2x$. Čia vietoje y įstatę $7k-10x$, gauname skaičių: $10(7k-10x)+2x=70k-98x$, kuris, kaip matote, dalijasi iš 7.

2) Tegul $N=100x+10y+z$ dalijasi iš 7. Tada

$$100x+10y+z=7k,$$

kur k — sveikas teigiamas skaičius.

Apsuktas skaičius, sumažintas duotojo skaičiaus vienetų ir šimtų skaitmenų skirtumu, turi pavidalą:

$$100z+10y+x-(z-x)=99z+10y+2x.$$

Išreiškiame $z=7k-100x-10y$; gauname skaičių:

$$99(7k-100x-10y)+10y+2x=99\cdot 7k-9\,900x-990y+$$
$$+10y+2x=99\cdot 7k-9\,898x-980y,$$

kuris, kaip matote, dalijasi iš 7.

3) Pradžioje įrodykime tiesioginę teoremą:

Tegul $N=100z+10x+y$, be to, $x+y+z=7$. Tada

$$N=100(7-x-y)+10x+y=700-90x-99y=$$
$$=700-91x-98y+x-y=7(100-13x-14y)+(x-y).$$

Kad N dalytųsi iš 7, būtina, kad $x-y$ dalytųsi iš 7. Pagal sąlygą $x<7$ ir $y<7$, tad tai gali įvykti tik tuo atveju, kai $x-y=0$, tai yra kai $x=y$.

Vadinasi, tiesioginė teorema kalba apie būtiną skaičiaus N dalumo iš 7 sąlygą.

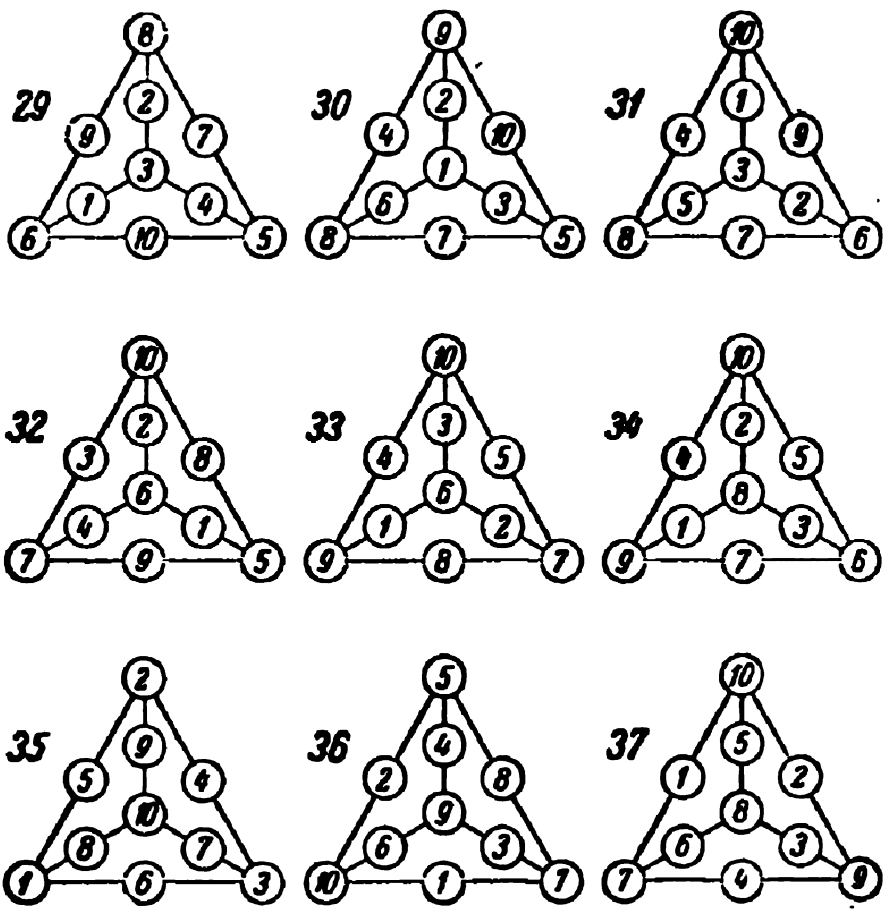
Dabar įrodykime atvirkštinę teoremą.

Tegul $N=100(7-x-y)+10x+y$, be to, $x=y$. Tada $N=100(7-2x)+10x+x=700-189x=7(100-27x)$. Kaip matyti, jis dalijasi iš 7.

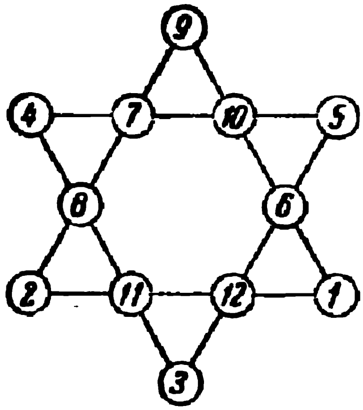
Vadinasi, atvirkštinė teorema kalba apie pakankamą skaičiaus dalumo iš 7 sąlygą.

XII skyriui

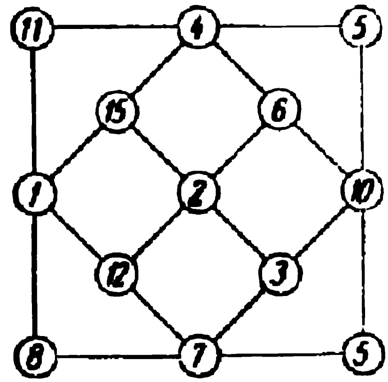
323. Vieną iš sprendinių žiūrėk 367 piešinyje.



367 pieš.



368 pieš.



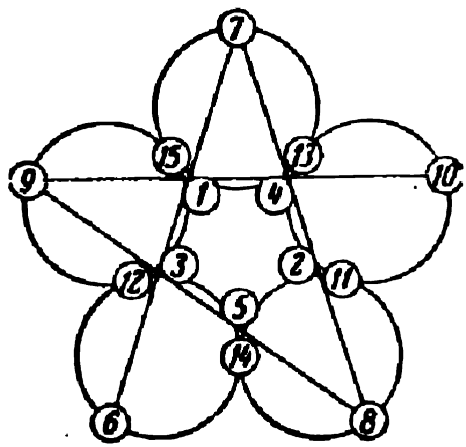
369 pieš.

324. Sprendinys parodytas 368 piešinyje.

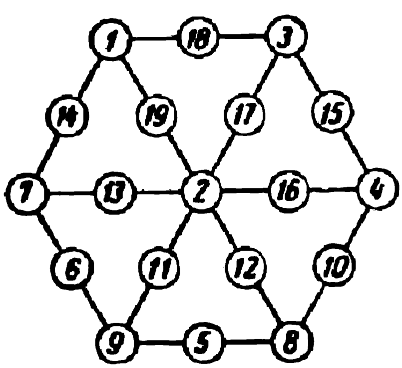
325. Sprendinys parodytas 369 piešinyje.

326. Sprendinys parodytas 370 piešinyje.

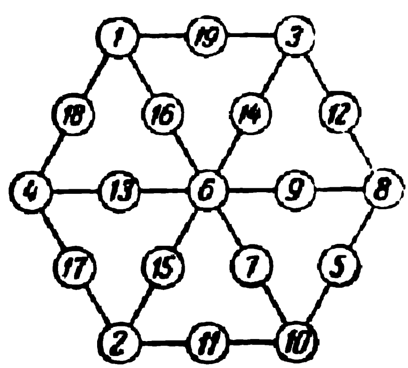
327. 371 piešinyje, *a*, parodytas šešiakampis, kuriame sumos išilgai kiekvienos kraštinės ir kiekvieno spindulio lygios 22; 371 piešinyje, *b*, atitinkamos sumos lygios 23.



370 pieš.



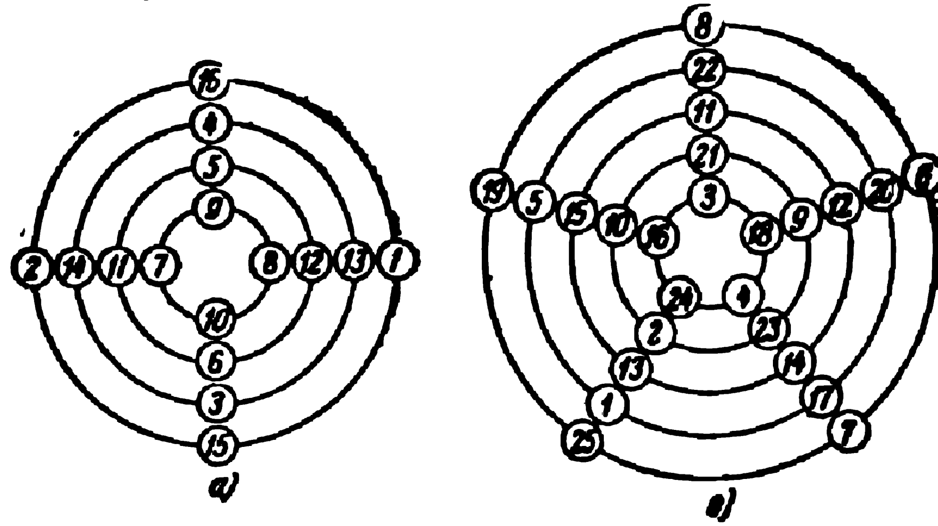
a)



б)

371 pieš.

328. Sprendinys parodytas 372 piešinyje.



372 pieš.

329. Sprendinys parodytas 373 piešinyje.

330. Sunumeruojame duotojo kvadrato eilutes ir stulpelius (374 pieš.). Kaip mes žinome (žr. 6 *b* savybę), tarp jo skaičių yra tokie, kurių kvadratų sumos ir kubų sumos vienodos. Tai — 12, 14, 3, 5 ir 15, 9, 8, 2. Tačiau duotajame kvadrate tie skaičiai išdėstyti ne ant įstrižainių. Kad jie atsirastų išilgai įstrižainių, tereikia atlikti šiuos perstatymus: eilutę II perkelti į 1-ą vietą, eilutę IV į 2-ą vietą,

1 / 16	9 / 15	3 / 14	11 / 13
8 / 2	7 / 10	6 / 4	5 / 12

373 pieš.

I	1	14	15	4
II	12	7	6	9
III	8	11	10	5
IV	13	2	3	16
	1	2	3	4

374 pieš.

eilutę I į 3-ą vietą ir eilutę III į 4-tą vietą, o paskui 2-ą ir 3-ą stulpelius sukeisti vietomis. Nesunku patikrinti, kad tokiu būdu gautas naujas kvadratas (375 pieš.) turi visas reikalaujamas savybes.

12	6	7	9
13	3	2	16
1	15	14	4
8	10	11	5

375 pieš.

1	29	27	7
23	11	13	17
15	19	21	9
25	5	3	31

376 pieš.

331. Magišką kvadratą sudarome pagal schemą, pateiktą uždavinio tekste (376 pieš.). Jis turės daugelį papildomų savybių iš nurodytų uždavinio tekste, bet ne visas.

5	25	3	31
11	23	13	17
29	1	27	7
19	15	21	9

377 pieš.

Jei dabar IV eilutę perkeltume į I eilutės vietą, I eilutę — į III eilutės vietą, o III eilutę — į IV eilutės vietą, po to antrą ir pirmą stulpelius sukeistume vietomis, tai gautasis kvadratas (377 pieš.) bus taip pat magiškas ir turės visas reikalaujamas papildomas savybes. Taip, pavyzdžiui, šio kvadrato I ir III eilutėse skaičių kvadratų sumos yra vienodos ir II bei IV eilutėse skaičių kvadratų sumos taip pat vienodos:

$$5^2+25^2+3^2+31^2=29^2+1^2+27^2+7^2,$$
$$11^2+23^2+13^2+17^2=19^2+15^2+21^2+9^2.$$

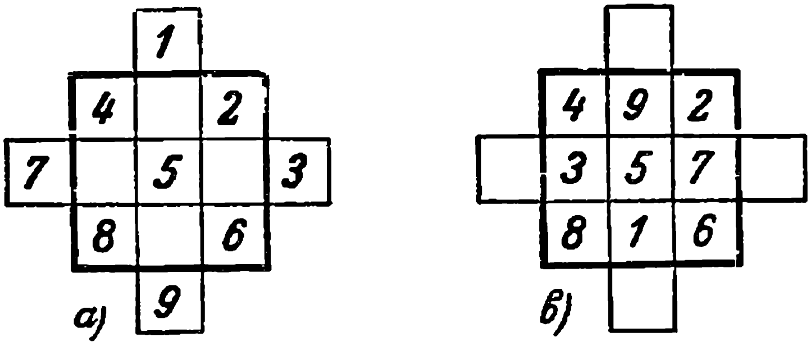
Analogiškai stulpeliams:

$$5^2+11^2+29^2+19^2=3^2+13^2+27^2+21^2,$$
$$25^2+23^2+1^2+15^2=31^2+17^2+7^2+9^2.$$

Patikrinkite patys, kad šis kvadratas turi ir kitas papildomas savybes, nurodytas uždavinio tekste.

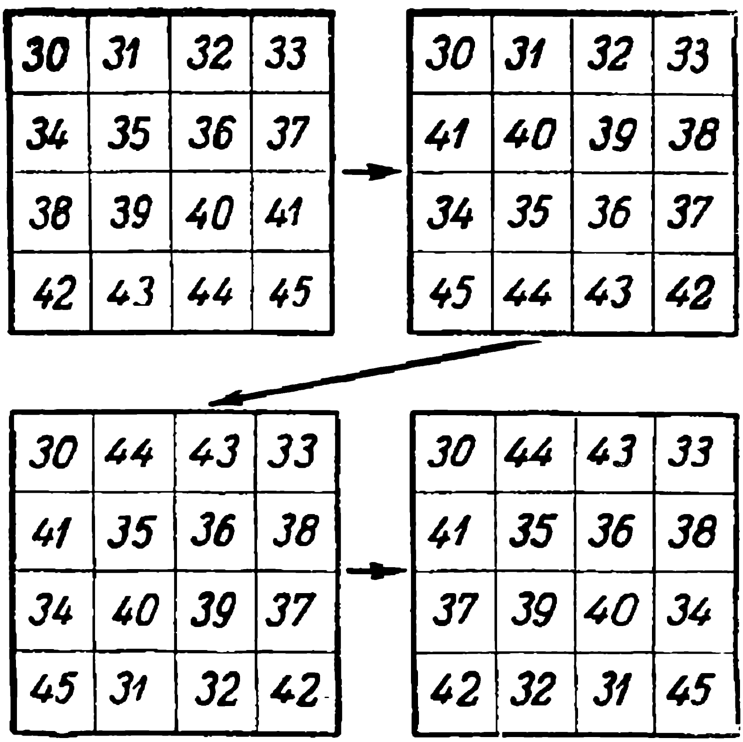
332. Papildyti devynialangį kvadratą iki simetrinės laiptuotos figūros (378 pieš., *a*), išdėlioti jame įstrižomis eilėmis 9 sveikus skai-

čius nuo 1 iki 9. Visus skaičius, esančius ne kvadrate, perkelti į jį, vadovaujantis taisyklėmis, nurodytomis uždavinio tekste (378 pieš., *b*). Pagrindines magiško kvadrato savybes, kaip nesunku patikrinti, šis



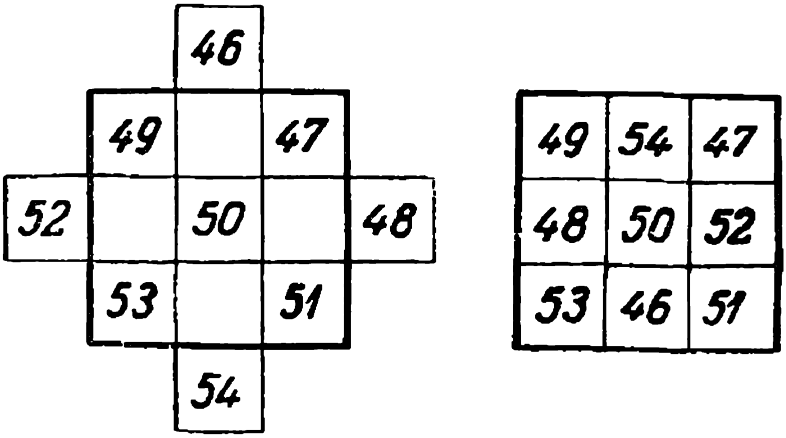
378 pieš.

kvadratas turi. Jo konstanta — 15. Septintos eilės magišką kvadratą sudarykite savarankiškai.



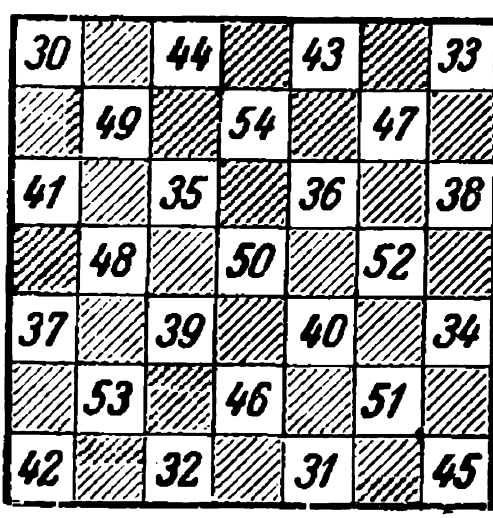
379*a* pieš.

333. Šis kvadratas (žr. 202 pieš. 284 psl.) turi 4 horizontalias ir 4 vertikalias eilutes po 4 baltus langelius kiekvienoje eilutėje, 3 horizontalias ir 3 vertikalias eilutes po 3 baltus langelius kiekvienoje, todėl jį galima sudaryti kaitaliojant stulpelius ir eilutes dviejų ma-



379*b* pieš.

giškų kvadratų: vieno iš 16 langelių ir vieno iš 9 langelių. Devynialangiame kvadrate langelių mažiau, kaip šešiolikalangiame, o jų konstantos pagal sąlygą turi būti vienodos, vadinasi, devynialangiam kvadratui reikia iš duotųjų skaičių paimti 9 vyriausius skaičius. Kiekvieną kvadratą sudarykime pagal atitinkamas schemas (379 *a* ir *b* piešiniai). Abu gauti kvadratai turi tą pačią konstantą: 150. Dabar belieka sujungti juos į vieną kvadratą, išdėsčius antrojo kvadrato eilutes ir stulpelius tarp pirmojo kvadrato eilučių ir stulpelių (380 pieš.). Skaičiai, išdėstyti išilgai šio kvadrato įstrižainių, įeina į sudaromųjų kvadratų įstrižainių sudėtį; todėl jų sumos vienodos ir lygios reikalaujamam skaičiui 300.



380 pieš.

334. Laikydami plytelių išdėstymą, atvaizduotą 204 piešinyje (286 psl.), pradiniu, stumdykite jas toliau tokia tvarka (vis užimdami laisvą vietą): 12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

Lygiai 50 ėjimų!

Naujas plytelių išdėstymas atvaizduotas 381 piešinyje. Nesunku patikrinti, kad gautasis kvadratas — magiškas su konstanta 30. Perstumiant plyteles, galima, suprantama, gauti ir kitokį skaičių išdėstymą magiško kvadrato pavidalu, bet aš nežinau trumpesnio sprendimo už 50 ėjimų.

13	1	6	10
14	2	5	9
	12	11	7
3	15	8	4

381 pieš.

Pamėginkite! Naudodamiesi žinoma jums magiško kvadrato sudarymo schema, jūs galite iš anksto sudaryti visą eilę magiškų kvadratų iš skaičių 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ir 15. Kalbant apie galimumą išdėstyti plyteles skaitinio magiško kvadrato pavidalu, uždavinio sąlygoje pažymėta, kad jokiais plytelių perstūmimais neįmanoma gauti reikiamą jų išdėstymą jei iš pradžių visos 15 plytelių bus išdėstytos didėjančių numerių nuo 1 iki 15 tvarka, o tuščias langelis — paskutinis po plytelės su skaičiumi 15 (žr. 203 pieš. 285 psl.). Ši aplinkybė susijusi su pagrindine žaidimo «15» teorijos išvada. Ta teorija buvo matematikų išvystyta praeito šimtmečio gale (1879 m.).

Pasirodo, kad ir kaip iš pradžių bebūtų išdėliotos dėžutėje 15 plytelių, galima iš anksto įspėti, ar įmanoma perstūmimų pagalba gauti «taisyklingą» jų išdėstymą, tai yra plytelių išdėstymą didėjančių numerių tvarka. Tam tereikia atlikti nedidelę pagalbinę operaciją: plytelių, bet kaip išdėstytų dėžutėje, sudėliojimą didėjančių numerių tvarka įgyvendinti ne perstūmimų pagalba, o greta gulinčių eilutėje ar stulpelyje plytelių sukeitimo vietomis keliu, ir suskaičiuoti, kiek prireiks tokių sukeitimų. Jei gautasis skaičius bus lyginis, tai tas reikš, kad plyteles dėžutėje galima pilnutinai sutvarkyti ir perstūmimų pagalba ir, atvirkščiai, neįmanoma jas sutvarkyti, jei gautasis skaičius bus nelyginis.

Pagalbinė sukeitimų operacija lengvai įvykdoma. Pavyzdžiui, tegul pradinis plytelių išdėstymas yra jų išdėstymas magiško kvadrato, atvaizduoto 381 piešinyje, pavidalu. Nustatykime, ar galima perstūmimų keliu gauti «taisyklingą» jų išdėstymą.

Tvarkos atstatymui atlikime pagalbinę «sukeitimo» operaciją ir suskaičiuokime sukeitimų skaičių. Patogumo dėlei tuščioje vietoje įsivaizduokime plytelę su skaičiumi nulis. Operacijos pabaigoje ši «plytelė» turi atsirasti už plytelės su skaičiumi 15, tai yra apatiniame dešiniame kampe. Pradėkime nuo plytelės Nr. 1. Kad patalpintume ją į pirmą vietą, pakanka atlikti vieną sukeitimą su plytele Nr. 13. Toliau, plytelė Nr. 13 turi užleisti savo vietą plytelei Nr. 2 (dar vienas sukeitimas). Dabar patalpinkime į «savo» vietą plytelę Nr. 3. Tam ją teks iš eilės sukeisti su plytelėmis 15, 8, 11, 5 ir 6 arba, o tai vis tiek, kitu keliu, pavyzdžiui, su plytelėmis 0, 14, 13, 5, 6 (penki sukeitimai). Plytelė Nr. 4 «savo» vietą užims po sukeitimo su plytelėmis 7, 9 ir 10 (trys sukeitimai). Kol kas atlikome $1+1+5+3=10$ sukeitimų; 4 plytelės užėmė «savo» vietas (382 pieš.).

Jūs lengvai užbaigsite šią sukeitimų operaciją patys. Suskaičiavę sukeitimų skaičių, rasime, kad iš viso jų reikės 31, tai yra nelyginio sukeitimų skaičiaus. Vadinasi, plyteles, išdėliotas magiško kvadrato pavidalu (381 pieš.), neįmanoma perstūmimų pagalba pilnutinai sutvarkyti.

Neįmanomas, vadinasi, ir atvirkštinio uždavinio sprendimas: «taisyklingai» išdėliotas plyteles, kaip parodyta 203 piešinyje (žr. 285 psl.), išdėstyti magiško kvadrato pavidalu.

1	2	3	4
14	13	6	10
0	12	5	9
15	8	11	7

382 pieš.

1	7	2	8
4	6	3	5
7	1	8	2
6	4	5	3

383 pieš.

Ne tiktai 381 piešinio magiško kvadrato, paimto pavyzdžiu, bet ir bet kurio kito, sudaryto iš skaičių nuo 0 iki 15, atveju skaičių grąžinimui į eilę nuo 1 iki 15 su nuliu dešiniame apatiniame kvadrato kampe reikia **nelyginio** sukeitimų skaičiaus. Tą teiginį lengva patikrinti praktiškai, tačiau jo įrodymas bendru atveju man nežinomas.

335. Ieškomas skaičių išdėstymas pateiktas 383 piešinyje. Nesunku įsitikinti, kad visi uždavinio sąlygos reikalavimai įvykdyti.

Magiškas kvadratas 206 piešinyje (žr. 287 psl.) pavadintas «vilkolakiu» dėl to, kad jis lieka magiškas su ta pačia konstanta, jei jį apsuktume «aukštyn kojomis».

336. Pagal sąlygą turime:

$$a_1+a_4+a_7=S,\quad a_3+a_6+a_9=S,$$
$$a_1+a_5+a_9=S,\quad a_3+a_5+a_7=S.$$

Iš čia

$$a_4+a_7=S-a_1,\quad a_6+a_9=S-a_3,$$
$$a_5+a_9=S-a_1,\quad a_5+a_7=S-a_3$$

ir, vadinasi,

$$a_4+a_7=a_5+a_9,\quad a_6+a_9=a_5+a_7.$$

Sudėję panariui pastarąsias dvi lygybes, gausime:

$$a_4+a_7+a_6+a_9=2a_5+a_9+a_7$$

arba

$$a_4+a_6=2a_5.$$

Pridėkime prie abiejų šios lygybės pusių po a_5, tada

$$a_4+a_5+a_6=3a_5,$$

bet $a_4+a_5+a_6=S$, vadinasi,

$$3a_5=S \quad \text{ir} \quad a_5=\frac{S}{3}.$$

Panašiai galima įrodyti, kad analogišką savybę turi skaičius, užimąs magiško kvadrato iš 25 langelių ir bendrai kvadrato su nelyginiu langelių skaičiumi centrinį langelį.

337. I u ž d a v i n y s. Sudarykite tris pilnus pagalbinius magiškus kvadratus. Pirmus du su pastoviomis sandaugomis a^3 ir b^3 sudarykite taip, kaip nurodyta uždavinio tekste (384 pieš.). Tuo pačiu principu sudarykite ir trečią kvadratą su pastovia sandauga c^3, be to, pirmiausia užpildykite skaičiais 1, c, c^2 tą įstrižainę, nuo kurios pradėjote antrojo kvadrato sudarymą, bet išdėliokite juos ne iš viršaus žemyn — dešinėn, o iš apačios — viršun — kairėn (385 pieš.).

a	1	a^2
a^2	a	1
1	a^2	a

1	b^2	b
b^2	b	1
b	1	b^2

384 pieš.

c^2	1	c
1	c	c^2
c	c^2	1

385 pieš.

Dabar uždėkite antrą ir trečią kvadratą ant pirmo ir sudauginkite skaičius, pakliuvusius į tuos pačius langelius. Gautas kvadratas (386 pieš.) — ieškomasis.

ac^2	b^2	a^2bc
a^2b^2	abc	c^2
bc	a^2c^2	ab^2

$P=a^3b^3c^3$

386 pieš.

1	a^2b	ac
bc	a	a^2
a^3	c	b

387 pieš.

2 uždavinys. Žiūrėk 387 piešinį.

XIII skyriui

343. IV. $37=\frac{333}{3\times3}$.

348. I. $11=22:2+2-2$,
$12=2\times2\times2+2+2$,
$13=(22+2+2):2$,
$14=2\times2\times2\times2-2$,
$15=22:2+2+2$,
$16=(2\times2+2+2)\times2$,
$17=(2\times2)^2+\frac{2}{2}$,
$18=2\times2\times2\times2+2$,
$19=22-2-\frac{2}{2}$,
$20=22+2-2-2$,
$21=22-2+\frac{2}{2}$,
$22=22\times2-22$,
$23=22+2-\frac{2}{2}$,
$24=22-2+2+2$,
$25=22+2+\frac{2}{2}$.

II. $1=(4:4)\times(4:4)$,
$2=(4:4)+(4:4)$,
$3=(4+4+4):4$,
$4=4+(4-4)\times 4$,
$5=(4\times 4+4):4$,
$6=4+(4+4):4$,
$7=4+4-4:4$,
$8=4+4+4-4$,
$9=4+4+4:4$,
$10=(44-4):4$.

III. $2=(n:n)+(n:n)$,

$$4=\frac{n-.\dot{n}}{.\dot{n}+.\dot{n}},$$

$$7=\frac{n-.\dot{n}-.\dot{n}}{.\dot{n}},$$

$$12=\frac{n+.n+.n}{.n},$$

$$13=\frac{n}{.n}+\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}},$$

$$15=\frac{n}{.\dot{n}}+\left(\sqrt{\frac{n}{.\dot{n}}}\right)!,$$

$$17=\frac{n+n-.\dot{n}}{.\dot{n}},$$

$$21=\frac{n+n+.n}{.n}.$$

Kaip parašyti kitus skaičius, sugalvokite patys.

349. I. $3=\frac{17\,469}{5\,823}$, $5=\frac{13\,485}{2\,697}$, $6=\frac{17\,658}{2\,943}$, $7=\frac{16\,758}{2\,394}$, $8=\frac{25\,496}{3\,187}$, $9=\frac{57\,429}{6\,381}$.

Vienetą devynių skaitmenų pagalba galima atvaizduoti taip:

$$1^{23\,456\,789}$$

(laipsnio rodiklis gali būti sudarytas bet kaip iš skaitmenų 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

II. $9=\frac{95\,742}{10\,638}=\frac{75\,249}{08\,361}=\frac{58\,239}{06\,471}$.

TURINYS

Pastebėtų klaidų atitaisymas

Psl.	Eilutė	Išspausdinta	Turi būti	Dėl kieno kaltės
98	2 iš virš.	iš 20 degtukų	iš 21 degtuko	Red.
135	6 iš ap.	daugiakampių φ'	daugiakampių P'	sp.
	2 iš ap.	daugiakampiui φ'	daugiakampiui P'	„
239	16 iš ap.	prideti	pridėti	„
261	5 iš virš.	$=$	$=.$	„
277	2 iš ap.	šešioliką	šešiolika	Red.
388	15 iš virš.	$\frac{15\,768}{3\,942}$	$\frac{15\,768}{3\,942}.$	sp.
344	5 iš virš.	x_2	x_n	„
430	3 iš virš.	$\longrightarrow 15$	$13 \longrightarrow 15$	„
518	14 iš ap.	bq	$= bq$	Red.
523	1 iš ap.	$\frac{a_1}{b^1}$	$\frac{a_1}{b_1}$	„
559	20 iš ap.	išdėstymą	išdėstymą,	„